離散数学演習問題解答（Web版）

第 8 章

8.4　定理 8.6 の十分性の証明を与える．モジュラー束 $(X, \vee, \wedge)$ が分配束でなかったとする．すると，ある $x, y, z \in X$ で分配律 (f′) が満たされない．すなわち，$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \neq (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ となるような $x, y, z \in X$ が存在する．そこで，

$$s = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x), \quad t = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

とする．すると，$t \prec s$ である．さらに，

$$u = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)), \quad v = (z \wedge x) \vee (y \wedge (z \vee x)),$$
$$w = (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y))$$

とする．すると，$(X, \vee, \wedge)$ はモジュラー束であり，$(y \wedge z) \vee (y \vee z) = y \vee z$（すなわち $y \wedge z \preceq y \vee z$）であるので，モジュラー律より，

$$u = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z)$$

が得られる．同様に，

$$\begin{aligned} v &= (z \wedge x) \vee (y \wedge (z \vee x)) = ((z \wedge x) \vee y) \wedge (z \vee x) \\ w &= (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \end{aligned}$$

が得られる．さらに，

$$u \vee v = v \vee w = w \vee u = s, \quad u \wedge v = v \wedge w = w \wedge u = t \qquad \text{(B.1)}$$

となり（証明は後述），$t \prec s$ より，u, v, w はすべて異なり，さらに s, t とも異なることが得られ，束 D_5 が得られる．したがって，モジュラー束 $(X, \vee, \wedge)$ が分配束でなかったとすると，部分束として D_5 を含むことが得られる．

そこで以下では，式 (B.1) が成立することを示す．式 (B.1) の $u \vee v = s$ は

$$\begin{aligned} u \vee v &= (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z)) \vee (z \wedge x) \vee (y \wedge (z \vee x)) \\ &= ((z \wedge x) \vee (x \wedge (y \vee z)) \vee ((y \wedge z) \vee (y \wedge (z \vee x)) \\ &= (((z \wedge x) \vee x) \wedge (y \vee z)) \vee (((y \wedge z) \vee y) \wedge (z \vee x)) \\ &= (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (z \vee x)) = ((x \wedge (y \vee z)) \vee y) \wedge (z \vee x) \\ &= ((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \wedge (z \vee x) = s \end{aligned}$$

から得られる．同様に，式 (B.1) の $v \vee w = w \vee u = s$ も得られる．さらに，式

(B.1) の $u \wedge v = t$ は

$$
\begin{aligned}
u \wedge v &= (y \vee z) \wedge (x \vee (y \wedge z)) \wedge (z \vee x) \wedge (y \vee (z \wedge x)) \\
&= ((z \vee x) \wedge (x \vee (y \wedge z)) \wedge ((y \vee z) \wedge (y \vee (z \wedge x)) \\
&= (((z \vee x) \wedge x) \vee (y \wedge z)) \wedge (((y \vee z) \wedge y) \vee (z \wedge x)) \\
&= (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee (z \wedge x)) = ((x \vee (y \wedge z)) \wedge y) \vee (z \wedge x) \\
&= ((x \wedge y) \vee (y \wedge z)) \vee (z \wedge x) = t
\end{aligned}
$$

から得られる．同様に，式 (B.1) の $v \wedge w = w \wedge u = t$ も得られる．

8.7 十分性をはじめに示す．束 $(L, \vee, \wedge)$ がジョルダン-デデキント チェーン条件と劣モジュラー律を満たすとする．このとき，$(L, \vee, \wedge)$ がセミモジュラーであることが以下のようにして得られる．

そこで，$x, y \in L$ に対して，x と y が $x \wedge y$ をカバーするとする．すると，ジョルダン-デデキント チェーン条件より，$h(x) = h(x \wedge y) + 1 = h(y)$ である．さらに，劣モジュラー律より，$h(x \vee y) \leq h(x) + h(y) - h(x \wedge y) = h(x) + 1$ である．一方，$x \preceq y$ とすると $x \wedge y = x$ となり x は $x \wedge y$ をカバーしないので，$x \not\preceq y$ であり $x \prec x \vee y$ となって，$h(x \vee y) = h(x) + 1$ が得られる．すなわち，$x \vee y$ は x をカバーすることが得られる．対称性から，$x \vee y$ が y をカバーすることも得られ，$(L, \vee, \wedge)$ がセミモジュラーであることが得られる．

次に，必要性を示す．束 $(L, \vee, \wedge)$ がセミモジュラーであるとする．はじめに，$(L, \vee, \wedge)$ がジョルダン-デデキント チェーン条件を満たすことを示す．$x \prec y$ となる $(L, \vee, \wedge)$ の区間 $[x, y]$ で，x, y を結ぶ最大チェーンを $P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ とし，x, y を結ぶ任意の極大チェーンを $P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ とする．もちろん，$a_0 = b_0 = x$, $a_r = b_s = y$ であり，各 a_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ は a_{i-1} をカバーし，各 b_j $(j = 1, 2, \cdots, s)$ は b_{j-1} をカバーする．さらに，$s \leq r$ である（図 B.1）．このとき $s = r$ であることを r についての帰納法で証明する．

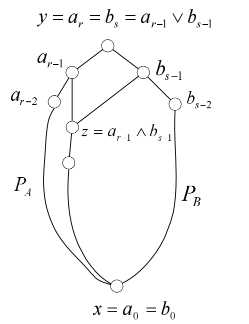


図 B.1　x, y を結ぶ最大チェーン $P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ と極大チェーン $P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$

$r=1$ のときは，極大チェーンは一意的に定まるので明らかである．$r=2$ のときは，$P_A=(a_0,a_1,a_2)$ であり，$P_B=(b_0,b_1,\cdots,b_s)$ である．P_A と P_B の定義より，$s\leq r=2$ である．そこで $s=1$ と仮定してみる．すると，$b_1=y=a_2$ は $b_0=x=a_0$ をカバーすることになる．一方，$y=a_2$ が a_1 もカバーし，a_1 が a_0 をカバーすることから，これは矛盾である．したがって，$s\geq 2$ であり，$s\leq r=2$ より，$s=r$ が得られる．

$r\geq 3$ として，最大チェーンの長さが $r-1$ までのすべての区間でジョルダン-デデキント チェーン条件が満たされていると仮定する．二つのケース，すなわち，(i) $a_{r-1}=b_{s-1}$ と (ii) $a_{r-1}\neq b_{s-1}$ のケースに分けて考える．

(i) $a_{r-1}=b_{s-1}$ のとき．このとき，$P_{A'}=(a_0,a_1,\cdots,a_{r-1})$ は x と a_{r-1} を結ぶ最大チェーンであり，$P_{B'}=(b_0,b_1,\cdots,b_{s-1})$ は x と $b_{s-1}=a_{r-1}$ を結ぶ極大チェーンである（図 B.2(i)）．そこで，区間 $[x,a_{r-1}]$ に対して帰納法の仮定を適用する．すると，$r-1=s-1$（すなわち，$r=s$）となり，区間 $[x,y]$ でもジョルダン-デデキント チェーン条件が満たされることが得られる．

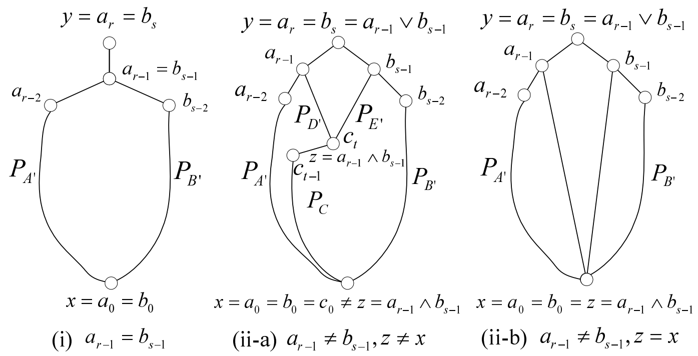


図 B.2 (i) $a_{r-1}=b_{s-1}$，(ii-a) $a_{r-1}\neq b_{s-1}$ かつ $z\neq x$，(ii-b) $a_{r-1}\neq b_{s-1}$ かつ $z=x$

(ii) $a_{r-1}\neq b_{s-1}$ のとき．このときは，a_{r-1} と b_{s-1} は比較不可能である．$z=a_{r-1}\wedge b_{s-1}$ とおき，二つのケース，すなわち，(ii-a) $z\neq x$ と (ii-b) $z=x$ のケースに分けて考える．

(ii-a) $z\neq x$ のとき（図 B.2(ii-a)）．もちろんこのときは $x\prec z$ である．x と z を結ぶ最大チェーンを $P_C=(c_0,c_1,\cdots,c_t)$，z と a_{r-1} を結ぶ最大チェーンを $P_{D'}=(d_0,d_1,\cdots,d_{k-1})$，$z$ と b_{s-1} を結ぶ最大チェーンを $P_{E'}=(e_0,e_1,\cdots,e_{h-1})$ とする（$c_0=x$, $c_t=d_0=e_0=z$, $d_{k-1}=a_{r-1}$, $e_{h-1}=b_{s-1}$）．$P_{D'}=(d_0,d_1,\cdots,d_{k-1})$ に (d_{k-1},d_k) $(d_k=y)$ をつなげたものを，$P_D=(d_0,d_1,\cdots,d_{k-1},d_k)$ とし，$P_{E'}=(e_0,e_1,\cdots,e_{h-1})$ に (e_{h-1},e_h)

$(e_h = y)$ をつなげたものを，$P_E = (e_0, e_1, \cdots, e_{h-1}, e_h)$ とする（図 B.2(ii-a)）．さらに，$P_C = (c_0, c_1, \cdots, c_t)$ に $P_{D'} = (d_0, d_1, \cdots, d_{k-1})$ をつなげたものを，$P_{C'} = (c_0, c_1, \cdots, c_t = d_0, d_1, \cdots, d_{k-1})$ とし，$P_C = (c_0, c_1, \cdots, c_t)$ に $P_{E'} = (e_0, e_1, \cdots, e_{h-1})$ をつなげたものを，$P_{C''} = (c_0, c_1, \cdots, c_t = e_0, e_1, \cdots, e_{h-1})$ とする．

$P_{A'} = (a_0, a_1, \cdots, a_{r-1})$ は x と a_{r-1} を結ぶ最大チェーンであり，$P_{C'} = (c_0, c_1, \cdots, c_t = d_0, d_1, \cdots, d_{k-1})$ は x と a_{r-1} を結ぶ極大チェーンである．したがって，帰納法の仮定より，$r-1 = t+k-1$ が得られる．すなわち，$r = t+k$ であり，$P' = (c_0, c_1, \cdots, c_t = d_0, d_1, \cdots, d_{k-1}, d_k)$ は x と $y = a_r$ を結ぶ最大チェーンであることになる．したがって，$P_D = (d_0, d_1, \cdots, d_{k-1}, d_k)$ は z と y を結ぶ最大チェーンであることが得られる．さらに，$P_E = (e_0, e_1, \cdots, e_{h-1}, e_h)$ は z と y を結ぶ極大チェーンであるので，区間 $[z, y]$ に対する帰納法の仮定より，$k = h$ が成立する．したがって，$P_{C''} = (c_0, c_1, \cdots, c_t = e_0, e_1, \cdots, e_{h-1})$ が x と b_{s-1} を結ぶ最大チェーンであることが得られる．したがって，区間 $[x, b_{s-1}]$ に対する帰納法の仮定より，$s-1 = t+h-1 = t+k-1 = r-1$ となり，$s = r$ が得られる．

(ii-b) $z = x$ のとき（図 B.2(ii-b)）．このときは $a_1 \neq b_1$ である．なぜなら，$a_1 = b_1$ とすると，$a_1 \preceq a_{r-1}$ と $b_1 \preceq b_{s-1}$ から $a_1 = b_1 \preceq z = a_{r-1} \wedge b_{s-1}$ となり，$x = a_0 \prec a_1 \preceq z$ から $x \prec z$ となって矛盾するからである．そこで，$c_2 = a_1 \vee b_1$ とする．a_1 と b_1 は $x = a_1 \wedge b_1$ をカバーするので，$(L, \vee, \wedge)$ のセミモジュラー律より，$c_2 = a_1 \vee b_1$ は a_1 と b_1 をカバーする．さらに，a_2 も a_1 をカバーするので $a_2 \wedge c_2 = a_1$ である．またこのとき，$c_2 \not\preceq a_{r-1}$ が言える．なぜなら，$c_2 \preceq a_{r-1}$ とすると，$b_1 \prec a_{r-1}$ となり，さらに，$b_1 \prec b_{s-1}$ から，$b_1 \preceq z = a_{r-1} \wedge b_{s-1}$ となり，$x \prec z$ となって矛盾するからである．対称性から，$c_2 \not\preceq b_{s-1}$ も言える（図 B.3）．なお，$c_2 \preceq y = a_r = b_s$ は明らかである．

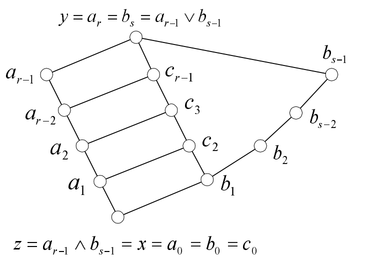


図 B.3　(ii-b) $a_{r-1} \neq b_{s-1}$ かつ $z = a_{r-1} \wedge b_{s-1} = x$ のとき

以下，各 $k = 3, 4, \cdots, r$ に対して c_k を

$$c_k = a_{k-1} \vee c_{k-1}$$

として定義する．すると，各 $k = 3, 4, \cdots, r-1$ に対して，上記の議論と同様に，$c_k = a_{k-1} \vee c_{k-1}$ は a_{k-1} と c_{k-1} をカバーし，$c_k \wedge a_k = a_{k-1}$ であり，$c_k \not\preceq a_{r-1}$ かつ $c_k \not\preceq b_{s-1}$ であり，$c_k \preceq y = a_r = b_s$ であることが言える．さらに，$c_r = a_{r-1} \vee c_{r-1}$ は a_{r-1} と c_{r-1} をカバーし，$c_r \preceq y = a_r = b_s$ であり，P_A が x と y を結ぶ最大チェーンであることから，$c_r = a_r$ が得られる．すなわち，$P_C = (x = c_0, b_1 = c_1, c_2, \cdots, c_r = y)$ は x と y を結ぶ最大チェーンである．したがって，$P_{C'} = (b_1 = c_1, c_2, \cdots, c_r = y)$ は $c_1 = b_1$ と y を結ぶ最大チェーンである．一方，$P_{B''} = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ は b_1 と y を結ぶ極大チェーンである．帰納法の仮定より，$s = r$ が得られる．

これで，任意の区間 $[x, y]$ がジョルダン-デデキント チェーン条件を満たすことが得られた．

次に，劣モジュラー律を示す．なお，以下の記述は，彌永昌吉，小平邦彦：『現代数学概説 I』，岩波書店，1976（第 14 刷）の第 4 章に基づいている．

任意の $a, b \in L$ に対して $a_0 = b_0 = a \wedge b$ とする．a_0 から a への極大チェーンを $P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ とし，b_0 から b への極大チェーンを $P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ とする．任意の $i = 0, 1, 2, \cdots, r$，$j = 0, 1, 2, \cdots, s$ に対して

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_i & (j = 0) \\ b_j & (i = 0) \\ a_i \vee b_j & (i \geq 1,\ j \geq 1) \end{cases} \tag{B.2}$$

とする．すると，以下の命題が成立する．

命題 B.1　セミモジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ の任意の比較不可能な 2 元 $a, b \in L$ に対して $a_0 = b_0 = a \wedge b$ とし，$P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ を a_0 から a への極大チェーン，$P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ を b_0 から b への極大チェーンとする．そして，$c_{i,j}$ は式 (B.2) で定義されるとする．このとき，任意の $i = 1, 2, \cdots, r$ と任意の $j = 1, 2, \cdots, s$ で以下の (a)〜(d) が成立する．

(a)　$c_{i,0} = a_i$ は $c_{i-1,0} = a_{i-1}$ をカバーし，$c_{0,j} = b_j$ は $c_{0,j-1} = b_{j-1}$ をカバーする．

(b)　$c_{i,j} = c_{i-1,j} \vee a_i = c_{i,j-1} \vee b_j$，$c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1} \vee a_i$ および $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1} \vee b_j$ である．

(c)　$c_{i,j} = c_{i-1,j} \vee c_{i,j-1}$ である．

(d)　$c_{i-1,j} \neq c_{i,j-1}$ であり，かつ $c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ がともに $c_{i-1,j-1}$ をカバーするならば，$c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ である．

証明：　$P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ が $a_0 = a \wedge b$ から $a = a_r$ への極大チェーンであり，$P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ が $b_0 = a \wedge b$ から $b = b_s$ への極大チェーンであるので，(a) は明らかである．

$$\begin{aligned} c_{i-1,j} \vee a_i &= a_{i-1} \vee b_j \vee a_i = a_i \vee b_j = c_{i,j}, \\ c_{i,j-1} \vee b_j &= a_i \vee b_{j-1} \vee b_j = a_i \vee b_j = c_{i,j}, \end{aligned}$$

$$c_{i-1,j-1} \vee a_i = a_{i-1} \vee b_{j-1} \vee a_i = a_i \vee b_{j-1} = c_{i,j-1},$$
$$c_{i-1,j-1} \vee b_j = a_{i-1} \vee b_{j-1} \vee b_j = a_{i-1} \vee b_j = c_{i-1,j}$$

より，(b) が得られる．

(c) は，$c_{i-1,j} \vee c_{i,j-1} = (a_{i-1} \vee b_j) \vee (a_i \vee b_{j-1}) = a_i \vee b_j = c_{i,j}$ から得られる．

最後に (d) を示す．$c_{i-1,j-1} \preceq c_{i-1,j}$ かつ $c_{i-1,j-1} \preceq c_{i,j-1}$ であるので，$c_{i-1,j-1} \preceq c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ である．さらに，$c_{i-1,j} \neq c_{i,j-1}$ であるので，$c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ は，$c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ の少なくとも一方とは異なる．対称性から，$c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} \neq c_{i-1,j}$ とする．ここで，$c_{i-1,j-1} \prec c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ とすると，$c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} \prec c_{i-1,j}$ であるので，$c_{i-1,j-1} \prec c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} \prec c_{i-1,j}$ となり，$c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーすることに反してしまう．したがって，$c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ が得られる．□

命題 B.2　セミモジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ の任意の比較不可能な 2 元 $a, b \in L$ に対して $a_0 = b_0 = a \wedge b$ とし，$P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ を a_0 から a への極大チェーン，$P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ を b_0 から b への極大チェーンとする．そして，$c_{i,j}$ は式 (B.2) で定義されるとする．さらに，任意の $i = 1, 2, \cdots, r$ と任意の $j = 1, 2, \cdots, s$ に対して，以下の (i) と (ii) が成立するとする．

(i) $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするか，あるいは $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ である．

(ii) $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするか，あるいは $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ である．

このとき以下の (1) と (2) が成立する．

(1) $c_{i,j}$ が $c_{i,j-1}$ をカバーするか，あるいは $c_{i,j} = c_{i,j-1}$ である．

(2) $c_{i,j}$ が $c_{i-1,j}$ をカバーするか，あるいは $c_{i,j} = c_{i-1,j}$ である．

証明：　四つのケース：(a) $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ かつ $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ のとき，(b) $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ かつ $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするとき，(c) $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーし，かつ $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ のとき，(d) $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーし，かつ $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするとき，に分けて議論する．

(a) $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ かつ $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ のとき：命題 B.1(c) より，$c_{i,j} = c_{i-1,j} \vee c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1} \vee c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j} = c_{i,j-1}$ が成立する．

(b) $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ かつ $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするとき：命題 B.1(b) より，$c_{i-1,j-1} \preceq c_{i,j-1}$ であるので，$c_{i,j} = c_{i-1,j} \vee c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1} \vee c_{i,j-1} = c_{i,j-1}$ となり，$c_{i,j} = c_{i,j-1}$ は $c_{i-1,j} = c_{i-1,j-1}$ をカバーする．

(c) $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーし，かつ $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ のとき：(b) と対称的であるので，$c_{i,j} = c_{i-1,j} \vee c_{i,j-1} = c_{i-1,j} \vee c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j}$ となり，$c_{i,j} = c_{i-1,j}$ は $c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ をカバーすることが得られる．

(d) $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーし，かつ $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーするとき：$c_{i-1,j} = c_{i,j-1}$ ならば，命題 B.1(c) より，$c_{i,j} = c_{i,j-1} = c_{i-1,j}$ である．

一方，$c_{i-1,j} \neq c_{i,j-1}$ ならば，命題 B.1(d) より，$c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ である．$c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ がともに $c_{i-1,j-1}$ をカバーするので，セミモジュラー律より，$c_{i,j} = c_{i,j-1} \vee c_{i-1,j}$ は $c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ をともにカバーする． □

命題 B.3 セミモジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ の任意の比較不可能な 2 元 $a, b \in L$ に対して $a_0 = b_0 = a \wedge b$ とし，$P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ を a_0 から a への極大チェーン，$P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ を b_0 から b への極大チェーンとする．そして，$c_{i,j}$ は式 (B.2) で定義されるとする．このとき，命題 B.1(a) より，$c_{i,0} = a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ は $c_{i-1,0} = a_{i-1}$ をカバーし，$c_{0,j} = b_j$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$ は $c_{0,j-1} = b_{j-1}$ をカバーする．さらに，任意の $i = 1, 2, \cdots, r$ と任意の $j = 1, 2, \cdots, s$ に対して，以下の (1) と (2) が成立する．

(1) $c_{i,j}$ が $c_{i,j-1}$ をカバーするか，あるいは $c_{i,j} = c_{i,j-1}$ である．

(2) $c_{i,j}$ が $c_{i-1,j}$ をカバーするか，あるいは $c_{i,j} = c_{i-1,j}$ である．

証明： 命題 B.2 に基づいて証明する．$i = j = 1$ のとき，命題 B.2 の条件 (i),(ii) が成立する．すなわち，$c_{01} = b_1$ は $c_{00} = b_0$ をカバーし，$c_{10} = a_1$ は $c_{00} = a_0$ をカバーする．したがって，$i = j = 1$ のとき，命題 B.2（命題 B.3）の (1),(2) が成立する．すなわち，(1) c_{11} が c_{10} をカバーするか $c_{11} = c_{10}$ であり，(2) c_{11} が c_{01} をカバーするか $c_{11} = c_{01}$ である．

そこで，$k = i + j \geq 2$ についての帰納法で命題を証明する．$k = i + j = 2$ のときは $i = j = 1$ であり，上記のように成立する．$k \geq 2$ まで命題が成立したとして，$k + 1 = i + j \leq r + s$ でも命題が成立することを示す．帰納法の仮定より，(i) c_{i-1j} が c_{i-1j-1} をカバーするか $c_{i-1j} = c_{i-1j-1}$ であり，かつ (ii) c_{ij-1} が c_{i-1j-1} をカバーするか $c_{ij-1} = c_{i-1j-1}$ である．したがって，命題 B.2 の条件 (i),(ii) が成立するので，命題 B.2（命題 B.3）の (1),(2) が成立する．すなわち，(1) $c_{i,j}$ が $c_{i,j-1}$ をカバーするか $c_{i,j} = c_{i,j-1}$ であり，かつ (2) $c_{i,j}$ が $c_{i-1,j}$ をカバーするか $c_{i,j} = c_{i-1,j}$ であり，$k + 1 = i + j$ でも命題が成立することが得られた． □

命題 B.3 を用いると，劣モジュラー律はすぐに得られる．任意の 2 元 $a, b \in L$ に対して，$a \preceq b$ あるいは $b \preceq a$ ならば $h(a \vee b) + h(a \wedge b) = h(a) + h(b)$ は自明であるので，以下では a と b は比較不可能であるとする．すると，$c_{r,j} = a \vee b_j$ は $c_{r,j-1} = a \vee b_{j-1}$ をカバーする（$h(a \vee b_j) = h(a \vee b_{j-1}) + 1$ である）か，あるいは $c_{r,j} = a \vee b_j = c_{r,j-1}$ である（$h(a \vee b_j) = h(a \vee b_{j-1})$ である）ので，$h(c_{r,j}) = h(a \vee b_j) \leq h(a \vee b_{j-1}) + 1 = h(c_{r,j-1}) + 1$ である．したがって，$a \vee b = a_r \vee b_s = c_{r,s}$ および $c_{r,0} = a \vee b_0 = a \vee (a \wedge b) = a$ であることから，

$$h(a \vee b) = h(c_{r,s}) \leq h(c_{r,s-1}) + 1 \leq h(c_{r,s-2}) + 2 \leq \cdots \leq h(c_{r,0}) + s = h(a) + s$$

である．したがって，

$$h(a \vee b) + h(a \wedge b) \leq h(a) + s + h(a \wedge b) = h(a) + h(b)$$

が得られる．

8.8 前問のセミモジュラー束に関する命題はモジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ では以下のように書ける．

命題 B.4 モジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ の任意の比較不可能な 2 元 $a, b \in L$ に対して $a_0 = b_0 = a \wedge b$ とし，$P_A = (a_0, a_1, \cdots, a_r)$ を a_0 から a への極大チェーン，$P_B = (b_0, b_1, \cdots, b_s)$ を b_0 から b への極大チェーンとする．そして，$c_{i,j}$ は式 (B.2) で定義されるとする．このとき，命題 B.1(a) より，$c_{i,0} = a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ は $c_{i-1,0} = a_{i-1}$ をカバーし，$c_{0,j} = b_j$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$ は $c_{0,j-1} = b_{j-1}$ をカバーする．さらに，任意の $i = 1, 2, \cdots, r$ と任意の $j = 1, 2, \cdots, s$ に対して，以下が成立する．

(1) $c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ である．

(2) $c_{i-1,j} \neq c_{i,j-1}$ であり，$c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ はともに $c_{i-1,j-1}$ をカバーする．

(3) $c_{i,j}$ は $c_{i,j-1}$ と $c_{i-1,j}$ をともにカバーする．

証明： (1) を最初に示す．$a_{i-1} \preceq (a_i \vee b_{j-1})$ かつ $b_{j-1} \preceq b_j$ かつ $a_i \wedge b_j = a \wedge b = a_0 = b_0$ であるので，モジュラー律より，

$$
\begin{aligned}
c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} &= (a_{i-1} \vee b_j) \wedge (a_i \vee b_{j-1}) = a_{i-1} \vee (b_j \wedge (a_i \vee b_{j-1})) \\
&= a_{i-1} \vee ((b_j \wedge a_i) \vee b_{j-1}) = a_{i-1} \vee b_{j-1} \vee (a_i \wedge b_j) \\
&= a_{i-1} \vee b_{j-1} = c_{i-1,j-1}
\end{aligned}
$$

である．(2) と (3) は $k = i + j \geq 2$ についての帰納法で証明する．

$k = i + j = 2$ のときは $i = j = 1$ である．さらに，$a \wedge b = a_0 = b_0$ より，$c_{0,1} = b_1 \neq a_1 = c_{1,0}$ であり，$c_{0,1} = b_1$ と $c_{1,0} = a_1$ は $a_0 = b_0 = c_{0,0}$ をカバーする．また，L は（モジュラーであるので）セミモジュラーであり，$c_{1,1} = a_1 \vee b_1$ は $c_{0,1}$ と $c_{1,0}$ をカバーする．したがって，(2) と (3) が成立する．

そこで，$i' + j' = k \geq 2$ まで命題が成立したとして，$i + j = k + 1 \leq r + s$ でも命題が成立することを示す．帰納法の仮定より，以下の (i) と (ii) が成立する．

(i) $c_{i'-1,j'} \neq c_{i',j'-1}$ であり，$c_{i'-1,j'}$ と $c_{i',j'-1}$ は $c_{i'-1,j'-1}$ をカバーする．

(ii) $c_{i',j'}$ は $c_{i'-1,j'}$ と $c_{i',j'-1}$ をカバーする．

すると (ii) より，$i' = i - 1$ かつ $j' = j$ として $c_{i-1,j}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーし，$i = i$ かつ $j' = j - 1$ として $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーすることが得られる．さらに，(1) より，$c_{i-1,j} = c_{i,j-1}$ とすると $c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1} = c_{i-1,j-1}$ となって，$c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ が $c_{i-1,j-1}$ をカバーすることに反してしまうので，$c_{i-1,j} \neq c_{i,j-1}$ が得られる．すなわち，(2) が得られる．

(1) より $c_{i-1,j-1} = c_{i-1,j} \wedge c_{i,j-1}$ であり，(2) より，$c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ がともに $c_{i-1,j-1}$ をカバーする．さらに，L は（モジュラーであり）セミモジュラーであるので，命題 B.1(c) より，$c_{i,j} = c_{i,j-1} \vee c_{i-1,j}$ は $c_{i-1,j}$ と $c_{i,j-1}$ をともにカバーする．したがって，(3) が得られる．すなわち，(2) と (3) が $i + j = k + 1$ でも成立することが得られた．□

命題 B.4 より以下の定理が得られる．

命題 B.5　束 $(L, \vee, \wedge)$ の最小元 O から任意の $x \in X$ への最大チェーンのサイズを $h(x)$ とする．すると，モジュラー束 $(L, \vee, \wedge)$ の任意の $a, b \in L$ に対して，

$$h(a) + h(b) = h(a \vee b) + h(a \wedge b) \tag{B.3}$$

が成立する．

証明：　$a \preceq b$ ならば，$a \vee b = b$ かつ $a \wedge b = a$ であるので，式 (B.3) は明らかに成立する．対称性から，$b \preceq a$ のときも式 (B.3) が成立する．

そこで，以下では $a \not\preceq b$ かつ $b \not\preceq a$ とする．命題 B.4（およびその記法）を用いる．すると，$j = 1, 2, \cdots, s$ に対して，$c_{r,j} = a \vee b_j$ は $c_{r,j-1} = a \vee b_{j-1}$ をカバーするので，$h(a \vee b_j) = h(a \vee b_{j-1}) + 1$ である．したがって，$a \vee b = a_r \vee b_s = c_{r,s}$ および $c_{r,0} = a \vee b_0 = a \vee (a \wedge b) = a$ であることから，

$$h(a \vee b) = h(c_{r,s}) = h(c_{r,s-1}) + 1 = h(c_{r,s-2}) + 2 = \cdots = h(c_{r,0}) + s = h(a) + s$$

である．したがって，

$$h(a \vee b) + h(a \wedge b) = h(a) + s + h(a \wedge b) = h(a) + h(b)$$

が得られる．　□

これで定理 8.17（下に定理 B.1 として再掲）を証明する準備ができた．

定理 B.1　束 $(L, \vee, \wedge)$ の最小元 O から任意の $x \in X$ への最大チェーンのサイズを $h(x)$ とする．すると，束 $(L, \vee, \wedge)$ がモジュラーであるための必要十分条件は，$(L, \vee, \wedge)$ がジョルダン-デデキント チェーン条件を満たし，かつ $(L, \vee, \wedge)$ の任意の x, y に対して，

$$h(x) + h(y) = h(x \vee y) + h(x \wedge y) \tag{B.4}$$

が成立することである．

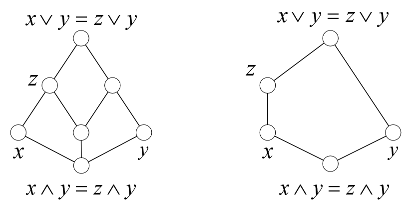
証明：　必要性は，モジュラー束はセミモジュラーでもあるので，定理 8.16 と命題 B.5 から得られる．

十分性を示す．束 $(L, \vee, \wedge)$ がジョルダン-デデキント チェーン条件を満たし，任意の $x, y \in L$ に対して，$h(x) + h(y) = h(x \vee y) + h(x \wedge y)$ が成立するとする．このとき，モジュラー律が成立することを示せばよい．そこで $x \preceq z$ を満たす $x, z \in X$ と $y \in X$ を考える．

$$\begin{aligned}
h((x \vee y) \wedge z) &= h(x \vee y) + h(z) - h((x \vee y) \vee z) \\
&= h(x \vee y) + h(z) - h(y \vee z) \\
&= h(x) + h(y) - h(x \wedge y) + h(z) - h(y) - h(z) + h(y \wedge z) \\
&= h(x) - h(x \wedge y) + h(y \wedge z) \\
h(x \vee (y \wedge z)) &= h(x) + h(y \wedge z) - h(x \wedge (y \wedge z)) \\
&= h(x) + h(y \wedge z) - h(x \wedge y)
\end{aligned}$$

であるので，$h((x \vee y) \wedge z) = h(x \vee (y \wedge z))$ が成立する．さらに，$x \preceq z$ より，$x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge z$ は明らかである．一方，$x \vee (y \wedge z) \prec (x \vee y) \wedge z$ とすると，$h(x \vee (y \wedge z)) < h((x \vee y) \wedge z)$ となり，上記に矛盾する．したがって，$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ が成立する．すなわち，モジュラー律が成立し，$(L, \vee, \wedge)$ はモジュラー束であることが得られた． □

8.9 ウォーミングアップクイズの (a) のハッセ図である左のハッセ図は，右のハッセ図のようなモジュラーでない束 P_5 を部分束として含むので，モジュラー束ではない．



第 11 章

11.7 $\Delta^*(G) \geq \frac{3}{2}\Delta(G)$ ならば，定理 11.11 より，G は $\frac{3}{2}\Delta(G) \leq \Delta^*(G)$ 色で辺彩色可能である．そこで，以下では $\Delta^*(G) < \frac{3}{2}\Delta(G)$ とする．G の辺数 m についての帰納法で証明する．m が $m = 0, 1, 2, 3$ などの小さいときは自明である．そこで，辺数 $m - 1$ の多重グラフまでは定理 11.12 が成立すると仮定して，辺数 m の多重グラフ G を考える．G の任意の辺 $e = (u, v)$ を選び，$G - \{e\}$ を考える．$\Delta^*(G - \{e\}) \leq \Delta^*(G)$ であるので，帰納法の仮定より，$G - \{e\}$ は $k = \Delta^*(G)$ 色で辺彩色されているとする．各点 p に接続する辺の本数は $\deg(p) = \deg^*(p) - \mu_p \leq \Delta^*(G) - \mu_p$ であるので，この辺彩色 c で $|(D_c(v))| \geq \mu_v + 1 \geq 1$, $|(D_c(u))| \geq \mu_u + 1 \geq \min\left\{\mu_{vu}, \frac{\deg(v)}{2} + 1\right\}$, $|(D_c(p))| \geq \mu_p \geq \min\left\{\mu_{vp}, \frac{\deg(v)}{2}\right\}$ となり，補題 11.6 の条件は満たされる．したがって，G は $k = \Delta^*(G)$ 色で辺彩色可能である．