第 1 章

1.　公式 (1.5) から，P_0 から P_+ に到達するに要する時間 T_0 は

$$T_0 = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\,(\,k\cos y + k\,)}} dy$$

で与えられるる．さらに $y=\pi$ を中心とするテーラー展開

$$\cos y + 1 = \frac{1}{2}(\,\pi - y\,)^2 - \frac{1}{4\,!}(\,\pi - y\,)^4 + \cdots$$

を上式に代入すればよい．

2.

(i)　$\mathbf{F}(\mathbf{X})$ の第 k 成分を $F^k(\mathbf{X})$, 変数 $\mathbf{X}$ の k 成分方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ とすれば,

$$\frac{|\,F^k(\mathbf{X} + h\,\boldsymbol{e}_j) - \mathbf{F}^k(\mathbf{X})\,|}{|\,h\,|} \le L\,|\,h\,|^{\alpha - 1} \to 0 \quad h \to 0$$

を得るから $\dfrac{\partial}{\partial X_j}\,F^k(\mathbf{X}) = 0 \quad \forall k, j$ が結論される．

(ii)

$$|\,x - y\,| \le x + y \le (\,\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

から明らか.

(iii)

$$|\,\sqrt{x} - \sqrt{y}\,| = \frac{|\,x - y\,|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le |\,x - y\,|^{1/2}\,\frac{|\,x - y\,|^{1/2}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le |\,x - y\,|^{1/2}$$

(iv)　$\forall \alpha > \frac{1}{2}$ に対して

$$\frac{|\,f(x) - f(0)\,|}{|\,x - 0\,|} = |\,x\,|^{\frac{1}{2} - \alpha} \to +\infty \quad x \to 0$$

から明らか.

(v)　$f_0\,(\,y\,) = \sqrt{y} \quad y \ge 0,\quad f_0\,(\,y\,) = -\sqrt{-y} \quad y < 0$ であるから，上問 (iii)-(iv) を適用すればよい．

3.

$$m = 2,\quad \mathbf{Y}(\,x\,) = (\,y^1(\,x\,),\ y^2(\,x\,)),\quad y^1(\,x\,) = y\,(\,x\,),\ y^2(\,x\,) = y'(\,x\,)$$
$$F^1(\,x,\,y^1,\,y^2\,) = y^2,\quad F^2(\,x,\,y^1,\,y^2\,) = f\,(\,x,\,y^1,\,y^2\,)$$

とおけば, 与えられた問題は (1.9) に帰着される．さらに, $\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ で C^1 級となるから，定理 1.4，注意 1.2 が適用される．

4.

(i)

$$m = 2, \quad \mathbf{Y}(x) = (y^1(x),\ y^2(x)), \quad y^1(x) = y(x),\ y^2(x) = y'(x)$$
$$F^1(x, y^1, y^2) = y^2, \quad F^2(x, y^1, y^2) = f_0(y^1)$$

とおけば，$(\mathrm{E})_2$ は (1.9) に帰着される．さらに，$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ で連続関数となるから，定理 1.7 が適用される．

(ii) 非負値の解を考えよう．$(\mathrm{E})_2$ の両辺に y' をかけて整理すれば

$$y' = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\,y^{\frac{3}{2}} + 2\,C} \quad (*1.1)$$

を得る．$(y_0, y_1) = (0, 0)$ のとき $C = 0$ であるから，$y' = \sqrt{\frac{4}{3}}\,y^{\frac{3}{4}}$, $y_0 = 0$ の解は，注意 1.4 の例と同様にして，無限個の解を持つことが示される．実際

$$y(x) = 0 \quad 0 \le x \le x_1, \quad y(x) = \frac{1}{144}(x - x_1)^4 \quad x_1 \le x$$

とおけば $(\mathrm{E})_2$ の解を与えることが容易に示される．

(iii) (a) $y_0 = 0,\ y_1 > 0$ のとき，$y \in C^2$ であったから，ある正数 δ が存在して $y'(x) > 0, \quad t \in [0, \delta)$ とできる．よって，特に $y(x) > 0, \quad t \in (0, \delta)$ となる．$y(x)$ が $x = x_0$ で再び 0 となるとすると（即ち $y(x) > 0 \quad x \in (0, x_0), \quad y(x_0) = 0$）ロルの定理から $y'(x_1) = 0$ となる $x_1 \in (0, x_0)$ が存在するが，$(*1)$ より（$C = y_1^2/2$）$y'(x) \ge y_1 > 0 \quad \forall t \in (0, x_0)$ となり矛盾．
よって，$y(x) > 0 \quad \forall t > 0$ 従って $y'(x) \ge y_1 \quad \forall t > 0$. これから $y(x) \ge y(\delta) = y_\delta > 0 \quad \forall t \ge \delta$ がわかるが，$f_0(y)$ は $[y_\delta, +\infty)$ でリプシッツ連続であるので，定理 1.1 により，解 y は $[\delta, +\infty)$ に一意的に延長できる．

解の一意性を見るには，$(*1.1)$ において $\sqrt{\frac{4}{3}\,y^{\frac{3}{2}} + y_1}$ は $y \ge 0$ においてリプシッツ連続となることに注意すれば十分である．
$y_0 = 0,\ y_1 < 0$ のときには，$-y$ に対して上と同じ議論を繰り返せば良い．

(b) $y_0 > 0,\ y_1 = 0$ のとき，$y \in C^2$ であったから，ある正数 δ が存在して $y(x) > 0, \quad t \in [0, \delta)$ とできる．よって，方程式 $(\mathrm{E})_2$ から，$y''(x) > 0, \quad t \in [0, \delta)$ となる．従って $y'(x) > 0, \quad t \in (0, \delta)$. $y'(x)$ が $x = x_0$ で再び 0 となるとすると（即ち $y'(x) > 0 \quad x \in (0, x_0), \quad y'(x_0) = 0$）ロルの定理から $y''(x_1) = 0$ となる $x_1 \in (0, x_0)$ が存在するが，$y(x_1) > 0, \quad x \in (0, x_0)$ であるから，$(\mathrm{E})_2$ より $y''(x) > 0 \quad \forall t \in (0, x_0)$ となり矛盾．
よって，$y(x) \ge y_0 > 0 \quad \forall t > 0$ がわかり，$f_0(y)$ は $[y_1, +\infty)$ でリプシッツ連続であるから，大域解の存在と一意性が保証された．
$y_0 < 0,\ y_1 = 0$ のときには，$-y$ に対して上と同じ議論を繰り返せば良い．

5.　まず，$y \mapsto |\,y\,|^{\alpha}\,y$ は C^1-級であるから，定理 1.4 により，局所解の存在と一意性が保証される．また，この微分方程式は変数分離形であるから，解の公式 (2.3) から，解 y は

$$|\,y\,(\,x\,)\,| = \big(\,|\,y_0\,|^{-\alpha} - \alpha\,x\,\big)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

を満たす．よって，解は $x = \frac{1}{\alpha}\,|\,y_0\,|^{-\alpha}$ で爆発する．

6.　$y \mapsto -|\,y\,|^{\alpha}\,y$ は C^1-級であるから，定理 1.4 により，局所解の存在と一意性が保証される．さらに，定理 1.5 により，大域解の存在も保証される．また，この微分方程式は変数分離形であるから，解の公式 (2.3) から，解 y は

$$|\,y\,(\,x\,)\,| = \big(\,|\,y_0\,|^{-\alpha} + \alpha\,x\,\big)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (\,y_0 \neq 0\,)$$

を満たす．よって，これから $x \to +\infty$ のとき $y\,(\,x\,) \to 0$ となる事が導かれる．$y_0 = 0$ のときには，$y\,(\,x\,) \equiv 0$ が一意的大域解となる．

7.

$$m = 2, \quad \mathbf{Y}(\,x\,) = (\,y^1(\,x\,),\ y^2(\,x\,)\,), \quad y^1(\,x\,) = y\,(\,x\,),\ y^2(\,x\,) = y'(\,x\,)$$
$$F^1(\,x, y^1, y^2\,) = y^2, \quad F^2(\,x, y^1, y^2\,) = |\,y\,|^{\alpha}\,y$$

とおけば，$(\mathrm{E})_2$ は (1.9) に帰着される．さらに，$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ で C^1- 級の関数となるから，定理 1.4 により，任意の初期値に対して一意的な局所解の存在が保証され，解の最大存在時刻 T_m に関して $T_m = +\infty$ または $T_m < +\infty$, $\lim_{t \to T_m}(\,|\,y\,(\,x\,)|^2 + |\,y'(\,x\,)|^2\,) = +\infty$ が成り立つ．一方，$(\mathrm{E})^2_+$ に $y'(\,x\,)$ をかけて，$(\,0,\ x\,)$ で積分すれば

$$\frac{1}{2}\,y'(\,x\,)^2 - \frac{1}{2+\alpha}\,|\,y\,(\,x\,)|^{2+\alpha} = \frac{1}{2}\,y_1^2 - \frac{1}{2+\alpha}\,|\,y_0\,|^{2+\alpha} = J_0 \qquad (*1.2)$$

を得る．

(i)　$y_0 \geq 0,\ y_1 > 0$ のとき．もし，$y'(x_1\,) = 0$ となる $x_1 > 0$ が存在したとすると，$y'(\,0\,) = y_1 > 0$ であったから，補題 1.2 と同様の議論により，ある $x_2 \in (\,0,\ x_1\,)$ が存在して

$$y'(\,x\,) > 0 \quad \forall x \in [\,0, x_2\,), \quad y'(\,x_2\,) = 0$$

となるが，y は $[\,0, x_2\,)$ で狭義単調増加であるから，$y\,(\,x\,) > 0 \quad \forall\,x \in (\,0, x_2\,]$，よって方程式から $y''(\,x\,) > 0 \quad \forall x \in (\,0, x_2\,]$ がわかる．従って，$y'(\,x\,) \geq y_1 \quad \forall x \in [\,0, x_2\,]$ が結論される．これは，$y'(\,x_2\,) = 0$ に矛盾する．よって，$T_m = +\infty$ とすると，$y'(\,x\,) \geq y_1 \quad \forall\,x \in [\,0,\ +\infty)$ が成り立つ．これを積分すれば $y\,(\,x\,) \geq y_1\,x + y_0 \to +\infty \quad (\,x \to +\infty\,)$ となる．よって $(*1.2)$ より，ある十分大きな T_0 が存在して

$$y'(\,x\,) \geq \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}}\,(\,y\,(\,x\,)\,)^{\frac{2+\alpha}{2}} \quad \forall\,x \in [\,T_0,\ +\infty\,)$$

とできる．ここで $z'(\,x\,) = \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}}\,(\,z\,(\,x\,)\,)^{\frac{2+\alpha}{2}}, \quad z\,(\,T_0\,) = y\,(\,T_0\,)$ を満たす解 z は，$\frac{2+\alpha}{2} > 1$ であるから，問題 5 で示したように，有限時間で爆発することがわかる．よって，比較定理 1.6 を適用すると，y も有限時間で爆発すつことになり大域解であるという仮定に矛盾する．結局 $T_m < +\infty$ が結論され，$\lim_{t \to T_m}(\,|\,y\,(\,x\,)\,|^2 + |\,y'(\,x\,)\,|^2\,) = +\infty$ が成り立つ．
$y_0 \leq 0,\ y_1 < 0$ に対しては，$-y$ に対して，上と同じ議論を繰り返せば良い．

(ii) まず $J_0 > 0$ であるときを考える．$(*1.2)$ から $y'(x)^2 \geq 2J_0 > 0$ であることに注意する．$y_1 > 0$ のときは $y'(x) \geq \sqrt{2J_0} \quad \forall x \geq 0$ であるから $y(x) \geq \sqrt{2J_0}\,x + y_0$ となり，十分大きな T_0 が存在して $y(T_0) > 0,\ y'(T_0) > 0$ とできる．上問 (i) を適用すれば，解は有限時間で爆発することが導かれる．
$y_1 < 0$ のときも同様にして，$y(T_0) < 0,\ y'(T_0) < 0$ となる時刻 T_0 の存在がわかるから，上問 (i) を適用すればよい．
$J_0 < 0$ のときは，まず $(*1.2)$ から $y,\ y'$ は同時に 0 になれば $J_0 = 0$ となるから，このようなことは起こらないことに注意する．よって，大域解があるとすれば，上問 (i) の結果から $y(x) < 0,\ y'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ または $y(x) > 0,\ y'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$ が満たされていなくてはならない．
$y(x) < 0,\ y'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ が成り立っているとすると，$y(x)$ は単調増加であり上に有界，方程式 $(\mathrm{E})^2_+$ から $y'(x)$ は狭義単調減少で下に有界である．従って $(*1.2)$ より

$$y(x) \to \beta \leq 0, \quad y'(x) \to \gamma \geq 0 \quad (x \to +\infty) \quad J_0 = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2+\alpha}|\beta|^{2+\alpha}$$

が得られる．ここで，もし $\beta < 0$ であるとすると，方程式から

$$y'(x) - y_1 = \int_0^x |y|^\alpha y(t)\,dt \leq -\int_0^x |\beta|^{1+\alpha}\,dt \ \to -\infty \quad (x \to +\infty)$$

となって $y'(x) \geq 0$ に反する．よって $\beta = 0$ となる．これは $J_0 = \gamma^2/2 \geq 0$ を意味し $J_0 < 0$ に矛盾する．$y(x) > 0,\ y'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$ としても，全く同様の議論により否定される．

8.

(i) 上問 7. の (i) で $F^2(x, y^1, y^2) = -|y|^\alpha y$ とすれば，まったく同様にして，局所解の存在と一意性が示される．大域解の存在を見るには，方程式 $(\mathrm{E})^2_-$ に $y'(x)$ をかけて積分すれば，$(*1.2)$ と同様にして

$$\frac{1}{2}y'(x)^2 + \frac{1}{2+\alpha}|y(x)|^{2+\alpha} = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2+\alpha}|y_0|^{2+\alpha} = J_0 \qquad (*1.3)$$

が得られる．これより，$y(x)$ と $y'(x)$ の有界性が保証される．また，方程式より $y''(x)$ の有界性も導かれる．定理 1.4 の後半部分の主張から，解が有限時間で爆発することはないことが示された．

(ii) ${w_1}'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ とすると，$w_1(x) \geq w_1(1) > 0 \quad \forall x \geq 1$ であるから，方程式より

$${w_1}'(x) - {w_1}'(1) = -\int_1^x |w_1|^\alpha w_1(t)\,dt \leq -w_1(1)^{1+\alpha}(x-1) \ \to\ -\infty$$

$(x \to +\infty)$ となって ${w_1}'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ に矛盾する．よって，ある正数 T_0 が存在して $w_1(x) > 0,\ w_1'(x) > 0 \quad x \in (0,\ T_0]$ かつ $w_1'(T_0) = 0$ が成り立つ．ここで，

$$w_1(x) = w_1(2T_0 - x) \quad T_0 \leq x \leq 2T_0$$

と定義すれば，$w_1(x)$ は $(\mathrm{E})^2_-$ の $(0,\ 2T_0)$ における解になっている．初期値問題の解の一意性から，$w_1(x) > 0\ \forall x \in (0, 2T_0)$, $\quad w_1(2T_0) = 0$ が満たされることが示された．

9.

(i) $y_1(0) = y_1(1) = 0$ 及び $y_1(x) > 0 \quad \forall x \in (0,\ 1)$ は，w_1 の性質から明らか．$y_1(x)$ が $(\mathrm{E})^2_D$ を満たすことも明らか．

(ii)

$$w_1(x) = -\,w_1(2T - x) \quad T \le x \le 2T$$

と定義すれば，$w_1(x)$ は $(\mathrm{E})^2_-$ の $(T,\ 2T)$ における解になっている．実際，つなぎ目の $x = T$ では

$$w_1'(T-0) = w_1'(T-0) = 1, \quad w_1'(T+0) = -\,w_1'(T-0) \times (-1) = 1$$
$$w_1(T-0) = w_1(T+0) = 0,$$
$$w_1''(T-0) = -\,|\,w_1\,|^\alpha\, w_1(T-0) = 0 = -\,|\,w_1\,|^\alpha\, w_1(T+0) = w_1''(T+0)$$

となり，二階微分まで連続につながっていることがわかる．初期値問題の解の一意性から，$w_1(x)$ が $(0,\ 2T)$ で一回符号を変える $(\mathrm{E})^2$ の解であることが示された．よって，y_2 は $(\mathrm{E})^2_D$ の一回符号を変える解となることがわかった．

(iii) 上と同じ手続きを施せば，$w_1(x)$ は $(0,\ (2n+1)T)$ で n 回符号を変える $(\mathrm{E})^2_-$ の解であることがわかる．よって

$$y_n(x) = (\,(2n+1)T\,)^{\frac{2}{1+\alpha}}\, w_1(\,(2n+1)T\,x)$$

と置けば，y_n は $(\mathrm{E})^2_D$ の n 回符号を変える解となることがわかる．

10. 明らかに $y_1(x) = 0,\ y_2(x) = \sin x$ はともに $y'' = -y$ を $\forall x \in [0,\ +\infty)$ で満たす．更に $y_1(0) = 0 = y_2(0), \quad y_1'(0) = 0 < y_2'(0) = 1$ であるが，$x = 3\pi/2$ では $y_1(3\pi/2) = 0 > y_2(3\pi/2) = -1$ となり，$(\mathrm{CP})_2$ を満たしていない事がわかる．

11.

(i) $y_1(x)$ が $y_1'' \le -(\alpha+\beta)y_1' - \alpha\beta y_1$ を満たせば，簡単な計算により $Y_1(x)$ は $Y_1{}'(x) + \beta(x)Y_1(x) \le 0$ を満たす．同様にして $Y_2{}'(x) + \beta(x)Y_2(x) \ge 0$ もわかる．また，初期値に関する条件 $y_1(x_0) \le y_2(x_0),\ y_1'(x_0) \le y_2'(x_0)$ より，$\alpha(x) \ge 0$ に注意すれば $Y_1(x_0) \le Y_2(x_0)$ が成り立つ．よって，比較定理 1.6 が適用され，$Y_1(x) \le Y_2(x) \quad \forall x \in [x_0, T)$ が導かれる．

(ii) $f(x, y) = -\,\alpha(x)\,y$ とおけば，$f(x, y)$ は $C^1(\mathbb{R}^2)$ に属するから，$\mathbb{R}^2$ で局所リプシッツ条件を満たす．
もし，$y_1(x_1) > y_2(x_1)$ となる $x_1 \in (x_0,\ T)$ が存在するとすれば，$z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ は $x \in [x_0,\ T)$ で連続であり，仮定より $z(x_0) \le 0$ をみたす．よって，補題 1.2 より，ある $x_2 \in [x_0,\ x_1)$ が存在して

$$z(x_2) = 0, \quad z(x) > 0 \quad \forall x \in (x_2,\ x_1].$$

となる．さらに $Y_1(x) \le Y_2(x)$ であったから

$$z'(x) \le f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))$$

となる．この両辺に $z(x) > 0$ $(x \in (x_2,\ x_1])$ をかけて $[x_2, x]$ $(x_2 < x \le x_1)$ 上で積分すれば，$f(x, y)$ の局所リプシッツ性から，適当な定数 L が存在して

$$| z(x)|^2 \le | z(x_2)|^2 + 2L\int_{x_2}^{x} | z(x)|^2\,dx \quad (x \in [x_2, x_1])$$

を満たす．よって，グロンウォールの不等式（補題 1.1）から $| z(x_1)|^2 \le | z(x_2)|^2 e^{2L(x_1-x_2)} = 0$ が結論され，仮定 $z(x_1) > 0$ に矛盾する．

(iii) $Z_i(x) = y_i{}'(x) + \beta(x) y_i(x)$, $(i = 1,\ 2)$ とおけば，(ii) と同様にして

$$Z_1{}'(x) + \alpha(x) Z_1(x) \le Z_2{}'(x) + \alpha(x) Z_2(x)$$

となる．さらに，初期値に対する仮定から $Z_1(x_0) \le Z_2(x_0)$ となるから，比較定理 1.6 が適用され，$Z_1(x) \le Z_2(x) \quad \forall x \in [x_0, T)$ が導かれる．よって，$f(x, y) = -\beta(x) y$ とおき， 上と同様の議論をくりかえせば，$y_1(x) \le y_2(x)$ が結論できる．

第 2 章

1. (1) $y(x) = C e^{\frac{1}{2}x^2}$

(2) $y(x) = \dfrac{1 + C|x|^{2A}}{1 - C|x|^{2A}}$

(3) $y(x) = C \sin x$

(4) $y(x) = C(e^x + e^{-x})$

(5) $q = 2$ のとき $y(x) = C e^x$ 一意的大域解

$1 < q < 2$ のとき $|y(x)| = (2-q)^{\frac{1}{2-q}}(x + C)^{\frac{1}{2-q}}$ 大域解

$2 < q$ のとき $|y(x)| = (q-2)^{\frac{-1}{q-2}}(C - x)^{\frac{-1}{q-2}}$ 一意的爆発解

(6) $q = 2$ のとき $y(x) = C e^{-x}$ 一意的大域解

$1 < q < 2$ のとき $|y(x)| = (2-q)^{\frac{1}{2-q}}(C - x)^{\frac{1}{2-q}}$ 一意的大域解，$x \ge C$ で $y(x) \equiv 0$ となる

$2 < q$ のとき $|y(x)| = (q-2)^{\frac{-1}{q-2}}(x + C)^{\frac{-1}{q-2}}$ 一意的大域解解

(7) $y(x) = C \log x$

(8) $\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + x^2} = C$

(9) $y(x) = -\sin(\sin^{-1} x + C)$

(10) $y(x) = -\tan(\tan^{-1} x + C)$

2. (1) $y(x) = x \log|x| + C x$

(2) $y^2 + 2xy - x^2 = C$

(3) $y^2 - 2xy - x^2 = C$

(4) $x \log|y| - y = C$

(5) $y(x) = x \sin^{-1}(\frac{1}{2}x^2 + C)$

(6) $(y-2)^2 + 2(x+1)(y-2) - (x+1)^2 = C$

(7) $y(x) = \dfrac{C x^2 - (C+1)x}{C x - 1}$

(8) $y(x) = -\dfrac{1}{x} \log(C - x)$

(9) $y\,(\,y+2\,x+2\,)=C$

(10) $y\,(\,x\,)=\log\,(\,\dfrac{x^2}{2}+C\,)$

3\. (1) $y\,(\,x\,)=C\,e^{-3x}+\dfrac{1}{10}\,(\,3\,\cos x+\sin x\,)$

(2) $y\,(\,x\,)=C\,x^2+x^2\,(\,x-1\,)\,e^x$

(3) $y\,(\,x\,)=C\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\log\left|\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right|$

(4) $y\,(\,x\,)=C\,e^{-\sin x}-2\,(\,1-\sin x\,)$

(5) $y\,(\,x\,)=C\,(\,x+1\,)+\dfrac{x^3}{4}\,(\,x+\dfrac{4}{3}\,)\,(x+1\,)$

(6) $y\,(\,x\,)=\dfrac{C}{\sin x}-\dfrac{\cos 2\,x}{2\,\sin x}$

(7) $y\,(\,x\,)=\dfrac{C}{x^2}+\dfrac{1}{27}\left[e^{3x}\,(\,9-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}\,)-e^{-3x}\,(\,9+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}\,)\right]$

(8) $y\,(\,x\,)=C\,\sin x-x+\dfrac{\sin x}{2}\,\log\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|$

(9) $y\,(\,x\,)=C\,x^2+x^2\,(\,e^x+\sin x-3\,x\,)$

(10) $y\,(\,x\,)=C\,e^{-\frac{R}{L}x}+\dfrac{V_0}{R^2+\omega^2\,L^2}\,(\,R\,\sin\omega\,x-\omega\,L\,\cos\omega\,x\,)$

4\. (1) $y\,(\,x\,)=(\,C\,x^4+4\,x^3\,)^{-\frac{1}{4}}$

(2) $y^2\,(\,x\,)=C\,e^{-x^2}+(\,x^2-1\,)$

(3) $y\,(\,x\,)=\dfrac{1}{C\,x+\log x+1}$

(4) $y\,(\,x\,)=\dfrac{1}{C\,e^{\sin x}+1}$

(5) $y\,(\,x\,)=\log\,(\,C\,e^{-x}+x^2-2\,x+2\,)$

(6) $y\,(\,x\,)=\cos^{-1}\left(C\,e^{\frac{x^2}{2}}+x+(\,\sqrt{e}-1\,)\,e^{\frac{x^2}{2}}\,\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$

(7) 特解は $y_1\,(\,x\,)=x+1,\ x-3,\quad y\,(\,x\,)=x+1+\dfrac{1}{C\,e^{-4x}-\frac{1}{4}}$

(8) 特解は $y_1\,(\,x\,)=\dfrac{1}{x},\ -\dfrac{2}{x},\quad y\,(\,x\,)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3\,x^2}{3\,C-x^3}$

(9) 特解は $y_1\,(\,x\,)=\cos x$

$$y\,(\,x\,)=\cos x+\frac{(\,1+\cos x\,)^2}{C-\cos x-\log\,(\,1-\cos x\,)^2}$$

(10) 特解は $y_1\,(\,x\,)=e^x\qquad y\,(\,x\,)=e^x+\dfrac{1}{C\,e^{-x}-1}$

5\. (1) $\dfrac{1}{2}\,x^2+x+x\,y-\dfrac{1}{3}\,y^3+3\,y=C$

(2) $\dfrac{1}{4}\,x^4+\dfrac{5}{2}\,x^2\,y^2+\dfrac{1}{2}\,y^4=C$

(3) $\dfrac{1}{2}x^2 - x\,y - \dfrac{1}{y} = C$

(4) $e^x \sin y + x\,e^{-y} = C$

(5) $e^x \sin y + x\,y^2 = C$

(6) $x^3 y^2 + \log|x| - \log|y| = C$

6. (1) 積分因子は $e^{-\frac{y^2}{2}}$ $\quad e^{-\frac{y^2}{2}}\,x\,y = C$

(2) 積分因子は e^x $\quad e^x(\sin y + x\,y) = C$

(3) 積分因子は $\dfrac{1}{y}$ $\quad x\,y + \log|y| = C$ または $y \equiv 0$

(4) 積分因子は e^x $\quad y(x) = \log|2\,e^x + C|$

(5) 積分因子は $\dfrac{1}{\sin x}$ $\quad y^3 \sin x = C$

(6) 積分因子は $\dfrac{1}{x^2}$ $\quad \sinh y = C\,x$

(7) 積分因子は $\dfrac{1}{y^3}$ $\quad x\,y + \dfrac{2\,x}{y^2} + y^2 = C$ または $y \equiv 0$

(8) 積分因子は $\dfrac{1}{x^2}$ $\quad \sin x + \dfrac{y}{x} = C$

第 3 章

1. (1) $x^4 \in C^2(\mathbb{R}^1)$ は明らか．さらに

$$\frac{d}{dx}(|x|^3 x) = 4|x|^3, \quad \frac{d^2}{dx^2}(|x|^3 x) = 12|x|x$$

となるから $|x|^3 x \in C^2(\mathbb{R}^1)$.

(2)

$$C_1 x^4 + C_2|x|^3 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

とすると，上式で $x = 1,\ -1$ とおけば，$C_1 + C_2 = 0,\quad C_1 - C_2 = 0$ を得るから，これより直ちに $C_1 = C_2 = 0$ が結論される．しかしながら，そのロンスキアンは

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} x^4 & |x|^3 x \\ 4x^3 & 4|x|^3 \end{vmatrix} = 4x^4|x|^3 - 4x^3|x|^3 x = 0$$

となる．

(3) (φ_1, φ_2) が，$\mathbb{R}^1$ における同じ二階線形微分方程式の解であるとすると，定理 3.2 より，そのロンスキアンは 0 とはならないから，これは上の事実に矛盾する．

2. (1)

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -P(x)\,y'_1(x) - Q(x)\,y_1(x) & -P(x)\,y'_2(x) - Q(x)\,y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -P(x)\,y'_1(x) & -P(x)\,y'_2(x) \end{vmatrix} = -P(x)\,W(x).$$

(2)　(i) の関係は，$W(x)$ に関する一階線形微分方程式であるから，これを解けば $W(x) = W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}}$ となるから，$W(x_0) = 0$ であれば $W(x) \equiv 0$, $W(x_0) \neq 0$ であれば $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ となる．

3. (1)　$y'' - (\alpha + \beta)\,y' + (\alpha + \beta)\,y = 0.$

(2)　$y'' - \dfrac{4}{x}\,y' + \dfrac{6}{x^2}\,y = 0.$

(3)　$y'' - \dfrac{x}{x-1}\,y' + \dfrac{1}{x-1}\,y = 0.$

(4)　$y'' - \dfrac{x\,\cos x}{x\,\sin x + \cos x}\,y' + \dfrac{\cos x}{x\,\sin x + \cos x}\,y = 0.$

4. (1)

$$y' = y'_1\,z + y_1\,z', \quad y'' = y_1{}''\,z + 2\,y_1{}'\,z' + y_1\,z''$$

を $L(y) = 0$ に代入して $L(y_1) = 0$ を使って整理すれば

$$L(y) = y''_1\,z + 2\,y'_1\,z' + y_1\,z'' + P\,y'_1\,z + P\,y_1\,z' + Q\,y_1\,z$$

$$= y_1\,z'' + (2\,y'_1 + P\,y_1)\,z' = 0$$

を得る．

(2)　上で求めた微分方程式は $w = z'$ に関する変数分離形の一階微分方程式であるから公式より

$$\int \frac{1}{w}\,dw = -\int (P(x) + \frac{2\,y'_1}{y_1})\,dx = -\int P(x)\,dx - 2\,\log|y_1(x)| + C$$

$$z'(x) = \frac{C_1\,e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}, \qquad z(x) = \int \frac{C_1\,e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_2$$

が得られる．

(3)　$C_1 = 1$ とおいて $y_2 = y_1\,z$ とすれば，$(y_1,\ y_2)$ のロンスキアンは

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1\,z \\ y'_1 & y'_1\,z + y_1\,z' \end{vmatrix}$$

$$= y_1^2\,z' = e^{-\int P(x)\,dx} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

となるから，$(\, y_1,\ y_2\,)$ は一次独立となり，基本解を与えることがわかる．

5.　以下では，常に $z' = p$ とおく．

(1)　基本解は $y_1(x) = x + 1,\quad y_2(x) = e^x$.

(2)　基本解は $y_1(x) = 2x + 3$ と

$$y_2(x) = -\Big(\frac{2x+2}{(2x+3)^2} + 1\Big)e^{2x} + \Big(\int \frac{2e^{2x}}{2x+3}\,dx\Big)(2x+3).$$

(3)　斉次方程式の基本解は $y_1(x) = x^2 - 1$ と

$$y_2(x) = (x^2 - 1)\int e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx - e^{\frac{1}{2}x^2}\,x.$$　特解は $y_0(x) = x$.

(4)　斉次方程式の基本解は $y_1(x) = x^2,\quad y_2(x) = x^2 \log|x|$.
特解は $y_0(x) = \dfrac{1}{4}$.

(5)　斉次方程式の基本解は $y_1(x) = x,\quad y_2(x) = x^2 - 1$.
特解は $y_0(x) = \dfrac{1}{2}$.

6.

$$y' = e^{-\frac{1}{2}\int P(\xi)d\xi}\,\Big(z' - z\,\frac{1}{2}P(x)\Big)$$

$$y'' = e^{-\frac{1}{2}\int P(\xi)d\xi}\,\Big(z'' - z'P(x) - \frac{1}{2}zP'(x) + \frac{1}{4}zP^2(x)\Big)$$

を $L(y) = R(x)$ に代入し整理すると

$$L(y) = e^{-\frac{1}{2}\int P(\xi)d\xi}\,\Big(z'' - \frac{1}{2}zP'(x) - \frac{1}{4}zP^2(x) + Q(x)z\Big) = R(x)$$

を得る．よって

$$\tilde{Q}(x) = -\frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x) + Q(x),\quad \tilde{R}(x) = e^{\frac{1}{2}\int P(\xi)d\xi}R(x)$$

となる．

7. (1)　$y(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(A\,e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + B\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}\right)$.

(2)　$y(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}\,(Ax + B)$.

(3)　$y(x) = x\left(A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x + \dfrac{1}{2}\right)$.

(4)　$y(x) = e^{x^2}\left(A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x + \dfrac{1}{2}x\right)$.

8.

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = e^{-\int P(\xi)d\xi}\,\frac{d}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(e^{-\int P(\xi)d\xi}\,\frac{d}{dt}\Big) = -P(x)\,e^{-\int P(\xi)d\xi}\,\frac{d}{dt} + \Big(\frac{dt}{dx}\Big)^2\frac{d^2}{dt^2}$$

であるから，$L(y)$ に代入すれば

$$L(y) = -P(x)\,e^{-\int P(\xi)d\xi}\,\frac{dz}{dt} + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2z}{dt^2} + P(x)\,e^{-\int P(\xi)d\xi}\,\frac{dz}{dt} + Q\,z$$

$$= \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \frac{d^2z}{dt^2} + Q\,z = R$$

を得る．これが題意の方程式となる．

9. (1) $y(x) = A\cos\dfrac{2}{x} + B\sin\dfrac{2}{x}$.

(2) $y(x) = A\cos(\sqrt{2}\,e^x) + B\sin(\sqrt{2}\,e^x)$.

(3) $y(x) = A\,e^{\sin x} + B\,e^{-\sin x} + \sin^2 x + 1$.

(4) $y(x) = A\cos(\log x^2) + B\sin(\log x^2) + \dfrac{1}{4}\log x$.

10. (1) 固有値は $\lambda_n = n^2,\quad n \in \mathbb{N}$,

λ_n に対する固有関数は $y_n(x) = B\sin n\,x$ （B は任意定数）.

(2) 固有値は $\lambda_n = (n-1)^2,\quad n \in \mathbb{N}$,

λ_n に対する固有関数は $y_n(x) = A\cos(n-1)\,x$ （ A は任意定数 ）.

(3) 固有値は $\lambda_n = (n-\frac{1}{2})^2$,

λ_n に対する固有関数は $y_n(x) = B\sin(n-\frac{1}{2})\,x$ （B は任意定数）.

(4) 固有値は $\lambda_n = 4(n-1)^2,\quad n \in \mathbb{N}$,

λ_n に対する固有関数は $y_n(x) = A\cos 2(n-1)\,x + B\sin 2(n-1)\,x$

（ $A,\ B$ は任意定数 ）.

第 4 章

1. (1) $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x} - \dfrac{1}{2}\,e^x + \dfrac{1}{20}(\cos 2x - 3\sin 2x)$

(2) $y(x) = C_1\,e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\,e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2 - x - 1$
$\qquad + (2-x)\cos x - \sin x$

(3) $y(x) = C_1\,e^x\cos\sqrt{2}\,x + C_2\,e^x\sin\sqrt{2}\,x + e^x\cos x$

(4) $y(x) = C_1\,e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\,e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$\qquad + e^x(\cos x + (x-2)\sin x)$

(5) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{x}{2}\cos x$

$$+\sin x\int\cos x\,\log x\,dx - \cos x\int\sin x\,\log x\,dx$$

(6) $y(x) = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x$

$$-\frac{1}{125}\Big((15x+22)\cos 2x + 20(x+1)\sin 2x\Big)$$

(7) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$

(8) $y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$

$$+e^x \left(\frac{x^4}{4} \cos x + \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x \right) \sin x \right)$$

(9) $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x \right) e^x$

(10) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$$\frac{1}{4} \left(\left(-\frac{1}{3} x^3 + x \right) \cos 2x + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x \right)$$

2. (1) $y(x) = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + \frac{1}{2} e^x$

$$+\frac{1}{8} \left(\frac{10x-3}{25} \cos 2x - \frac{20x+9}{100} \sin 2x \right)$$

(2) $y(x) = C_1 + e^{2x} (C_2 + C_3 x) + \frac{1}{24} e^{2x} (x^4 - 2x^3 + 3x)$

(3) $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

$$+\frac{1}{3} e^x - \frac{1}{2} (\cos x + \sin x)$$

(4) $y(x) = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 + C_3 x) + \frac{3x^3 - 3x^2 - 7x}{27} e^x$

(5) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{10} (2 \sin x + \cos x)$

$$+\frac{1}{6} e^{-x} \int e^x \log x \, dx - \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} \log x \, dx + \frac{1}{3} e^{2x} \int e^{-2x} \log x \, dx$$

(6) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\omega^+ x} + C_3 e^{\omega^- x} - e^x \int e^{-x} f(x) \, dx$

$$+\frac{5+\sqrt{5}}{10} e^{\omega^+ x} \int e^{-\omega^+ x} f(x) dx + \frac{5-\sqrt{5}}{10} e^{\omega^- x} \int e^{-\omega^- x} f(x) dx$$

ここで $\omega^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(7) $y(x) = e^{-x} (C_1 + C_2 x) + e^x (C_3 + C_4 x) + \frac{1}{24} e^x (x^3 - 3x^2)$

(8) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

$$-\frac{3}{8} x^2 \cos x + \left(-\frac{1}{12} x^3 + \frac{5}{8} x \right) \sin x$$

(9) $y(x) = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 + C_4 x) + \frac{1}{2} x^2 e^x$

(10) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_4 e^{2x} - \frac{1}{12} e^{-2x} \int e^{2x} f(x) dx$

$$+\frac{1}{2} e^{-x} \int e^x f(x) dx - \frac{1}{6} e^x \int e^{-x} f(x) dx - \frac{1}{12} e^{2x} \int e^{-2x} f(x) dx$$

3. (1) $y(x) = C_1 |x| + C_2 |x|^3$

(2) $y(x) = |x|^n (C_1 + C_2 \log |x|)$

(3) $y(x) = C_1 |x-1| + C_2 (x-1)^2$

(4) $y(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log |x| \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log |x| \right) \right)$
$+ \log |x| - 1$

(5) $y(x) = C_1 |x+1| + C_2 |x+1|^3 + \frac{1}{3}(x+1)^2 + (x+1) \log |x+1| + \frac{1}{3}$

4. (1) $y(x) = e^{6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$,
$z(x) = e^{6x} \big((C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x \big)$

(2) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{3} e^{2x}$
$z(x) = C_1 e^{-x} - \frac{3}{2} C_2 e^{4x} + \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{6} e^{2x}$

(3) $y(x) = C_1 \cos \sqrt{2}\, x + C_1 \sin \sqrt{2}\, x - 2 \sin x - 4 \cos x$
$z(x) = \sqrt{2}\, C_2 \cos \sqrt{2}\, x - \sqrt{2}\, C_1 \sin \sqrt{2}\, x - \cos x + \frac{9}{2} \sin x$

(4) $z(x) = C_1 + C_2 \cos \sqrt{3}\, x + C_3 \sin \sqrt{3}\, x$
$y(x) = C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + \sqrt{3} C_3) \cos \sqrt{3} x + \frac{1}{2}(-C_3 + \sqrt{3} C_2) \sin \sqrt{3} x$
$w(x) = C_1 - \frac{1}{2}(C_2 - \sqrt{3} C_3) \cos \sqrt{3} x - \frac{1}{2}(C_3 + \sqrt{3} C_2) \sin \sqrt{3} x$

(5) $y(x) = C_1 + e^{-3x} (C_2 + C_3 x)$
$z(x) = C_1 + e^{-3x} (C_3 - 2 C_2 - 2 C_3 x)$
$w(x) = \frac{1}{4} C_1 + e^{-3x} (C_2 - C_3 + C_3 x)$

5. (1) (N1) $A = 0$ ならば $||A|| = 0$ は明らか．$||A|| = 0$ ならば，$0 \le |a_{i,j}| \le ||A|| = 0$ であるから $a_{i,j} = 0 \quad \forall i, j$ となり $A = 0$.

(N2) $||\lambda A|| = \sum_{i,j=1}^m |\lambda a_{i,j}| |\lambda| \sum_{i,j=1}^m |a_{i,j}| = |\lambda| \, ||A||$

(N3) $B = (b_{i,j})$ とおけば，$A + B$ の (i, j) 成分は $a_{i,j} + b_{i,j}$ であり $|a_{i,j} + b_{i,j}| \le |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$ となるから

$$||A+B|| = \sum_{i,j=1}^m |a_{i,j}+b_{i,j}| \le \sum_{i,j=1}^m |a_{i,j}| + \sum_{i,j=1}^m |b_{i,j}| \le ||A|| + ||B||$$

(I1) AB の (i, j) 成分 $c_{i,j}$ は $c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$ で与えられる．よって $\sum_{i=1}^m |a_{i,k}| \le ||A|| \quad \forall k$ に注意すれば

$$||AB|| = \sum_{i,j=1}^m |c_{i,j}| \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |a_{i,k}| |b_{k,j}|$$
$$\le ||A|| \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m |b_{k,j}| = ||A|| \, ||B||.$$

(I2)　$\mathbf{X} = {}^t(\,x_1, \cdots, x_m\,)$, $\mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} = {}^t(\,y_1, \cdots, y_m\,)$ とおいて，$\sum_{i,j}^m |\,a_{i,k}\,|^2 \le \Big(\,\sum_{i,j}^m |\,a_{i,k}\,|\,\Big)^2$ に注意すれば

$$|| \,A\,\mathbf{X}\,||_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{k=1}^m |\,y_k\,|^2 = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m a_{k,j}\,x_j\,\Big)^2$$

$$\le \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m |\,a_{k,j}\,|^2 \sum_{j=1}^m |\,x_j\,|^2 \Big(\,\sum_{i,j}^m |\,a_{i,k}\,|\,\Big)^2 \,||\,\mathbf{X}\,||^2 = ||\,A\,||^2\,||\,\mathbf{X}\,||^2$$

(2)　まず (I2) より　$||\,A^k\,|| \le ||\,A\,||^k$ が成り立つ．従って (N3) より

$$||\sum_{k=\mu}^{\nu} \frac{1}{k\,!}\,A^k\,|| \le \sum_{k=\mu}^{\nu} \frac{1}{k\,!}\,||\,A\,||^k \le \sum_{k=\mu}^{\nu} \frac{1}{k\,!}\,||\,A\,||^k.$$

(3)　$S_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{k\,!}\,A^k$ とおくと，$\{\,S_n\mathbf{X}\,\}$ が $\mathbb{R}^m$ でのコーシー列となることがわかれば，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\,\mathbf{X} = e^A\,\mathbf{X}$ の存在を示すことができる．実際，(I2)-(I3) より

$$||\,S_n\mathbf{X} - S_m\mathbf{X}\,||_{\mathbb{R}^m} = ||\sum_{n+1}^m \frac{1}{k\,!}\,A^k\,\mathbf{X}\,||_{\mathbb{R}^m} \le ||\sum_{n+1}^m \frac{1}{k\,!}\,A^k\,||\,||\,\mathbf{X}\,||_{\mathbb{R}^m}$$

$$\le \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k\,!}\,||\,A\,||^k\,||\,\mathbf{X}\,||_{\mathbb{R}^m}.$$

ここで，$e^{||\,A\,||}$ は収束するから，$\sum_{n+1}^m \frac{1}{k\,!}||A||^k \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ となり，$\{\,S_n\mathbf{X}\,\}$ が $\mathbb{R}^m$ でのコーシー列となることがわかった．
さらに，$\mathbf{Y}_n(\,x\,) = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{k\,!}\,(\,x\,A\,)^k\,\mathbf{Y}_0$ とおけば，A を $x\,A$ でおきかえて，上と同じ議論をすれば

$$\mathbf{Y}_n(\,x\,) \to \mathbf{Y}\,(\,x\,) = e^{xA}\,\mathbf{Y}_0$$

が得られる．ここで，

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{Y}_n(\,x\,) = A\,\mathbf{Y}_{n-1}(\,x\,)$$

であるから，これを $(\,0,\ x\,)$ で積分して，$n \to \infty$ とすれば

$$\mathbf{Y}\,(\,x\,) = \mathbf{Y}_0 + A\int_0^x \mathbf{Y}\,(\,\xi\,)\,d\xi.$$

また $x = 0$ を代入すれば $\mathbf{Y}\,(\,0\,) = \mathbf{Y}_0$ も得られる．

(4)　(3) で示した事実は　$\dfrac{d}{dx}\,e^{xA} = A\,e^{xA}$　を示している．同様の議論によって　$\dfrac{d}{dx}\,e^{(a-x)A} = -\,A\,e^{(a-x)A}$　(　a　定数) も示される．よって

$$\frac{d}{dx}\,\Big(\,e^{xA}\,e^{(a-x)A}\,\Big) = A\,e^{xA}\,e^{(a-x)A} - \,e^{xA}\,A\,e^{(a-x)A} = 0$$

が得られる．ここで，$A\,e^{xA} = e^{xA}\,A$ （ A と e^{xA} が可換 ）であることを使った．以上から

$$e^{xA}\,e^{(a-x)A} = e^{0A}\,e^{(a-0)A} = e^{aA}.$$

ここであらためて，$a = x_1 + x_2,\ x = x_1$ とおけば，指数法則

$$e^{x_1 A}\,e^{x_2 A} = e^{0A}\,e^{(a-0)A} = e^{(x_1+x_2)A}.$$

が得られる．よって，指数公式，微分公式によって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\mathbf{Y}(x) &= A\,e^{xA}\,\mathbf{Y}_0 + e^{(x-x)A}\,\mathbf{F}(x) + \int_0^x \frac{d}{dx}\,e^{xA}\,e^{(-s)A}\,\mathbf{F}(s)\,ds \\ &= A\,e^{xA}\,\mathbf{Y}_0 + \mathbf{F}(x) + A\int_0^x e^{xA}\,e^{(-s)A}\,\mathbf{F}(s)\,ds \\ &= A\,\mathbf{Y}(x) + \mathbf{F}(x)\end{aligned}$$

となる．さらに，$\mathbf{Y}(0) = e^{0A}\,\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_0$ であるから，(IVO) の解の一意性から，$\mathbf{Y}(x)$ が求める解となる．

6. (1)　与式は

$$\begin{cases} y' = y - 2z + e^x \\ z' = -3y + 2z + e^x \end{cases}$$

となるから，$\mathbf{Y} = {}^t(y,\ z)$,　$\mathbf{F}(x) = {}^t(e^x,\ e^{2x})$,
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば (IVP) に帰着される．

(2)　A の特性多項式は

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$$

となるから，固有値は $\lambda = -1,\ 4$ となる．
$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ その逆行列は $U^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(3)

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{Z}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{Z} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^x + 2e^{2x} \\ e^x - e^{2x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} z_0 + \dfrac{3}{10}e^x + \dfrac{2}{15}e^{2x} - \dfrac{13}{30}e^{-x} \\ e^{4x} z_1 - \dfrac{1}{15}e^x + \dfrac{1}{10}e^{2x} - \dfrac{1}{30}e^{4x} \end{pmatrix},$$

ここで $\mathbf{Z}_0 = {}^t(z_0,\ z_1)$.

(4)

$$y^1(x) = (z_0 - \frac{13}{30})e^{-x} + (2z_1 - \frac{1}{15})e^{4x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{3}e^{2x},$$

$$y^2(x) = (z_0 - \frac{13}{30})e^{-x} + (-3z_1 + \frac{1}{10})e^{4x} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{2x}.$$

第 5 章

1. 以下 $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき，その収束半径を R とする．特に，$a_0 = y(0)$，$a_1 = y'(0)$ とする．

(1) $y(x) = \dfrac{1}{4}(3 + 4a_0)e^{2x} - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$，$\quad R = \infty$

(2) $y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$，$\quad R = \infty$

(3) $\alpha_n = a_n n!$ とおくと，$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} - 2\alpha_n = 1$ が得られる．さらに，$A_n = \alpha_{n+1} + \alpha_n$ と置くと，$A_n = 2A_n + 1$ が導かれる．これを解いて

$$a_n = \frac{6a_0 + (2^n - 2)(a_0 + a_1 + 1)}{6n!} \quad (n \geq 2), \quad R = \infty.$$

(4) $y(x) = \dfrac{a_0}{1 - x^2}$，$\quad R = 1.$

(5) $a_{2m} = (-1)^m \dfrac{2m+1}{2^m m!} a_0$，$\quad a_{2m+1} = (-1)^m \dfrac{2^m (m+1)!}{(2m+1)!} a_1$，$R = \infty.$

(6) $a_{3m} = (-1)^m \dfrac{1}{(3m)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (3k-2)^2 a_0,$

$a_{3m+1} = (-1)^m \dfrac{1}{(3m+1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (3k-1)^2 a_1,$

$a_{3m+2} = 0$，$\quad R = \infty.$

(7) $a_{2m} = -\dfrac{1}{2m-1} a_0$，$\quad a_{2m+1} = 0 \quad m \geq 1$，$\quad a_1$ は任意，$R = 1.$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} = \alpha$ であるから

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } |c_n - \alpha| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N \qquad (*5.1)$$

が成り立つ． よって，$b_n = (c_n + c_{n-1} + \cdots + c)/n$ とおけば，$(*5.1)$ より

$$|b_n - \alpha| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - \alpha}{n}| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |\frac{c_k - \alpha}{n}| + \sum_{k=N}^{n} |\frac{c_k - \alpha}{n}|$$

$$\leq \frac{M_N + |\alpha|}{n} + \varepsilon/2 < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_1$$

$$M_N = \max_{1 \leq k \leq N-1} |c_k|, \quad N_1 = \max\{N, \frac{2(M_N + |\alpha|)}{\varepsilon}\}$$

となり $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が示された．

反例として $c_n = (-1)^n$ と取ればよい．実際，この数列自身は明らかに振動発散する．一方 $b_{2m} = 0$，$b_{2m+1} = -1/n$ であるから，明らかに $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ となる．

3. (1)　$f'(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}e^{-\frac{1}{1-x^2}}$,　であるから $k=1$ の時には成り立っている．また $Q_k(x)=R_k(x)/P_k(x)$,　$P_k(x)=(1-x^2)^{2^k}$ と表されることもわかる．$k=k$ のときに成り立っているとすると

$$f^{(k+1)}(x)=e^{-\frac{1}{1-x^2}}\Big(\frac{R_k{}'P_k-R_kP_k{}'}{(1-x^2)^{2^{k+1}}}-\frac{R_k}{P_k}\frac{2x}{(1-x^2)^2}\Big)$$
$$=\frac{R_k{}'P_k-R_kP_k{}'-R_k\,2x\,(1-x^2)^{2^k-2}}{(1-x^2)^{2^{k+1}}},$$

となり

$$\begin{aligned}\deg R_k{}'P_k&=2^{k+1}-k-3+2^{k+1}=2^{k+2}-(k+1)-2\\ \deg R_kP_k{}'&=2^{k+1}-k-2+2^{k+1}-1=2^{k+2}-(k+1)-2\\ \deg R_k\,2x\,(1-x^2)^{2^k-2}&=2^{k+1}-k-2+2^{k+1}-3\\ &\le 2^{k+2}-(k+1)-2\end{aligned}$$

であるから，題意が示された．

(2)　$f^{(k)}(\pm1\pm0)=0$ は明らか．$x\to\pm1\mp0$ の時は $0\times\infty$ の不定形になるが，任意の m に対して $n>m$ を満たす n をとれば

$$\frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^m}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1-x^2}+\cdot+\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{(1-x^2)^n}+\cdots}\frac{1}{(1-x^2)^m}$$
$$\le\frac{n!(1-x^2)^n}{(1-x^2)^m}\to0\quad x\to\pm1\mp0.$$

即ち，$f(x)$ は $x=\pm1$ で任意階数の微分が連続につながっているから，$f\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ が結論された．

(3)　上で確かめたように $f^{(n)}(\pm1)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$ であったから，$x=\pm1$ で実解析的であるとすると

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\pm1)}{n!}(x-\pm1)^n=0\quad\forall x\in(\pm1-R_\pm,\ \pm1+R_\pm)$$

とならなければならない（$R_\pm$ は $f(x)$ の $x=\pm1$ での収束半径）．しかしながら，これは $f(x_1^\pm)>0$,　$x_1^\pm=\pm1\mp\delta$, $\delta=\min\{R_\pm,\ 1\}$ に矛盾する．

4. (1)　(5.53) 式に (5.52) 式を代入して，直交性 (5.51) を使えば

$$d_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}d_kP_k(x)\Big)P_n(x)dx=\frac{2n+1}{2}d_n\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx.$$

これから直ちに，第一の関係が導かれる．

p.157 で述べられているように x^k は，k 次までのルジャンドル多項式の一次結合で表されるから

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} d_j\, P_j(\,x\,).$$

一方，(5.53) 式は，ルジャンドル多項式による展開 (5.52) の一意性を保証している．よって，x^k のルジャンドル多項式による展開の $n \geq k+1$ に対する係数 d_n はすべて 0 になることを意味している．これから，第二式が導かれる．

(2)　$g\,(\,x\,) = (\,x^2 - 1\,)^n$ とおく．まず

$$\frac{d^k}{dx^k}\, g\,(x) = \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j\, \frac{d^j}{dx^j}\,(x-1)^n\, \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\,(x+1)^n \quad 1 \leq k \leq n-1$$

から，$g^{(k)}\,(\pm 1) = 0 \quad \forall k \leq n-1$ となる事に注意する．$g\,(\,-1\,) = g\,(\,1\,) = 0$ であるから，ロルの定理から $g\,'(\,x_1^1\,) = 0$ となる $-1 < x_1^1 < 1$ が存在する．よって $g'\,(\,-1\,) = g\,(x_1^1) = g'\,(1) = 0$ となるから，g のロルの定理を適用すれば $g'(\,x_1^2\,) = g'(x_2^2) = 0$ となる $-1 < x_1^2 < x_1^1 < x_2^2 < 1$ が存在する．この操作を n 回続ければ，$g^{(n)}\,(\,x_1^n\,) = \cdots = g^{(n)}\,(\,x_n^n\,) = 0$ となる

$$-1 < x_1^n < x_1^{n-1} < x_2^n < x_2^{n-1} < \cdots < x_{n-1}^{n-1} < x_n^n < 1$$

が存在する．よって，ロドリーグの公式より，n 次多項式である $P_n(\,x\,)$ は，相異なる実数解 $-1 < x_1^n < x_2^n < \cdots < x_n^n < 1$ を持つことがわかった．代数学の基本定理から $P_n(\,x\,) = 0$ は重複度を込めて n 個の解を持つから，これらは皆，重複度 1 の解となる事もわかる．

(3)　$\dfrac{d^n}{dy^k}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-y}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{2}\,\cdots\,\dfrac{2\,k-1}{2}\,(\,1-y\,)^{-\frac{2\,k+1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-y}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(\,2\,k-1\,)}{2^k\,k\,!}\,y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\,2\,k-1\,)\,!}{2^{2k-1}\,(\,k-1\,)\,!\,k\,!}\,y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\,2\,k\,)\,!}{2^{2\,k}\,(\,k\,!\,)^2}\,y^k\end{aligned}$$

となる．これに $y = 2\,t\,x - t^2$ を代入し，二項展開公式を使えば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2\,t\,x+t^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\,2\,k\,)\,!}{2^{2\,k}\,(\,k\,!\,)^2}\,(\,2\,t\,x - t^2\,)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\,2\,k\,)\,!}{2^{2\,k}\,(\,k\,!\,)^2}\,\sum_{j=0}^{k} {}_kC_j\,(\,-\,t^2\,)^j\,(\,2\,t\,x\,)^{(k-j)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\,2\,k\,)\,!}{2^{2\,k}\,(\,k\,!\,)^2}\,\sum_{j=0}^{k} (-1)^j\,\frac{2^{k-j}\;k\,!}{j\,!\,(\,k-j\,)\,!}\,x^{k-j}\,t^{k+j}\end{aligned}$$

となる．ここで，$n = k + j$ とおけば $0 \leq j \leq k = n - j$ であったから，j は $0 \leq j \leq n/2$ を動く自然数となる事に注意して上記の和を書き直せば

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-2j)!(n-j)!}x^{n-2j}$$

を得る．これは (GL) の成立を意味している．

(4) $z(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ とおけば $z_t(t,x)=-(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}(t-x)$ となるから，この両辺に $(1-2tx+t^2)$ をかければ

$$(1-2tx+t^2)z_t(t,x)+(t-x)z(t,x)=0.$$

これに z の展開式 (GL) を代入すれば

$$0=(1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\Big\{(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)\Big\}.$$

これはボネの漸化式の成立を意味している．

5. (1)

$$y'(x)=-mx(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}z+(1-x^2)^{\frac{m}{2}}z'$$

$$y''(x)=(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}\Big((1-x^2)z''-2mxz'-mz+m(m-2)x^2(1-x^2)^{-1}z\Big)$$

であるから，これを $(\mathrm{AL})_n^m$ に代入すると

$$(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}\Big[(1-x^2)z''-2mxz'-mz+m(m-2)x^2(1-x^2)^{-1}z-2xz'+2mx^2(1-x^2)^{-1}z+n(n+1)z-m^2(1-x^2)^{-1}z\Big]=0.$$

$1-x^2\neq 0 \quad \forall x\in(-1,1)$ であるから，これを整理して

$$(1-x^2)z''-2(m+1)xz'+[n(n+1)-m(m+1)]z=0$$

を得る．

(2) $y_k=y^{(k)}$ とおけば y_k は

$$(1-x^2)y_k''-2(k+1)xy_k'+[n(n+1)-k(k+1)]y_k=0 \quad (*5.2)_k$$

を満たす．実際 (5.44) を一回微分すれば

$$(1-x^2)y_1''-2xy_1'-2xy_1'-2y_1+n(n+1)y_1=0$$

となるから，$(*5.2)_1$ を満たす．$k=k$ に対して $(*5.2)_k$ が成り立つとすれば，$(*5.2)_k$ を一回微分して

$$(1-x^2)y_{k+1}''-2xy_{k+1}'-2(k+1)xy_{k+1}'-2(k+1)y_{k+1}+[n(n+1)-k(k+1)]y_{k+1}=0$$

を得る．これは $(*5.2)_{k+1}$ の成立を意味している．よって，$(*5.2)_k$ が示された．従って，$k=m$ とすれば，$(*5.2)_m$ は $(\mathrm{T})_n^m$ と一致するから，$z=\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ は $(\mathrm{T})_n^m$ の解となる事がわかった．

(3)　上の (1) と (2) の事実から，$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ $(m = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ が $(\mathrm{AL})_n^m$ の解となる事がわかった．$(\mathrm{AL})_n^m$ は線形の方程式であるから，$P_n^{-m}(x) = (-1)^m\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)$ $(m = 1,\ \cdots,\ n)$ も $(\mathrm{AL})_n^m$ の解となる事がわかる．
（実は，ロドリーグの公式から

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n\,n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(1-x^2)^n \quad (m = 0,\ 1,\ \cdots,\ n) \quad (*5.3)$$

とも表されるから，この関係で負の $-m = -1,\ \cdots,-n$ に対して $P_n^{-m}(x)$ を定義すれば，これが $(-1)^m\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)$ に一致することが示せる.）

6. (1)　$P_n^m(x)$ を $(*5.3)$ の公式より求めて定義式に代入すればよい．実際，次を得る．

$$Y_{0,0}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad Y_{1,0}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,-1}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,e^{-i\phi}\sin\theta,$$

$$Y_{1,1}(\theta,\ \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,e^{i\phi}\sin\theta,$$

$$Y_{2,0}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_{2,-1}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,e^{-i\phi}\sin\theta\,\cos\theta,$$

$$Y_{2,1}(\theta,\ \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,e^{i\phi}\sin\theta\,\cos\theta,$$

$$Y_{2,-2}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,e^{-2i\phi}\sin^2\theta,$$

$$Y_{2,1}(\theta,\ \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,e^{2i\phi}\sin^2\theta$$

(2)　$\dfrac{d}{dx} = -\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}$ 及び $(1-x^2)y'' - 2xy' = \{\sin^2\theta\,y'\}'$ に注意すれば

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\{\sin\theta\,\frac{dw}{d\theta}\}$$

が得られる．さらに，$1-x^2 = \sin^2\theta$ を代入すれば題意の式が得られる．

(3)　5. (3) と 6. (2) から $Y_{n,m}(\theta,\ \phi)$ は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dY_{n,m}}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]Y_{n,m} = 0 \quad (*5.4)$$

満たす．一方

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}Y_{n,m} = -\frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

であるから，これを (∗5.4) に代入すれば，題意の式が得られる．

第 6 章

1. 以下，特性方程式の解を λ_1, λ_2 で，解の収束半径を R で表す．

(1) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2},\ R = +\infty$

$$y_1(x) = |x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{(2n+1)!}x^n, \quad y_2(x) = |x|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\,n!}x^n.$$

(2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = 0,\ R = +\infty$

$$y_1(x) = |x|^{\frac{1}{2}}, \quad y_2(x) = x+1.$$

(3) $\lambda_1 = 1+i,\ \lambda_2 = 1-i,\ R = 1$

$$y_1(x) = \frac{|x|}{1-x}\cos(\log|x|), \quad y_2(x) = \frac{|x|}{1-x}\sin(\log|x|).$$

(4) $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ R = 1$ （但し，$x = 0$ は除く）

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x}\cos(\log|x|), \quad y_2(x) = \frac{1}{1-x}\sin(\log|x|).$$

(5) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ R = 1$

$$y_1(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \quad y_2(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\log|x| - \frac{x^3}{(1-x)^2}.$$

(6) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ R = +\infty$

$$y_1(x) = x^2e^{2x},$$

$$y_2(x) = 2\frac{x}{|x|}x^2e^{2x}\log|x| - |x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n h_{n-1}}{(n-1)!}x^n, \ h_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.$$

(7) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ R = 1$

$$y_1(x) = x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = \frac{x^4}{(1-x)^3},$$

$$y_2(x) = \frac{x^4}{(1-x)^3}\log|x| + |x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(3n-5)}{4}x^n.$$

2. (1)　$(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n$ に注意すれば，公式より

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma ; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n-1)!(\gamma)_n} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_n \beta(\beta+1)_n}{n! \gamma(\gamma+1)_n} x^n$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1 ; x).$$

(2)　$\alpha = -m$ のとき，$(\alpha)_n = 0 \quad \forall n \geq m+1$ であることから明らか.

(3)

$$F(-n, \beta, \beta ; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-x)^k 1^{(n-k)} = (1-x)^n.$$

$(1)_k = k!$, $(2)_k = (k+1)!$ であるから

$$n\,x\,F(1-n, 1, 2 ; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(1-n)_k (1)_k}{k!(2)_k} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k (-x)^k 1^{(n-k)} = -(1-x)^n + 1.$$

(4)　$(1)_k = k!$ であるから

$$F(\alpha, 1, \alpha ; x) = F(1, \beta, \beta ; x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

(5)　$(1)_k = k!$, $(2)_k = (k+1)!$ と p.145 の (4) の公式で $x_0 = 0$ としたものから

$$x\,F(1, 1, 2 ; -x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \log(1+x).$$

(6)　まず，次の公式を確認しておこう．

$$\sin^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| \le 1)$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad (|x| \le 1)$$

ここで

$$(\tfrac{1}{2})_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2} = \frac{(2k)!}{2^k\, 2k\cdot(2k-2)\cdots 2} = \frac{(2k)!}{(2^k)^2\, k!}$$

$$(\tfrac{3}{2})_k = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k+1}{2} = \frac{2k+1}{2}\, 2\,(\tfrac{1}{2})_k = (2k+1)(\tfrac{1}{2})_k$$

に注目すれば

$$x\,F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\,;\; x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k)^2\, k!\,k!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \sin^{-1} x$$

$$x\,F(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}\,;\; -x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{k!\,(2k+1)} (-1)^k x^{2k+1} = \tan^{-1} x.$$

3. (1)　$y_1(x) = F(2,\ -1,\ \tfrac{1}{2}\,;\ x),$

$y_2(x) = |x|^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{5}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}\,;\ x).$

(2)　$y_1(x) = F(1,\ -1,\ -\tfrac{1}{2}\,;\ x) = 2x+1,$

$$y_2(x) = |x|^{\frac{3}{2}} F(\tfrac{5}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}\,;\ x) = |x|^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k)^2 (k!)^2} x^k.$$

(3)　$y_1(x) = F(2,\ 1,\ \tfrac{1}{3}\,;\ x),$

$y_2(x) = |x|^{\frac{2}{3}} F(\tfrac{8}{3},\ -\tfrac{5}{3},\ \tfrac{5}{3}\,;\ x).$

(4)　$y_1(x) = F(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1\,;\ x),$

$y_2(x) = y_1(x)\,\log|x| + F_1(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1\,;\ x),$

$$F_1(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1\,;\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{(2^n)^4 (n!)^4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(2k+1)(k+1)} x^n.$$

(5)　$y_1(x) = F(1,\ 1,\ 2\,;\ x) = -\dfrac{\log(1-x)}{x},$

$y_2(x) = y_1(x)\,\dfrac{x}{|x|}\,\log|x| + F_1(1,\ 1,\ 2\,;\ x),$

$$F_1(1,\,1,\,2\,;\,x) = |\,x\,|^{-1}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}\,x^n\Big].$$

(6) $\quad y_1(x) = |\,x\,|\,F(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,2\,;\,x),$

$$y_2(x) = y_1(x)\,\frac{x}{|\,x\,|}\,\log|\,x\,| + F_2(x),$$

$$F_2(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((2n)!)^2\{4h_{2n-1} - 2h_{n-1} - h_n - h_{n+1} + 1\}}{(2^n)^4(n!)^3(n+1)!}\,x^n.$$

(7) $\quad y_1(x) = |\,x\,|\,F(2,\,\frac{4}{3},\,2\,;\,-x),$

$$y_2(x) = y_1(x)\,\frac{-x}{|\,x\,|}\,\log|\,x\,| + F_2(x),$$

$$F_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{4}{3})_n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(4k+3)(k+1)}\,x^n.$$

4. ガンマ関数の無限乗積表示

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x), \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x\,n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

を対数微分して，$x = 1$ を代入し $n \to \infty$ とすれば

$$\frac{\Gamma_n{}'(x)}{\Gamma_n(x)} = \log n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k},$$

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \lim_{n\to\infty}\Big(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\Big) = -\gamma.$$

$\Gamma(1) = 1$ であったから，これから $\Gamma'(1) = -\gamma$ を得る．
また，公式 (6.48) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ を対数微分すれば

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}.$$

これに $s = n$ を代入して，その関係を使って階数を降下させれば

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = h_n - \gamma.$$

以上から

$$\frac{d}{ds}\,\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=1} = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)^2} = -\Gamma'(1) = \gamma,$$

$$\frac{d}{ds}\,\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=n+1} = -\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)^2} = -\frac{1}{n!}(h_n - \gamma)$$

が得られる．$s=-n$ に対しては，定義 (6.50) で $n=n+1$ としても結果は同じであったから

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \qquad (*6.1)$$

が成り立つ．これを対数微分すれば

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\Gamma'(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{s+k}.$$

よって

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=-n} = -\lim_{s\to -n}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)^2}$$

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)^2} = \frac{1}{\Gamma(s)}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{s+k} - \frac{\Gamma'(s+n+1)}{\Gamma(s+n+1)}\Big] + \frac{1}{(s+n)\Gamma(s)}$$

上式で $s\to -n$ とすれば，$|\Gamma'(s)|\to\infty$ であったから，右辺第一項は 0 に収束する．右辺第二項は (∗6.1) より

$$\frac{1}{(s+n)\Gamma(s)} = \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{\Gamma(s+n+1)} \to (-1)^n\, n!$$

となり，公式

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=-n} = (-1)^n\, n!$$

が示された．

5.

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{3-x^2}{x^2}\sin x - \cos x\Big),$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{3-x^2}{x^2}\cos x + \sin x\Big).$$

6. (1) $y_1(x) = J_\nu(x^2),\quad y_2(x) = Y_\nu(x^2).$

(2) $y_1(x) = J_\nu(\alpha x),\quad y_2(x) = Y_\nu(\alpha x).$

(3) $y_1(x) = J_\nu(\sqrt{x}),\quad y_2(x) = Y_\nu(\sqrt{x}).$

(4) $y_1(x) = \sqrt{x}\,J_1(x),\quad y_2(x) = \sqrt{x}\,Y_1(x).$

(5) $y_1(x) = x^{-n}J_n(x),\quad y_2(x) = x^{-n}Y_n(x).$

(6) $y_1(x) = x\,J_1(\alpha x),\quad y_2(x) = x\,Y_1(\alpha x).$

(7) $y_1(x) = \sqrt{x}\,J_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{x}),\quad y_2(x) = \sqrt{x}\,J_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{x}).$

(8) $y_1(x) = x^2 J_1(x^2),\quad y_2(x) = x^2 Y_1(x^2).$

(9) $y_1(x) = \sqrt{x}\,J_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}),\quad y_2(x) = \sqrt{x}\,J_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}).$