

数学から始める 力学

押 川 元 重

はじめに

計算問題を上手く解くことができると楽しくなる。複雑であればあるほど喜びは大きい。自らの力で解くことができなくても、上手く解いたものを見せてくれると嬉しくなる。ただし、解けるか解けないかを試されているような問題はあまり快いものではない。そうした中であって力学は、計算するだけでなく対応する現象を考えるということが加わるので、面白さは格別である。さらに、力学を学習することによって計算力が身につくに違いない。こうした思いが著者には強い。その思いでもって本書をつくった。結果として、数学的色彩がいくらか強い力学なったようである。しかし、複雑なものであってもできるだけ丁寧に説明するように心がけた。

もともと、アイザック・ニュートンが力学と微積分学を発表したのが1665年とその翌年であったように、両者は切り離すことができないものとして誕生した。その後の物理学と数学はそれぞれの対象を広げ、しかも、それぞれの特色を強めることで発展した。実験や観察から得られる事実を柱とする物理学と、論理的な整合性を重視する数学へと別れてきたとも言えるが、両者はそれぞれの特性を発揮するとともに互いに補いあいながら発展してきたのである。しかし、教育を見る限り、両者のつながりが希薄になってきていることが気がかりである。両者のつながりを学習においていくらかでも回復したいということも、本書をつくるにあたっての著者の気持ちである。本書をつくるにあたり、主に次の2冊を参考にした。

阿部龍蔵、力学 {新訂版}、サイエンス社

中山正敏、基礎力学、華裳房、

なお、作図は統計ソフトRを用いた。

目 次

第 1 章 数学からの準備	4
1.1 指数関数と対数関数	4
1.2 弧度法と三角関数	5
1.3 ベ ク ト ル	7
1.4 ベクトルのスカラー積	9
1.5 ベ ク ト ル 積	11
1.6 位置ベクトル	14
1.7 関数の導関数	17
1.8 ス カ ラ ー 積	19
1.9 e の複素数乗	20
1.10 積 分	21
1.11 3変数関数の偏導関数	21
1.12 平均値の定理と近似式	22
1.13 曲 線	23
第 2 章 力	27
2.1 自 由 度	27
2.2 力と力のモーメント	28
2.3 剛体と剛体の自由度	29
2.4 剛体のつり合い	30
2.5 作用反作用の法則	39
第 3 章 運 動	41
3.1 速度と加速度	41
3.2 自由落下運動	44

3.3 等速円運動と単振動.....	44
第4章 運動方程式	48
4.1 定数係数2階線型微分方程式.....	48
4.2 ニュートンの運動方程式.....	50
4.3 重力と落下運動.....	51
4.4 放物運動.....	54
4.5 空気抵抗があるもとの落下運動.....	54
4.6 斜面上の落下運動.....	56
4.7 バネの単振動.....	58
4.8 復元力による単振動.....	60
4.9 復元力に振動する外力が加わった場合.....	61
4.10 復元力に抵抗力が加わった場合.....	62
4.11 単振り子.....	63
4.12 運動量と角運動量.....	65
第5章 エネルギー	66
5.1 仕事.....	66
5.2 保存力.....	68
5.3 力学的エネルギー保存則.....	70
5.4 力学的エネルギーの散逸.....	74
第6章 中心力と惑星の運動	76
6.1 中心力による運動の性質.....	76
6.2 中心力による運動を極座標で見る.....	78
6.3 2つ質点の内力による運動.....	79
6.4 楕円.....	80
6.5 万有引力による惑星の運動.....	83
第7章 座標系の取り替え	86
7.1 並進座標系.....	86
7.2 単振動する台に吊された単振り子の運動.....	88
7.3 ガリレイ変換.....	90

7.4	回 転 座 標 系	91
7.5	円錐振り子の運動	95
第 8 章	質 点 系 の 運 動	97
8.1	2 つの連結された球の間の内力	97
8.2	運動量保存の法則	98
8.3	角運動量保存の法則	101
第 9 章	剛 体 の 運 動	104
9.1	質点系としての剛体	104
9.2	回転軸をもつ剛体	106
9.3	剛体の慣性モーメントの計算	109
9.4	アトウッドの器械	115
9.5	剛 体 振 り 子	116
9.6	あらい平面上を真っ直ぐに転がる円盤の運動	119
9.7	あらい傾斜面上を真っ直ぐにころがる円盤の運動	120
9.8	剛体の力学的エネルギー	123
9.9	回転する剛体の運動エネルギー	124
9.10	滑車に巻き付けられた糸につるされた錘の落下運動	126
第 10 章	ラグランジュの運動方程式	128
10.1	変数の取り替え	128
10.2	微小変量解析の考え方	130
10.3	ラグランジアン	131
10.4	最小作用の原理とラグランジュの運動方程式	133
10.5	束縛条件があるときのラグランジュの運動方程式	137
10.6	ラグランジュの運動方程式の利用	139
10.7	ハミルトンの運動方程式	141

第1章

数学からの準備

この章では力学の学習に必要な数学を準備する。内容は数学のテキストにより詳しく説明されている。数学のテキストでそれらをあらためて学習することを求める意味でなく、書いてある場所を知ることによって安心できるために、それぞれ下記の2冊のテキストにおいて詳しく説明されているページを [押川—線型代数 p.]、[押川—微分積分 p.] によって示す。

押川元重著『テキスト線型代数』サイエンス社

押川元重著『テキスト微分積分』サイエンス社

1.1 指数関数と対数関数

a を正数とすると、実数 x に対して、正数 a^x を、性質

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

をみたすように定めることができる [押川—微分積分 p.30]。次の性質はこの性質より導くことができる。

$$a^0 = 1, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

例えば、 $a = 2$ のとき、

$$2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots, 2^{10} = 1024, \dots$$

となり、 $a = 0.1$ のとき、

$$0.1^2 = 0.01, 0.1^3 = 0.001, 0.1^4 = 0.0001, \dots$$

となる。一般に $a > 1$ のときは、 x が大きくなるにつれて、 a^x は急速に大きくなり、 $0 < a < 1$ のときは、 x が大きくなるにつれて、 a^x は急速に 0 に近づく。 a^x を a を底とする**指数関数**という。自然科学において主に使われるのは数 e を底とする指数関数 e^x である。**ネイピアの数**とも呼ばれる数 e は、数列 $(1 + \frac{1}{n})^n$ が n が大きくなるに近づく数のことであり、 $e = 2.718\dots$ という無理数である。

a を $a > 1$ または $0 < a < 1$ をみたすものとするとき、正数 x に対して、 $a^y = x$ をみたす実数 y が唯一つ定まるので、その y を $\log_a x$ で表わす。 $\log_a x$ を a を底とする**対数関数**という。対数関数の最も大切な性質は

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

がなりたつことである。底がネイピアの数 e のときの対数関数 $\log_e x$ を**自然対数**といい、記号 $\ln x$ で表わす。また、底が 10 のときの対数関数 $\log_{10} x$ を**常用対数**という。常用対数は底を書かない記号 $\log x$ で表わすこともあるが、自然対数を底を書かない $\log x$ で表わすこともあるので、どちらであるか注意が必要である。

1.2 弧度法と三角関数

角の大きさは半径 1 の円の弧の長さで測ることができる (図 1-1)。これが**弧度法**である (弧度法による角の大きさの単位はラジアンであるが、書かないことが多い)。弧度法においては角を測る向きが反時計回りならプラス、時計回りならマイナスの符号をつけて考えることができる。半径が 1 の円周の長さは 2π

だから、360 度に相当する角は弧度法で $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ と表せる。

半径 a の円において、弧度法で角 θ に対する円弧の長さは $a\theta$ である (図 1-2)。

三角関数 $\sin \theta$, $\cos \theta$ を学んだ後で e の虚数乗 $e^{i\theta}$ を学ぶというのが普通であるが、ここでは逆に、 $e^{i\theta}$ を先に導入し、その上で、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ を導入する。そのほうが三角関数の本質を示しているために、三角関数のいくつかの性質を導くのが容易であり、それらを誤ることなく使うことができるからである。

(1) 複素数 $z = x + iy$ に対して、座標平面上の点 (x, y) を対応させる (図 1-3)。このときの座標平面を**複素平面**という。複素平面の原点 O を中心にした半径 1 の円を考える。 $P = 1 + 0i$ はその円周上の点である。 $\theta > 0$ のとき、点 P から、時計の反対まわりに円周上を θ 進んだ円周上の点が表わす複素数を $e^{i\theta}$ で表わす。 $\theta < 0$ のとき、点 P から、時計まわりに円周上を $-\theta$ 進んだ円周上の点が表わす複素数を $e^{i\theta}$ で表わす。 $\theta = 0$ のときは、 $e^{0i} = 1$ とする (図 1-4)。複素数 $e^{i\theta}$ の実部を $\cos \theta$ 、虚部を $\sin \theta$ になっている。すなわち、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

がなりたっている。この等式によって、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を定めることもできる。実数 θ に対して定めた $e^{i\theta}$ は性質

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

をみtas。この等式はコサイン関数とサイン関数の加法公式から導くことができるが、この公式を直接に証明して [押川一微分積分 p.42]、この等式を用いてコサイン関数とサイン関数の加法公式を導くこともできる。

たとえば、

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} \\ &= i(\cos \theta + i \sin \theta) = -\sin \theta + i \cos \theta \end{aligned}$$

の最左辺と最右辺の実部と虚部を等しいと置くことにより、性質

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

を得る。さらにまた、 $1 = |e^{i\theta}|^2 = |\cos \theta + i \sin \theta|^2$ より、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

を得る。三角関数 $\cos \theta$, $\sin \theta$ についてのほかの公式も $e^{i\theta}$ の性質から導くことができる。

(2) 2つの実数 c_1, c_2 について、

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = A \sin(x + \alpha)$$

となる正数 A と実数 α が存在する。なぜなら、 $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ と置けば、 $|\frac{c_1}{A} + i\frac{c_2}{A}| = 1$ だから、 $\frac{c_1}{A} + i\frac{c_2}{A} = e^{i\alpha}$ をみたす実数 α が存在するから、

$$\begin{aligned} A \cos(x + \alpha) + iA \sin(x + \alpha) &= Ae^{i(x+\alpha)} = Ae^{i\alpha}e^{ix} \\ &= (c_1 + ic_2)(\cos x + i \sin x) \\ &= (c_1 \cos x - c_2 \sin x) + i(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \end{aligned}$$

がなりたつので、最左辺の虚部と最右辺の虚部が等しいと置けばよい。

1.3 ベクトル

3つの実数 a_x, a_y, a_z を縦に並べて両側から括弧で挟んだ $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ を **3次元数ベクトル**という。3次元数ベクトルは一般に、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ と太文字で表す。

互いに直交し原点で交わる3つの数直線が置かれた空間を**座標空間**といい、3つの数直線をそれぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸という。空間の点 P から3つの軸にそ

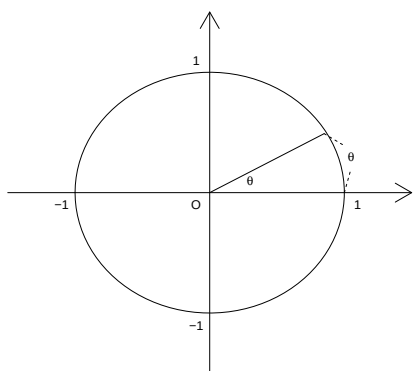


図 1.1 弧度法

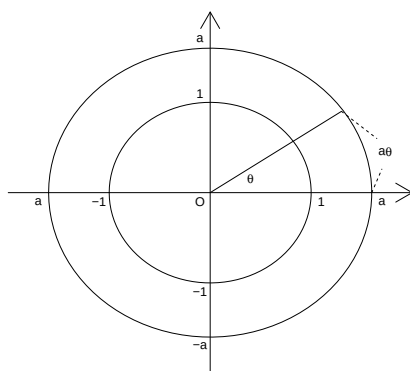


図 1.2 角と円弧の長さ

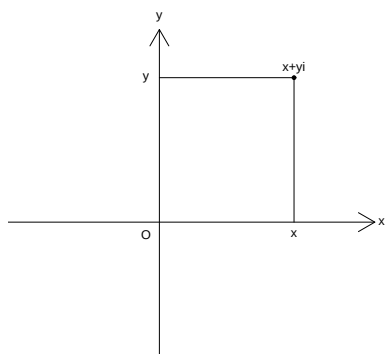


図 1.3 複素平面

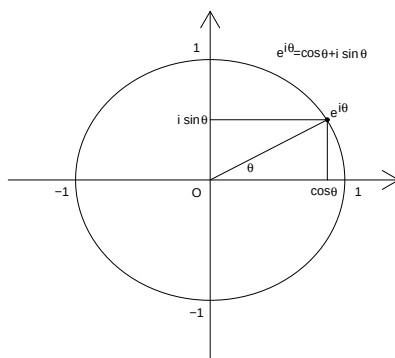


図 1.4 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

れぞれ下ろした垂線の足の座標を x, y, z とするとき、それらを並べた (x, y, z) を点 P の**座標**といい、記号 $P = (x, y, z)$ で表す (図 1-5)。

座標空間の点 $A = (x_1, y_1, z_1)$ から点 $B = (x_2, y_2, z_2)$ へ引いた矢印を A を始点とし B を終点とする**矢線ベクトル**といい、記号 $\overrightarrow{AB}$ で表す (図 1-6)。この

とき、3次元数ベクトル $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$ を矢線ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の**成分**という。始

点が異なっても成分が等しい矢線ベクトルは同じとみなす。すなわち、方向と長さが等しい矢線ベクトルは置かれている位置が異なっても同じとみなす。さらに、それらの成分である3次元数ベクトルとも同じものとみなす。

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ を成分とする矢線ベクトルを $\overrightarrow{PQ}$ とし、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ を成分

とする矢線ベクトルを $\overrightarrow{QR}$ とするとき、数ベクトルの和 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$

は矢線ベクトルを $\overrightarrow{PR}$ の成分である (図 1-7)。

大きさと方向をもつベクトルに対して、数を**スカラー**という。

1.4 ベクトルのスカラー積

3次元数ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ に対して、数 $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ を $\mathbf{a}$ の**大き**

さ、あるいは、**ノルム**といい、記号 $|\mathbf{a}|$ で表す [押川一線型代数 p.146]。 $|\mathbf{a}|$ は $\mathbf{a}$ を成分とする矢線ベクトルの長さである。

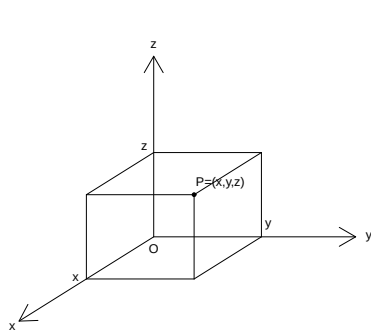


図 1.5 座標空間

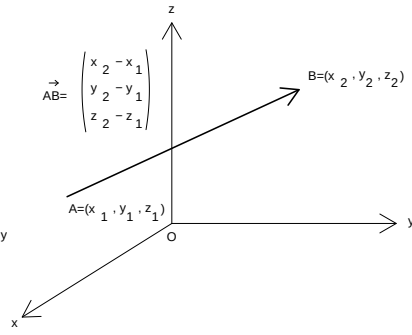


図 1.6 矢線ベクトル

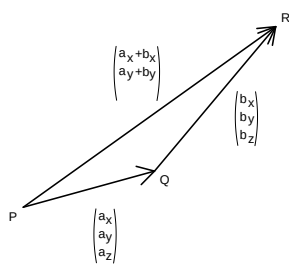


図 1.7 ベクトルの和

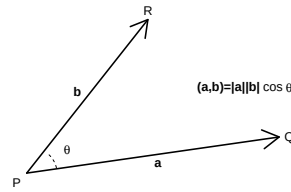


図 1.8 内積

2つの数ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に対して、数 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のスカラー積または内積といい、記号 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ で表す [押川一線型代数 p.145]。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\mathbf{a}$ を成分とする矢線ベクトルを $\overrightarrow{PQ}$ とし、 $\mathbf{b}$ を成分とする矢線ベクトルを $\overrightarrow{PR}$ とし、 $\angle QPR$ を θ とするとき、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

がなりたつ (図 1-8)。したがって、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ がなりたつとき、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ (直角) となるので、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交するという。

1.5 ベクトル積

4つの数または文字式を2行2列に並べ、両側から縦棒で挟んだものを2次の行列式という。2次の行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ に対して、 $ad - bc$ をこの2次の行列式の値といい、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

で表す。2次の行列式の値については

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$$

がなりたつ。

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ単位ベクトル $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を
表わすものとする。2つの3次元数ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に
対して定まる3次元数ベクトル

$$\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

を記号 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で表わし、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のベクトル積、あるいは、外積ベクトルという
(図 1-9)。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} + \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j}$$

ここでは、覚えやすいように、また、誤らないように、第1項はベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の x 成分と y 成分を並べた2次の行列式と z 成分が1の単位ベクトル $\mathbf{k}$ からなり、第2項はベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の y 成分と z 成分を並べた2次の行列式と x 成分が1の単位ベクトル $\mathbf{i}$ からなり、第3項はベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の z 成分と x 成分を並べた2次の行列式と y 成分が1の単位ベクトル $\mathbf{j}$ からなるという具合に、 xyz, yzx, zxy と循環する順に並べ換えている。慣れるために、まず、例題で計算してみる。

例 1-1, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ について、ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j}$$

$$= -2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

なお、3次の行列式を用いると外積ベクトルは

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \mathbf{i} \\ a_y & b_y & \mathbf{j} \\ a_z & b_z & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

と表すことができる。外積ベクトルについては、性質

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \text{および、} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

がなりたつ。つまり、ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ に直交するベクトルである。また、その大きさ $\sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$ は、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ からできる平行四辺形の面積に等しい [押川一線型代数 p.169]。なお、 $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ に直交する方向は2つあるが、右手において、親指、人差し指、中指が互いに直交するように整えて、 $\mathbf{a}$ を親指方向のベクトル、 $\mathbf{b}$ を人差し指方向のベクトルとすると、ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は中指方向のベクトルとなる（これを**右手系**という）。例えば、 $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ からできる平行四辺形の面積は1であり、 $\mathbf{i}$ および $\mathbf{j}$ に直交する大きさが1のベクトルは $\mathbf{k}$ または $-\mathbf{k}$ であるが、 $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$ ではなく $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ である。外積ベクトルの向きについては、ベクトル $\mathbf{a}$ からベクトル $\mathbf{b}$ のほうに右ネジを回すとき、ネジが進む方向が外積ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きであるという覚え方をしてもよい。

外積ベクトルは力学において重要な役割を果たす。しかも、外積ベクトルの方向を誤ると混乱がおこる恐れがあるので、計算においては、 x 成分、 y 成分、 z 成分の順序を守り、作図において xyz 座標軸を書くときは右手系になるよう

に、すなわち、 x 軸を親指方向、 y を人差し指方向とすると、 z 軸が中指方向となるように描く（図 1-10）。図 1-11 の記号 $z\oplus$ は z 軸が紙面の表側（手前）向きであることを、また、記号 $z\ominus$ は z 軸が紙面の裏側（奥）向きであることを意味する。

座標平面における矢線ベクトルも座標空間の場合と同じように考える。座標平面の $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を成分とする原点を始点とする矢線ベクトルから、反時計まわりに $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を成分とする原点を始点とする矢線ベクトルまで測った角を θ とするとき、

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$$

がなりたつ。両辺の値は、これら 2 つの矢線ベクトルからできる平行四辺形の符号付きの面積になっている。すなわち、 $0 < \theta < \pi$ のときは平行四辺形の面積であり、 $\pi < \theta < 2\pi$ のときは平行四辺形の面積にマイナスを付けたものになる（図 1-12）。これが 2 次の行列式の値の図形的な意味である。

1.6 位置ベクトル

ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を原点 O を始点とする矢線ベクトルと考えると、そ

の終点は (x, y, z) となる。つまり、ベクトルと座標空間上の点は同じものと考えることができる。このように、特に原点を始点とするベクトルを考えると、**位置ベクトル**という（図 1-13）。力学では物体の位置を表わすのに位置ベクトルを用いるが、それを微分して得られる速度ベクトルと、さらに微分して得られる加速度ベクトルは位置ベクトルではない。

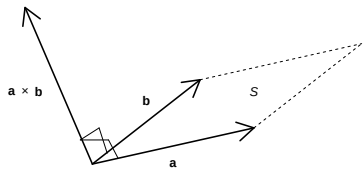


図 1.9 外積ベクトル

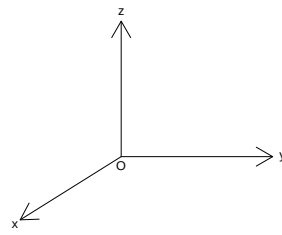


図 1.10 右手系

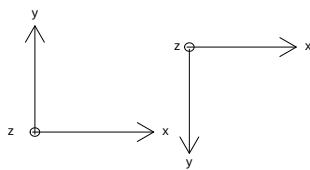


図 1.11 座標軸の向き

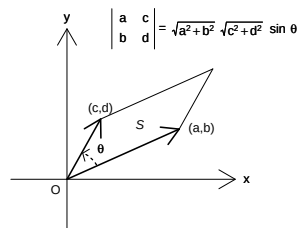


図 1.12 2 次の行列式の値

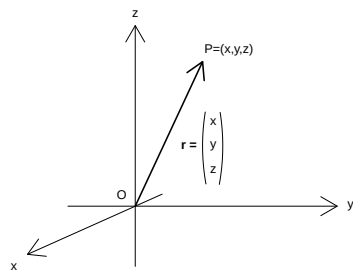


図 1.13 位置ベクトル

1.7 関数の導関数

変数の変化量を増分といい、ナブラ記号 Δ を用いる。増分という用語を用いるが、これは負の値をとることもあり得る。関数 $y = f(x)$ について、 x の増分 Δx に対して、 y の増分 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ を考える。増分 Δx を 0 に近づけたとき、増分の割合 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ が近づく値（近づく値があるとき）は x に関する。その近づいた値を記号 $f'(x)$ で表わす。すべての x で $f'(x)$ が定まるとき、 $f'(x)$ を関数 $y = f(x)$ の導関数という。導関数 $f'(x)$ は記号 $\frac{dy}{dx}$ で表わすこともある。導関数を求めることを関数を微分するという。

関数 $f(x) = x^n$ の導関数については、公式

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

がなりたつ。 n が自然数のときだけでなく、実数のときもこの公式はなりたつ。

底が数 e のときの指数関数 e^x の導関数については、公式

$$(e^x)' = e^x$$

がなりたつ。また、自然対数関数 $\ln x$ の導関数については、公式

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

がなりたつ。

$\frac{e^{ix} - 1}{x}$ は x が 0 に近づくとき、 i に近づく [押川一微分積分 p.43]。このことを用いると

$$(e^{ix})' = ie^{ix}$$

を導くことができる。これは $(\cos x + i \sin x)' = -\sin x + i \cos x$ ということだから、三角関数の導関数の公式

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$$

を導くことができる。

2つの関数の積については、公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

がなりたつ。

関数 $y = f(x)$ に関数 $x = g(t)$ を代入して得られる合成関数 $y = f(g(t))$ については、**合成関数の微分公式**

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t)$$

がなりたつ。この公式は $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ 、あるいは、 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ とも表わすことができる。

なお、すでに用いているが、関数 $f(x)$ の導関数を $(f(x))'$ で表わすこともある。公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad (f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t),$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x$$

の左辺はいずれもこの表し方によるものである。また、力学では時間 t を変数とする関数を取り扱うことが多い。 t を変数とする関数 $x = x(t)$ の導関数を $\dot{x}$ とドットをつけて表わす。

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x, \quad \ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x}$$

である。

なお、その都度断らないが、本書では、連続な導関数をもつ関数を取り扱う。

1.8 スカ ラ ー 積

、ベクトル積の微分

2つの t を変数とする数ベクトル $\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_x(t) \\ b_y(t) \\ b_z(t) \end{pmatrix}$ に

ついて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

がなりたつ。なぜなら、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= \dot{a}_x b_x + a_x \dot{b}_x + \dot{a}_y b_y + a_y \dot{b}_y + \dot{a}_z b_z + a_z \dot{b}_z \\ &= \dot{a}_x b_x + \dot{a}_y b_y + \dot{a}_z b_z + a_x \dot{b}_x + a_y \dot{b}_y + a_z \dot{b}_z \\ &= \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

がなりたつ。また、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} &= \frac{d}{dt}(a_y b_z - a_z b_y) \\ &= \dot{a}_y b_z + a_y \dot{b}_z - (\dot{a}_z b_y + a_z \dot{b}_y) \\ &= \dot{a}_y b_z - \dot{a}_z b_y + a_y \dot{b}_z - a_z \dot{b}_y \\ &= \begin{vmatrix} \dot{a}_y & b_y \\ \dot{a}_z & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_y & \dot{b}_y \\ a_z & \dot{b}_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

がなりたつから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \frac{d}{dt} \left(\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} \dot{a}_y & b_y \\ \dot{a}_z & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_y & \dot{b}_y \\ a_z & \dot{b}_z \end{vmatrix} \right) \mathbf{i} + \left(\begin{vmatrix} \dot{a}_z & b_z \\ \dot{a}_x & b_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_z & \dot{b}_z \\ a_x & \dot{b}_x \end{vmatrix} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\begin{vmatrix} \dot{a}_x & b_x \\ \dot{a}_y & b_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & \dot{b}_x \\ a_y & \dot{b}_y \end{vmatrix} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{vmatrix} \dot{a}_x & b_x \\ \dot{a}_y & b_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & \dot{b}_x \\ a_y & \dot{b}_y \end{vmatrix} \right) \mathbf{k} \\
= & \begin{vmatrix} \dot{a}_y & b_y \\ \dot{a}_z & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \dot{a}_z & b_z \\ \dot{a}_x & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dot{a}_x & b_x \\ \dot{a}_y & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
& + \begin{vmatrix} a_y & \dot{b}_y \\ a_z & \dot{b}_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & \dot{b}_z \\ a_x & \dot{b}_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & \dot{b}_x \\ a_y & \dot{b}_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
= & \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

がなりたつ。

1.9 e の複素数乗

e の複素数 $z = x + iy$ 乗を $e^z = e^x \times e^{iy}$ で定めると、性質

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

がなりたつ。このことが、 $\cos \theta + i \sin \theta$ を $e^{i\theta}$ と e を用いて表わす ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と表わした) 根拠である。

$\alpha = a + ib$ を複素数の定数とすると、 t の関数 $e^{\alpha t}$ の導関数については、公式

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$$

がなりたつ。なぜなら、関数の積の導関数の公式を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{\alpha t} &= \frac{d}{dt} e^{at} e^{ibt} \\
&= a e^{at} e^{ibt} + e^{at} \times i b e^{ibt} \\
&= (a + ib) e^{at} e^{ibt} = \alpha e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

だからである。単振動の微分方程式を解くときにこの公式を用いる。

1.10 積 分

関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を記号 $\int f(x)dx$ で表わし、 $f(x)$ の**不定積分**という。関数の不定積分を求めることは、微分の逆演算をすることであり、微分の公式に対応する計算公式がある。

区間 $[a, b]$ に $n+1$ 個の点 $A = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$ を与え、 i 番目の小区間の長さを記号 $\Delta(x_i) = x_i - x_{i-1}$ で表わす。関数 $f(x)$ について、 $f(x_i)\Delta(x_i)$ を考え、そのすべてを加えたものを記号 $\sum_i f(x_i)\Delta(x_i)$ で表わす。 n を増やししながら、すべての小区間の長さ $\Delta(x_i)$ を 0 に近づける。そのとき、 $\sum_i f(x_i)\Delta(x_i)$ が近づく値を、記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表わし、 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での**定積分**という。記号 $\int_a^b$ は、有限個を加えると言う意味の記号 $\sum$ の個数が増えていって、無限にたくさんものを加えるという意味を持っている。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について、公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

がなりたつ [押川一微分積分 p.106]。つまり、 $f(x) = \int f'(x)dx$ だから、関数 $f'(x)$ の定積分は、その関数の不定積分 $f(x)$ の値の差で求めることができる。微分と積分の関係を示すこれを微積分学の基本定理という。

1.11 3 変数関数の偏導関数

3 変数の関数 $w = f(x, y, z)$ について、 y と z を定数と考えたときの x だけの関数 $f(x, y, z)$ の導関数を記号 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 、あるいは、記号 $f_x(x, y, z)$ で表わし、

$f(x, y, z)$ の x についての偏導関数という。 y についての偏導関数 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 、あるいは、 $f_y(x, y, z)$ 、および、 z についての偏導関数 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 、あるいは、 $f_z(x, y, z)$ も同様に考える。偏導関数の記号は導関数の記号と異なる。偏導関数を求めることを関数を偏微分するという。

3変数の関数 $w = f(x, y, z)$ に3つの1変数の関数 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 代入して得られる合成関数 $w = f(x(t), y(t), z(t))$ の導関数については、公式

$$\begin{aligned} & (f(x(t), y(t), z(t)))' \\ &= f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) \end{aligned}$$

がなりたつ [押川—微分積分 p.116]。この公式は、

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

とも表せる。なお、この公式は偏導関数が連続であればなりたつ。

1.12 平均値の定理と近似式

導関数をもつ1変数関数 $f(x)$ について、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

をみたす点 ξ が a と b の間に存在する。これを平均値の定理という [押川—微分積分 p.71]。

x を止めて、 $h(t) = f(tx)$ と置くと、合成関数の微分公式より $h'(t) = f'(tx)x$ がなりたつ。平均値の定理より、 $h(1) - h(0) = h'(\xi)$ をみたす ξ が 0 と 1 の間に存在するから、 $f(x) - f(0) = f'(\xi x)x$ となる。 $\epsilon = (f'(\xi x) - f'(0))x$ と置けば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \epsilon$$

となり、 $|x|$ が 0 に近いとき、 ϵ の () の中が 0 に近いので $|x|$ よりも微小である。

したがって、**近似公式**

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

がなりたつ。

この近似式の公式を関数 $e^x, \sin x, \cos x$ に適用すれば、近似式

$$e^x \approx 1 + x, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1$$

が得られる。

1.13 曲 線

3つの1変数関数 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ から定まる位置ベクトル

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

は、座標空間の曲線を描く。

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

を、曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ における**接ベクトル**という。この曲線の長さ L は

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

である [押川—微分積分 p.107]。このとき、

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\dot{\mathbf{r}}| dt$$

を**弧長パラメータ**といい、

$$\dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

がなりたつ。

$\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{\mathbf{r}}$ を曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ における**単位接ベクトル**という (図 1-14)。

$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ だから、両辺を微分すると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 2\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = 0$$

がなりたつ。したがって、 $\dot{\mathbf{t}}$ と $\mathbf{t}$ は直交している。 $\dot{\mathbf{t}}(t)$ を曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ における**法線ベクトル**といい、 $\mathbf{n} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{t}}|} \dot{\mathbf{t}}$ を曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ における**単位法線ベクトル**という。

$\rho(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{t}}|}$ を曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ における**曲率半径**という。 $|\dot{\mathbf{t}}| = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{\rho} = \frac{\dot{s}}{\rho}$ がな

りたつから、 $\dot{\mathbf{t}} = \frac{\dot{s}}{\rho} \mathbf{n}$ がなりたつ。

$\dot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}| \mathbf{t} = \dot{s} \mathbf{t}$ の両辺を微分すると、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \dot{\mathbf{t}} = \ddot{s} \mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{n}$$

がなりたつ。

例 1-2、 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ は xy 平面上の半径 a の円である。これについて、

$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, ρ を求める。

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{s} = |\dot{\mathbf{r}}| = a, \quad \mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

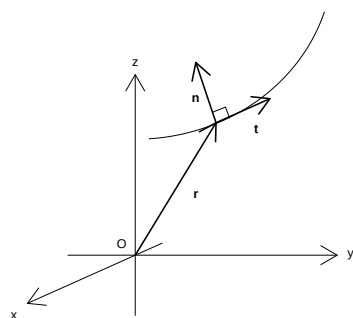


図 1.14 単位接線ベクトルと単位法線ベクトル

$$\dot{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\dot{\mathbf{t}}| = 1, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{t}}|} \dot{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{t}}|} = \frac{a}{1} = a$$

を得る。この例において、 ρ は半径に一致したが、一般に、曲率半径 $\rho(t)$ は、曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ で曲線を近似する円の半径に一致している。

2つの1変数関数 $x = x(t), y = y(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) から定まる座標平面の位置ベクトル

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

は、座標平面の曲線を描く。この曲線の長さ L は座標空間の曲線の場合と同様に、

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

である。関数 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) のグラフは、座標平面の曲線

$$\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (a \leq t \leq b)$$

であり、その長さは $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ となる。

第2章

力

2.1 自 由 度

力学は、いくつかの変数とそれらを用いた方程式や微分方程式で記述する。それらの変数を取り替える必要も起こってくるが、対象を記述する変数の個数に気を配ることは大切なことである。対象を記述するのに必要な最小の変数の個数を**自由度**という。自由度は対象の個数や課される束縛条件などで定まる。自由度を判断することが必ずしも容易でない複雑な場合もある。

3次元空間の点は3つの変数 x, y, z で記述できるので、空間の点の自由度は3である。平面 $x + y + z - a = 0$ 上の点という束縛条件のもとにある点は $x = u, y = v, z = a - u - v$ と2つの変数 u, v で記述できるので自由度は2である。原点 O を中心とする半径 a の球面 $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ 上の点であるという束縛条件のもとにある点は $x = a \sin \theta \cos \phi, y = a \sin \theta \sin \phi, z = a \cos \theta$ と2つの変数 θ, ϕ で記述できるので自由度は2である。一般的には束縛条件が1つの3変数関数で $f(x, y, z) = 0$ で表わされる曲面上の点は自由度が2である。また、2つの束縛条件 $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ のもとにある点は2つの平面の交わりとしての曲線上の点であり、1つの変数で記述できるので、自由度は1である。

空間の2つの点は $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ と6つの変数で記述できるので、自由度は6である。

例 2-1、相互の距離が $a > 0$ であるという束縛条件 $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 +$

$(z_2 - z_1)^2 - a^2 = 0$ のもとにある空間の 2 点 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) は、 $x_1 = u$, $y_1 = v$, $z_1 = w$, $x_2 - u = a \cos \theta$, $y_2 - v = a \sin \theta \cos \phi$ と置くとき、

$$(z_2 - w)^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi = a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi$$

だから、 $z_2 = w + a \sin \theta \sin \phi$ (± の - のときは θ を $-\theta$ と置きなおせばよい) となるから、 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ のすべてが 5 つの変数 u, v, w, θ, ϕ で記述できる。しかし、一つの方程式で束縛されているだけであるので、4 つの変数で記述することはできない。したがって、自由度は 5 である。

束縛条件が無い場合の自由度は点の個数の 3 倍である。束縛条件が 1 つ増えるごとに自由度は 1 ずつ減っていくと言えるようでもあるが、これは束縛条件相互の関係で決まることであり、必ずしも正しくない。

2.2 力と力のモーメント

力学での対象の一つは**力**である。力そのものを目で見ることができないが、押したり押されたりの力を感じることができる。また、力で物体の動きが変化したり、形が変わったりするのを見ることもある。ばねばかりで力の大きさを測ることもできる。

力には大きさがあり、その大きさの単位としてニュートンやダインがある (4 章)。また、力にはどちらに向かった力であるか、その方向がある。大きさと方向をもった力は、ベクトルであり、矢線ベクトルや数ベクトルでもって表わすことができる。力をベクトルとして捉えるならば、ベクトルの和としての力の合成やその逆としての力の分解を考えることができる。

力 $\mathbf{F}$ が作用する**作用点**の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とするとき、外積ベクトル $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を原点 O に関する**力のモーメント**という (図 2-1)。力の作用点から、力の方向に引いた直線を力の**作用線**という。力の作用点を力の作用線上のどこに移しても、力のモーメントは変わらない。

地球上の物体が地球から受ける力を**重力**という。重力は地球と物体との間に

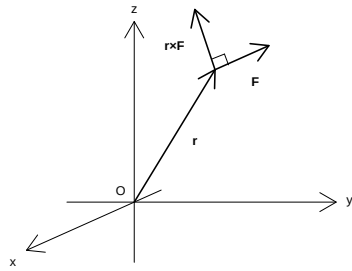


図 2.1 力のモーメント

はたらく万有引力により物体が地球の中心に向けて受ける力であり、質量 m の物体が受ける重力の大きさは $F = mg$ である。ここで g は**重力定数**と呼ばれるものであり、地球上の場所によっていくらか異なるが、ほぼ $g = 9.81m/s^2$ である。

2.3 剛体と剛体の自由度

力を加えても形が変わらない物体を**剛体**という。どんな物体でも加える力が強くなれば形が変わるので、剛体とは、理想化した物体である。

剛体の位置は、その剛体上の一直線に並ばない3点がどこに位置するかで決まる。したがって、剛体の自由度は、相互の距離が一定であるという束縛条件にある空間の3点の自由度と一致する。空間の3点 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) の相互の位置が一定であるというのは次の3つの束縛条件

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - a^2 = 0 \quad (1)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - b^2 = 0 \quad (2)$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - c^2 = 0 \quad (3)$$

である ($a, b, c > 0$)。 $x_1 = u$, $y_1 = v$, $z_1 = w$, $x_2 - u = a \cos \theta_2$, $y_2 - v = a \sin \theta_2 \cos \phi_2$ と置くとき、(1) より、例 2-1 と同じで、 $z_2 = w + a \sin \theta_2 \sin \phi_2$ となる。さらに、 $x_3 - u = b \cos \theta_3$, $y_3 - v = b \sin \theta_3 \cos \phi_3$ と置くと、同様に (2) より、 $z_3 = w + b \sin \theta_3 \sin \phi_3$ となる。これらを (3) に代入すると、

$$(a \sin \theta_2 \sin \phi_2 - b \sin \theta_3 \sin \phi_3)^2 = c^2 - (a \cos \theta_2 - b \cos \theta_3)^2 - (a \sin \theta_2 \cos \phi_2 - b \sin \theta_3 \cos \phi_3)^2$$

となり、例えば、 ϕ_2 は $\theta_2, \theta_3, \phi_3$ で表せる。したがって、 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ はすべて 6 つの変数 $u, v, w, \theta_2, \theta_3, \phi_3$ で表せるので、相互の距離が一定であるという束縛条件にある空間の 3 点の自由度は 6 である。この場合も、3 点の自由度 9 から束縛条件の個数 3 を引いた $9 - 3 = 6$ が自由度になっている。ゆえに、剛体の自由度は 6 である。ただし、直線の形をした剛体の自由度は、相互の距離が一定である空間の 2 点の自由度と同じであり、2 点の自由度 6 から 2 点の距離が一定であるという束縛条件の個数 1 を引いた $6 - 1 = 5$ である。

2.4 剛体のつり合い

剛体にいくつもの力 $\mathbf{F}_i$, i が作用して静止しているとする。この状態は、力の総和 $\sum_i \mathbf{F}_i$ がゼロベクトルであり、力のモーメントの総和 $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ がゼロベクトルであるという 2 つえ決定される。このことを例で示す。なお、 $\sum_i$ は和を表わす記号である。

例 2-1, 長さ ℓ , 質量 m の細長い一様な棒の一端 A を質量が無視できる糸で天井から吊し、他端 B を棒が水平となるように大きさ F の力で引っ張る。この状態における糸および棒が鉛直線となす角 α, β と糸の張力 T を求める (図 2-2)。

点 A を原点とし、鉛直方向を z 軸、棒の方向を y 軸、それらに直交する奥の

方向を x 軸とする。点 A に加わる張力ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \alpha \\ -T \cos \alpha \end{pmatrix}$ 、点 B に加

わる外力ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$ 、棒の重心に加わる重力ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix}$ だ

から、棒に働く力ベクトルの総和は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \alpha \\ -T \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \alpha + F \\ -T \cos \alpha + Mg \end{pmatrix}$$

となる。B の位置ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \ell \sin \beta \\ \ell \cos \beta \end{pmatrix}$ 、棒の重心の位置ベクトルは

$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ell}{2} \sin \beta \\ \frac{\ell}{2} \cos \beta \end{pmatrix}$ だから、原点に関する力のモーメントの総和を 1-5 節の外積ベク

トルの計算法に従って計算すると、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \alpha \\ -T \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \sin \beta \\ \ell \cos \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ell}{2} \sin \beta \\ \frac{\ell}{2} \cos \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F\ell \cos \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\ell Mg}{2} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F\ell \cos \beta + \frac{\ell Mg}{2} \sin \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、力の総和がゼロベクトルであり、力のモーメントの総和がゼロベクトルであることから、

$$\begin{aligned}
& -T \sin \alpha + F = 0 \\
& -T \cos \alpha + Mg = 0 \\
& \frac{\ell Mg}{2} \sin \beta - F \ell \cos \beta = 0
\end{aligned}$$

が得られる。これから、

$$\begin{aligned}
\tan \alpha &= \frac{F}{Mg}, \quad \tan \beta = \frac{2F}{Mg}, \\
T^2 &= (T \cos \alpha)^2 + (T \sin \alpha)^2 = (Mg)^2 + F^2, \\
T &= \sqrt{M^2 g^2 + F^2}
\end{aligned}$$

が得られる。

力の総和と力のモーメントの総和のいずれもがゼロベクトルになるということから剛体のつり合いの状態を求めることができたのはなぜだろうか。それは、力の総和についてのベクトルの等式 $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ は成分についての3つの方程式からなり、力のモーメントの総和についてのベクトルの等式 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ は成分についての3つの方程式からなり、あわせて6つの方程式が剛体の自由度6を与える6つの変数の値を決定したからである。

例 2-2, 質量 m_0 の一様な板の一端 A を蝶つがいで鉛直な壁に取り付け、板の他端 B と A の上方の壁面の点 C とを板が水平になるように糸でつなぐ。さらに、点 B に質量 m_1 のおもりを付ける。AB の長さを ℓ_0 、AC の長さを ℓ_1 とするとき、糸の張力の大きさ T と、板が壁から受ける抗力ベクトルを求める。

A を原点とし、鉛直方向を z 軸、B の方向を y 軸、それらに垂直な奥の方向を x 軸とする。 $\angle ACB$ を θ とし、板が壁から受ける抗力ベクトルを $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$

を求める (図 2-3)。点 B の位置ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \ell_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、そこに張力ベクトル

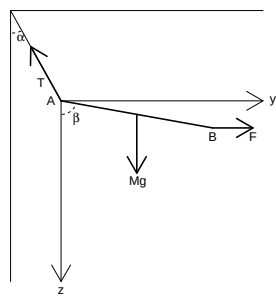


図 2.2 力のつりあい

ル $\begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta \\ -T \cos \theta \end{pmatrix}$ と、おもりの重力ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{pmatrix}$ が働く。また、板の

中心点の位置ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ell_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、そこに板の重力ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 g \end{pmatrix}$

が働く。板にはたらく力ベクトルの総和は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta \\ -T \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 g \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ R_y - T \sin \theta \\ R_z - T \cos \theta + m_1 g + m_0 g \end{pmatrix}$$

である。原点に関する力のモーメントの総和は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta \\ -T \cos \theta \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\ell_0}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 g \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\ell_0 T \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_0 m_1 g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\ell_0}{2} m_0 g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\ell_0 T \cos \theta + \ell_0 m_1 g + \frac{\ell_0}{2} m_0 g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、力の総和がゼロベクトルであり、力のモーメントの総和がゼロベクトルであることから、

$$R_y - T \sin \theta = 0$$

$$R_z - T \cos \theta + m_1 g + m_0 g = 0$$

$$- \ell_0 T \cos \theta + \ell_0 m_1 g + \frac{\ell_0}{2} m_0 g = 0$$

が得られる。これから、

$$T = \frac{1}{\cos \theta} (m_1 + \frac{m_0}{2}) g = \frac{\sqrt{\ell_0^2 + \ell_1^2}}{\ell_1} (m_1 + \frac{m_0}{2}) g$$

$$R_y = T \sin \theta = \tan \theta (m_1 + \frac{m_0}{2}) g = \frac{\ell_0}{\ell_1} (m_1 + \frac{m_0}{2}) g$$

$$R_z = -m_1 g - m_0 g + (m_1 g + \frac{m_0}{2} g) = -\frac{m_0}{2} g$$

を得る。

1つの物体にかかる力のベクトルの和が零ベクトルであれば、その物体の重心は移動しない。したがって、棒の両端に同じ大きさの平行で逆向きの力がかかっても棒の重心は移動しないが、その平行な力の方向が棒の方向と異なる場合は回転運動する。力のモーメントの和が零ベクトルであるときは回転運動もしない。

例 2-3, 懸垂線

同じ高さの空間の2つの点の間に、2点間の長さより長いロープを張り渡す。そのときのロープが描く曲線を調べる (図 2-4)。

ロープの最下点を原点に取り、鉛直方向を y 軸、それに直交するロープを張り渡す方向を x 軸とし、ロープが描く曲線を $y = f(x)$ とする。原点 O からそれとは異なるロープ上の点 $P = (x, f(x))$ までのロープにはたらく力は、ロープの両端にはたらく張力と重力である。点 P にはたらく張力の大きさを T とし、点 O にはたらく張力の大きさを H とする。ロープの単位長さ当りの質量を σ とし、 O から P までのロープの長さを s とすると、重力の大きさは $\sigma s g$ である。曲線 $y = f(x)$ の点 P における接線と x 軸がなす角を θ とすると、力のつり合いの x 軸方向と y 軸方向の成分は

$$T \cos \theta = H, \quad T \sin \theta = \sigma s g$$

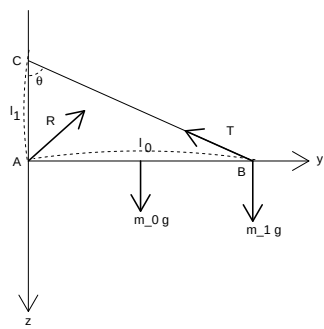


図 2.3 張力と抗力

となる。これらより、 $\tan \theta = \frac{\sigma s g}{H}$ を得る。 $a = \frac{\sigma g}{H}$ と置くと、 $as = \tan \theta$ となり、 $a \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ となる。 $s = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2} dt$ であり (1-13 節)、 $f'(x) = \tan \theta$ だから、

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

がなりたつので、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \times \frac{1}{a \cos^2 \theta} = \frac{1}{a \cos \theta}$$

を得る。

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right)$$

だから、

$$\begin{aligned} ax &= \int_0^\theta a \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (-\ln(1 - \sin \theta) + \ln(1 + \sin \theta)) \Big|_0^\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$e^{ax} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

を得る。点 P の y 軸対称な点で考えると、同様に、

$$e^{-ax} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

を得る。両辺の差をとると、

$$e^{ax} - e^{-ax} = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta = 2f'(x)$$

となり、 $f'(0) = 0$ だから、

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} dx = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \Big|_0^x = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} - \frac{1}{a}$$

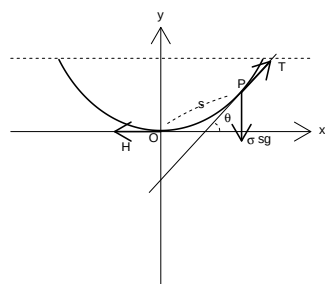


图 2.4 懸垂線

となる。得られた曲線 $f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} - \frac{1}{a}$ を懸垂線あるいはカテナリーという。

2.5 作用反作用の法則

2つの物体 A,B について、A が B に力 $\boldsymbol{F}$ を及ぼすとき、B は A に逆向きの同じ大きさの力 $-\boldsymbol{F}$ がはたらく (図 2-5)。これを作用反作用の法則、あるいは、ニュートンの運動第 3 法則という。作用反作用の法則は 2 つ物体の相互作用について述べているのであり、一つの物体にはたらく力のつり合いとは別のことである。

2 人の人 A,B が綱引きをしたとする。綱から手を離さない限り、A が B を引く力と、B が A を引く力は、方向は逆であるが、大きさは等しい。A については、A が動かないならば、B から引かれる力と、A が地面にふんばる摩擦力がつり合っている。B についても、B が動かないならば、A から引かれる力と、B が地面にふんばる摩擦力がつり合っている。たとえば、B が氷面の上にいるとすると、氷面の摩擦力が小さいため、B にはたらく力のつり合いが取れなくなり、B は A に小さな力で引き寄せられる。ふんばりの力がはたらかないからである。つまり、綱引きの勝敗は、綱を持ちこたえる限り、ふんばりの力の強さで決する。

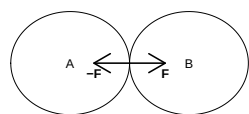


図 2.5 作用と反作用

第3章

運動

3.1 速度と加速度

力学の対象のもう一つは物体の運動である。運動は時刻 t までに進んだ距離で表わすことができる。例えば、車で最初の 100 秒間は秒速 $5m$ で走り、次の 100 秒間は秒速 $10m$ で走り、さらに、次の 100 秒間は秒速 $5m$ で走り、停車したとする。 t 秒後までに車が走った距離を $x(t)$ m で表わせば、

$$x(t) = \begin{cases} 5t & (0 \leq t \leq 100) \\ 10t - 500 & (100 \leq t \leq 200) \\ 5t + 500 & (200 \leq t \leq 300) \end{cases}$$

となる。これをグラフに描くと図の折れ線になる (図 3-1)。秒速 $5m$ は時速 $18km$ だから、停車している車が急発進することになる。秒速 $10m$ は時速 $36km$ だから、時速 $18km$ から急加速することになる。また、時速 $36km$ から時速 $18km$ へも急減速であり、時速 $18km$ からの急停車にもなっている。普通は、このような急発進、急加速、急減速、急停車することなく、滑らかな運転をする。例えば、 t 秒までの進んだ距離が $x(t) = -\frac{1}{6750}t^3 + \frac{1}{15}t^2$ だとすると、 $t = 0$ で $x(0) = 0$ から出発して、 $t = 300$ で $x(300) = 2000$ に到達する (図 3-2)。微分すると、

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2250}t^2 + \frac{2}{15}t = \frac{t(-t+300)}{2250} = \frac{1}{2250}\{-(t-150)^2 + 150^2\}$$

となる。このようにして得られた $\dot{x}(t)$ が時刻 t における速度である。したがって、速度 $\dot{x}(0) = 0$ で出発して、次第に速度を上げ、 $t = 150$ からは次第に速度を下げて、 $\dot{x}(300) = 0$ で停車することになる。この場合は速度が急に変わるこ

とがない、つまり、急発進、急加速、急減速、急停車のない滑らかな運転をしたことになる。

すでに説明したように、時刻 t における出発点からの距離を $x(t)$ とし、それを t で微分した導関数を $\dot{x}(t)$ とすると、時刻 t における**速度**は $\dot{x}(t)$ である。なぜなら、 t から $t + \Delta t$ までに進んだ距離の差は $x(t + \Delta t) - x(t)$ だから、この間の平均速度は $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ であり、 t を止めて Δt を 0 に近づけると、この平均速度が近づく値が $\dot{x}(t)$ である。したがって、 $\dot{x}(t)$ は時刻 t の瞬間における速度と考えることができる。 $\dot{x}(t)$ をさらに微分して得られるものを $\ddot{x}(t)$ で表わし、**加速度**という。速度 $\dot{x}(t)$ は時刻 t において距離 $x(t)$ を増減させる「もと」であり、加速度 $\ddot{x}(t)$ は時刻 t において速度 $\dot{x}(t)$ を増減させる「もと」である。

運動は時間や距離に関係する。時間には秒 s、分、時間などの単位があり、距離には m, cm, km などの単位がある。したがって、速度の単位は m/s, cm/s などであり、加速度の単位は m/s², cm/s² などである。しかし、単位を省略して記述することが多い。

空間を移動するとき、時刻 t における空間内の位置を $(x(t), y(t), z(t))$ とする。この空間内の位置は位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ で表わすことができる。このとき、 $\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ を**速度ベクトル**といい、 $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$ を**加速度ベクトル**という。速度ベクトルや加速度ベクトルは位置ベクトル（原点を始点とするベクトル）ではなく、それぞれ位置 $\mathbf{r}(t)$ を始点とする矢線ベクトルをイメージするとよい。

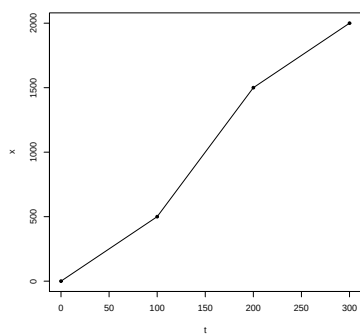


図 3.1 急発進、急加速、急減速、急停車

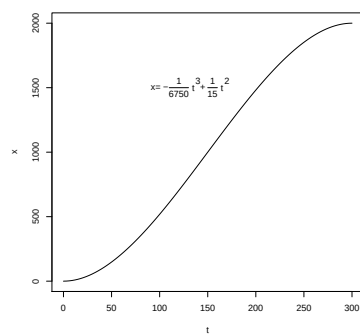


図 3.2 滑らかな運転

3.2 自由落下運動

高い塔の上から手を放して物体を落下させたとき、 t 秒後の落下距離を $\ell(t)$ m とすれば、物体の質量に関係なく、 $\ell(t) = 4.905t^2$ となる。これより、落下速度は $\dot{\ell}(t) = 9.81t$ となり、落下速度も物体の質量に依存しないが、空気抵抗が無視できる場合のことである。また、落下加速度は $\ddot{\ell}(t) = 9.81 = g$ となり、重力定数に一致する。

3.3 等速円運動と単振動

平面上の円の円周上を一定の速度で回る運動を**等速円運動**という。 xy 平面の原点 O を中心とする半径 a の円の円周上の点 $(a, 0)$ を出発する速度 v の等速円運動を考える。時間が t 経過したときの円周上の位置を P とすると、点 P から点 $(a, 0)$ までの円弧の長さは vt である (図 3-3)。直線 OP と原点 O を中心とする半径 1 の円の交点を P' とすると、点 P' から点 $(1, 0)$ までの円弧の長さは $\frac{vt}{a}$ だから、点 P' の座標は $(\cos(\frac{vt}{a}), \sin(\frac{vt}{a}))$ と表せる。 $\omega = \frac{v}{a}$ と置くと、点 P' の座標は $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ となるので、等速円運動する点 P は $(x, y) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t))$ と表わすことができる。このとき ω を**角速度**という。

上述の xy 平面上の等速円運動を空間の位置ベクトルで表わすと、 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ と表せる。このとき、速度ベクトル、加速度ベクトルについては、

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ a\omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -a\omega^2 \cos(\omega t) \\ -a\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

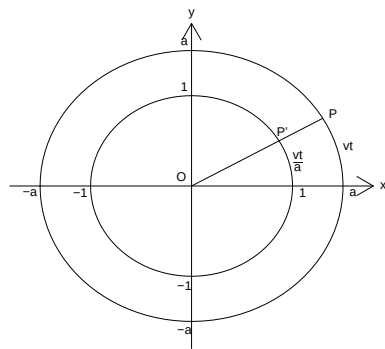


図 3.3 等速円運動

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ a\omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2\omega \end{pmatrix}$$

がなりたつ。

$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ と表せる数直線上の運動を**単振動**といい、 A を**振幅**、 ω を**角振動数**、 α を**初期位相**という。この単振動について、

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right) = A \sin(\omega t + 2\pi + \alpha) = A \sin(\omega t + \alpha) = x(t)$$

がなりたつので、 $\frac{2\pi}{\omega}$ を単振動の**周期**という。また、

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)$$

がなりたつ。

例 3-1、半径 a の円盤の中心 O から距離 b (ただし、 $0 < b < a$) の点 P に回転軸を通し固定する。この円盤の上方に板を水平に接するように置く。円盤を角速度 ω の等速回転運動させるとき、板の上下運動を考える (図 3-4)。

鉛直上方向に z 軸をとり、回転軸 P の高さを原点とし、板の下端の高さを z とする。OP の水平面との角度を θ とすれば、 $z = a + b \sin \theta$ となる。角速度 ω の等速回転運動は $\theta = \omega t$ だから、板の上下運動は $z = a + b \sin \omega t$ となり、角振動数 ω 、振幅 b の単振動である。

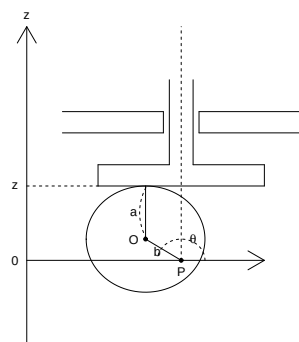


図 3.4 単振動する板

第4章

運動方程式

4.1 定数係数2階線型微分方程式

運動を記述する運動方程式は微分方程式であり、本書で度々取り扱う微分方程式は、定数係数2階線型微分方程式と呼ばれる次の形をしたものである。

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$$

ここで、 a, b, c は実数である。力学で現れる微分方程式は一般に係数が複雑で、計算に手間がかかるので、この形の微分方程式が出てくるたびに、その解を求めるのではなく、解を一般的に準備しておくことにする。微分方程式の解を求めるに当たっては、解は他になく、それだけであることを示すことも大切である。

(1) $c = 0$ と置いた微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

の解は、2次方程式 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ の2つの解を α_1, α_2 とするとき、 $x = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$ である。ここで、 c_1, c_2 は定数である。なお、 α_1, α_2 は実数でも複素数でもよい。

なぜなら、公式 $\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$ を用いると、

$$\dot{x} = c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}, \quad \ddot{x} = c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t}$$

だから、

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t} + a(c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) + b(c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t})$$

$$\begin{aligned}
&= c_1(\alpha_1^2 + a\alpha_1 + b)e^{\alpha_1 t} + c_2(\alpha_2^2 + a\alpha_2 + b)e^{\alpha_2 t} \\
&= c_1 \times 0 \times e^{\alpha_1 t} + c_2 \times 0 \times e^{\alpha_2 t} = 0
\end{aligned}$$

がなりたつからである。 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合は、このほかに解はないが、そのことは微分方程式についての一般論から導くことができる。

(2) 微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

に対して、2 次方程式 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ の解が複素数 $\alpha = \delta \pm i\gamma$, ($\gamma \neq 0$) であるとき、この微分方程式の解は $x = Ae^{\delta t} \sin(\gamma t + \beta)$ と表せる。ここで A, β は実数である。

(1) を用いると、解は

$$\begin{aligned}
x &= c_1 e^{\delta t + i\gamma t} + c_2 e^{\delta t - i\gamma t} \\
&= c_1 e^{\delta t} (\cos(\gamma t) + i \sin(\gamma t)) + c_2 e^{\delta t} (\cos(-\gamma t) + \sin(-\gamma t)) \\
&= (c_1 + c_2) e^{\delta t} \cos(\gamma t) + e^{\delta t} i(c_1 - c_2) \sin(\gamma t)
\end{aligned}$$

であるから、 $d_1 = c_1 + c_2$, $d_2 = i(c_1 - c_2)$ と置くと、 $x = e^{\delta t} (d_1 \cos(\gamma t) + d_2 \sin(\gamma t))$ となる。 d_1, d_2 が実数のときは、1 章 2 節 (2) より、 $x = Ae^{\delta t} \sin(\gamma t + \beta)$ と表せる。サイン関数でなくコサイン関数でもよい。

(3) 微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$$

の解は、この微分方程式の 1 つの解 $x = g(t)$ と、微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

の解 $x = f(t)$ によって、 $x = f(t) + g(t)$ と表せる。

なぜなら、 $x = h(t)$ を $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$ の解とし、 $f(t) = h(t) - g(t)$ と置くと、

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = (h(t) - g(t))'' + a(h(t) - g(t))' + b(h(t) - g(t))$$

$$\begin{aligned}
&= (h''(t) + ah'(t) + bh(t)) - (g''(t) + ag'(t) + bg(t)) \\
&= c - c = 0
\end{aligned}$$

がなりたつので、 $x = f(t)$ は $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ の解となり、 $h(t) = f(t) + g(t)$ と表せるからである。このように、微分方程式 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$ の解（一般解という）は、この微分方程式の一つの解（特殊解という）と微分方程式 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ の一般解の和で表せる。このことは a, b, c が定数でなく関数の場合もなりたつ。

4.2 ニュートンの運動方程式

力と運動を結びつけるのが運動方程式である。質量をもつ物体は大きさをもつが、大きさを点であるという理想化を行なった物体を **質点** という。質量 m の質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とし、その質点に作用する力ベクトルを $\mathbf{F}$ とすれば、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

がなりたつ。これを**ニュートンの運動方程式**という。力ベクトル $\mathbf{F}$ は $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t$ に依存して大きさや方向が変化しても良い。 $\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ と置けば、 $\mathbf{a}$ は加速度ベクトルであり、ニュートンの運動方程式は $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ と表せるが、これは、**ニュートンの運動の第1法則**「質点に作用する加速度は、力の方向に一致し、力の大きさに比例し、質量に反比例する」を数式で表わしたものである。ただし、ニュートンの運動方程式においては比例定数が1になるような力の単位を用いる。すなわち、質量1 kgの質点に1 m/s²の加速度を生じる力を1 **ニュートン** (N) とする。また、質量1 gの質点に1 cm/s²の加速度を生じる力を1 **ダイン** (dyne ダイン) とする。ニュートンを用いる場合を **MKS** 単位系 (meter-kilogram-second) といい、ダインを用いる場合を **CGS** 単位系 (centimeter-gram-second) という。

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2 = 10^3 \text{ g} \times 10^2 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ g cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyne}$$

の関係がある。ニュートンの運動方程式は2階の常微分方程式と呼ばれるもの

である。

特に、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ の場合、方程式 $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}$ をみたすのは、 $\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$ のみであり、これは、等速直線運動、あるいは、静止 ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$ のとき) 状態である。つまり、**ニュートンの運動第2法則 (慣性の法則)** 「力を受けない質点は、静止したままであるか、等速直線運動を行なう」がなりたつ。

ベクトルを成分を用いて表わすと、ニュートンの運動方程式は

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

だから、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

となる。以下、運動を全空間で見ることもあるが、1つあるいは2つの変数方向だけで見ることもある。

4.3 重力と落下運動

質量 m の質点には、万有引力により地球の中心に向かう大きさ mg の重力がかかるので、鉛直上方向を z 軸とすると、この質点はニュートンの運動方程式

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

である (図 4-1)。 x 軸成分 $m\ddot{x} = 0$ から m を消去した $\ddot{x} = 0$ を積分すると、

$$\dot{x} = \int 0 \, dt = v_x, \quad (v_x \text{ は定数})$$

となり、さらにこれを積分すると、

$$x = \int v_x dt = v_x t + x_0, \quad (x_0 \text{は定数})$$

を得る。 y 軸成分 $m\ddot{y} = 0$ から同様に

$$y = v_y t + y_0, \quad (v_y, y_0 \text{は定数})$$

を得る。 z 軸成分 $m\ddot{z} = -mg$ から m 消去した方程式 $\ddot{z} = -g$ を積分すると、

$$\dot{z} = \int -g dt = -gt + v_z, \quad (v_z \text{は定数})$$

を得る。さらに、これを積分すると、

$$z = \int (-gt + v_z) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0, \quad (z_0 \text{は定数})$$

を得る。したがって、これらをあわせると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ v_z t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ は $t = 0$ における速度（初期速度ベクトル）で

あり、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ は $t = 0$ における位置ベクトル（初期位置）である。特に $v_x = v_y = v_z = 0$ のときは、

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

となる。

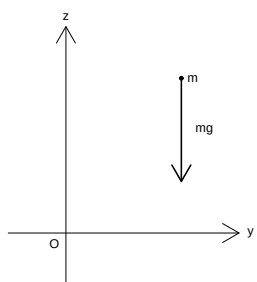


图 4.1 重力

4.4 放物運動

前節の重力による落下運動について、特に、質量 m の質点を水平面に対して斜めに投げ上げる場合を考える。投げ上げる点を原点とし、鉛直上方向を z 軸、投げ上げる方向と y 軸がなす角を θ 、初期速度ベクトルの大きさを v_0 とすれば、

初期速度ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$ となるので、時刻 t における質点の位置は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos \theta t \\ v_0 \sin \theta t \end{pmatrix}$$

となる。

y 成分 $y = v_0 \cos \theta t$ から得られる $t = \frac{y}{v_0 \cos \theta}$ を z 成分 $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t$ に代入すると、

$$z = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} y^2 + \tan \theta y$$

となり、質点の運動が描く 2 次曲線（放物線）の等式が得られた（図 4-2）。

4.5 空気抵抗があるもとでの落下運動

重力の他に空気抵抗力が働く場合の質点の落下を考える。質点の質量を m とし、ここでは鉛直方向を z 軸にとると、落下だから、 $\dot{z} > 0$ である。空気抵抗力は重力と反対方向に働き、その大きさは、落下速度が小さいときは、速度 $\dot{z}$ に比例すると考えてよいので、運動方程式は、

$$m\ddot{z} = mg - m\gamma\dot{z}$$

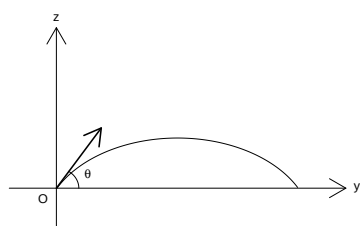


图 4.2 放物運動

と表せる (図 4-3)。ここで、 γ は比例定数である。両辺を m で割って移項すると、

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} = g$$

となる。2 次方程式 $\alpha^2 + \gamma\alpha = 0$ の解は、 $\alpha = -\gamma, 0$ だから、4-1 節 (1) より、 $\ddot{z} + \gamma\dot{z} = 0$ の一般解は、 $z = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 e^{0t}$ である。 $z = \frac{g}{\gamma}t$ が $\ddot{z} + \gamma\dot{z} = g$ の特殊解だから、4-1 節 (3) より、その一般解は

$$z = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 + \frac{g}{\gamma}t$$

となる。両辺を微分すると

$$\dot{z} = -c_1 \gamma e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma}$$

となり、 t を大きくすると、右辺の第 1 項は急速に 0 に近づくので、落下速度 $\dot{z}(t)$ は一定速度 $\frac{g}{\gamma}$ に近づく。空気抵抗が無いときは落下速度が大きくなり続けるが (4-3 節)、速度に応じた抵抗力が働くと速度が抑えられるという結果が得られた。

4.6 斜面上の落下運動

水平面と角度 θ をなす傾斜面を滑り落ちる質量 m の質点の運動を考える。質点には、鉛直下方に重力 mg が働く。また、質点が斜面上に束縛されていることから、斜面と垂直な方向に**垂直抗力**が働く。垂直抗力を N とする (図 4-4)。さらに、物体 (質点) と斜面との間に**摩擦力**が働くことが考えられる。ただし、摩擦力が無視できるくらい小さい場合と、無視できない場合がある。無視できる場合を**なめらかな斜面**といい、る無視できない場合を**あらい斜面**という。

まず、なめらかな斜面の場合を考える。斜面に沿って x 軸をとり、それに垂直に y 軸をとる。重力の x 成分は $mg \sin \theta$ であり、 y 成分が $-mg \cos \theta$ だから、ニュートンの運動方程式は

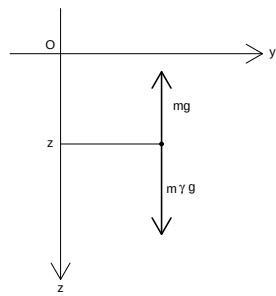


図 4.3 空気抵抗がある落下

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \sin \theta \\ N - mg \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。質点が斜面上に束縛されていることから、すべての t で $y = 0$ だから、 $\ddot{y} = 0$ となる。したがって、 $N = mg \cos \theta$ がなりたつ。 x 軸方向の運動については、方程式 $\ddot{x} = g \sin \theta$ を 2 回積分することによって、

$$x = g \sin \theta t^2 + c_1 t + c_2$$

を得る。2 つの定数 c_1, c_2 は初期条件 $\dot{x}(0), x(0)$ の値によって定まる。

次に、あらい斜面の場合を考える。傾斜角 θ が小さい場合は摩擦力によって質点は滑らない（これを**静摩擦**という）。 θ が大きくなると、質点は滑り始める。そのときの摩擦力を F とすれば、 F は斜面に沿って働き、垂直抗力 N に比例し、 $F = \mu N$ と表せる。ここで、 μ は**動摩擦係数**と呼ばれ、物体と斜面の両方の材質などによって定まり、実験によって測定できる。 $N = mg \cos \theta$ だったから、ニュートンの運動方程式は、

$$mg\ddot{x} = mg \sin \theta - F = mg \sin \theta - \mu N = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

となる。これより、 $\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ が得られるから、これを 2 回積分すると、

$$x = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)t^2 + c_1 t + c_2$$

となる。2 つの定数 c_1, c_2 は初期条件 $\dot{x}(0), x(0)$ の値によって定まる。このように、落下運動は物体の質量の大きさに関係ないが、このことを発見したガリレオは、実際は斜面を使って落下運動の実験をしたという。

4.7 ばねの単振動

ばねに力をかけたときの伸びの長さは力の大きさに比例するので、伸びたばねが縮もうとする力 $-F$ の大きさは伸びた長さ w に比例する。したがって、

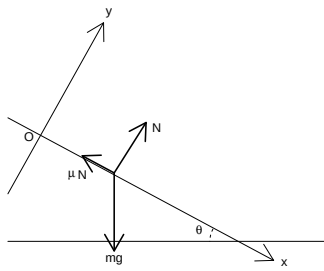


図 4.4 斜面上の落下

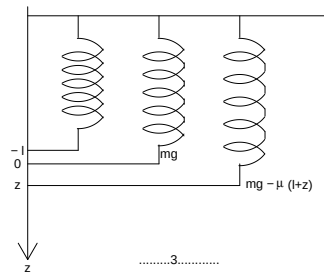


図 4.5 ばね

$-F = \mu w$ と表せる。これは、 x が負のとき、つまり、縮んだときもなりたつ。これを**フックの法則**という。比例定数 μ はばねに依存する。ばねに質量 m の質点をつり下げてつり合ったときのばねの伸びを ℓ とすれば、 $mg = \mu\ell$ がなりたつ。このつり合ったときの質点の位置を z 軸の原点 O とする。ばねを z の位置まで伸ばしたとき、質点にかかる力は、重力の mg とばねからの力 $-\mu(\ell + z)$ だから、ニュートンの運動方程式

$$m\ddot{z} = mg - \mu(\ell + z) = \mu\ell - \mu(\ell + z) = -\mu z$$

がなりたつ (図 4-5)。これより方程式

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{m}z$$

を得る。

2 次方程式 $\alpha^2 + \frac{\mu}{m} = 0$ の解は、 $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{\mu}{m}}$ だから、4-1 節 (2) の結果より、一般解は、

$$z = A \sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{m}}t + \alpha\right)$$

と表せるので、解は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$ の単振動である。

4.8 復元力による単振動

一般に、質量 m の質点が角振動数 ω の単振動しているとき、 $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ より、 $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$ だから、ニュートンの運動方程式

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x$$

をみたす。これは大きさが $F = -m\omega^2 x$ の力を、すなわち、原点 O からの距離 x に比例する大きさで、つねに原点 O へ向けた力を受けて運動していることになる。この力を**復元力**という。前節のバネの単振動も復元力によるものであるが、一般に、単振動は何らかの復元力を受けて運動していると考えることが

できる。弦の振動、建造物の振動など世の中には振動する現象がいろいろあり、必ずしもばねのような単振動ではないが、一般には複数の単振動の合成と考えることができる。

4.9 復元力に振動する外力が加わった場合

質量 m の質点が x 軸上を復元力 $-m\omega^2 x$ と外力 $F(t)$ とを受けて運動するとき、ニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x + F(t)$$

となる。特に外力が $F(t) = mF_0 \sin \omega_0 t$ と角振動数 ω_0 で振動する場合を考える。この場合、方程式は

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + F_0 \sin \omega_0 t$$

となる。まず、 $\omega_0 \neq \omega$ の場合に、この方程式の特殊解を求めるために、 $x = B \sin \omega_0 t$ という形をした解をもつものとする。 $\dot{x} = B\omega_0 \cos \omega_0 t$, $\ddot{x} = -B\omega_0^2 \sin \omega_0 t$ だから、

$$-B\omega_0^2 \sin \omega_0 t = -\omega^2 B \sin \omega_0 t + F_0 \sin \omega_0 t$$

がなりたち、 $B(\omega^2 - \omega_0^2) = F_0$ が得られ、 $B = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ となるので、 $x = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t$ が運動方程式の特殊解である。4-1 節 (2) より、方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ の一般解は $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ であり、4-1 節 (3) より、もとの運動方程式の一般解は

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t$$

である。この解は ω_0 が ω に近いと第 2 項の振幅が大きくなる。

そこで、 $\omega_0 = \omega$ の場合を考える。方程式は

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + F_0 \sin \omega t$$

となる。この方程式の特殊解を求めるために、 $x = Bt \cos \omega t$ という形の解をもつものとして、求めると、 $B = -\frac{F_0}{2\omega}$ が得られ、 $x = -\frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$ が特殊解である。さらに、4-1 節 (2),(3) より、

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$$

が一般解である。この解は t が大きくなるとき、第 2 項の振幅が無限に大きくなる、つまり、揺れが次第に大きくなる。外力がかからないときの運動方程式の解の角振動数 ω に、外力の角振動数 ω_0 が一致するとき起こるこのような現象を **共鳴** という。

4.10 復元力に抵抗力が加わった場合

質量 m の質点が x 軸上を復元力 $-m\omega^2 x$ と摩擦などの抵抗力とを受けて運動する場合を考える。摩擦などの抵抗力は速度 $\dot{x}$ に比例すると考えて良いので、 $-2m\gamma\dot{x}$ で表わせば、ニュートンの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$

となる。したがって、微分方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

を得る。2 次方程式 $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$ の解は、 $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ である。

まず、 $\gamma < \omega$ の場合を考える。 $\alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ だから、4-1 節 (2) より、解は

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t$$

となる。単振動 $A \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t$ に $e^{-\gamma t}$ を掛けたものであり、 $e^{-\gamma t}$ は t が大きくなるとき 0 に近づくので、単振動しながら 0 に近づく解が得られた。

次に、 $\gamma < \omega$ の場合を考える。 $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ と置くと、 α_1, α_2 はともに正数であり、4-1 節 (1) より、

$$x = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}$$

が一般解である。この解は t が大きくなるとき 0 に近づく。

抵抗力の係数 γ の大きさにより、 $\gamma < \omega$ のときは振動しながら 0 に近づく解が、 $\gamma > \omega$ のときは振動しないで 0 に近づく解が得られた。抵抗が大きいと振動もしなくなるのである。

4.11 単 振 り 子

質量が無視でき伸縮しない糸の端に、質点をくくりつけ、他の端を固定して揺らすことができるものを**単振り子**という (図 4-6)。糸の長さを ℓ 、質点の質量を m とする。鉛直上方向を z 軸とし、原点 O に糸を固定し、質点は yz 平面を運動できるものとする。糸と z 軸の角度を θ とすると、質点には、糸の張力 T と重力 $-mg$ が作用するから、運動方程式は

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta \\ T \cos \theta - mg \end{pmatrix}$$

である。 $m\ddot{y} = -T \sin \theta$, $m\ddot{z} = T \cos \theta - mg$ から T を消去すれば、

$$m\ddot{y} \cos \theta + m\ddot{z} \sin \theta = -mg \sin \theta$$

$$\ddot{y} \cos \theta + \ddot{z} \sin \theta = -g \sin \theta$$

を得る。 $y = \ell \sin \theta$, $z = -\ell \cos \theta$ だから、

$$\dot{y} = \ell \cos \theta \dot{\theta}, \quad \ddot{y} = -\ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos \theta \ddot{\theta}$$

$$\dot{z} = \ell \sin \theta \dot{\theta}, \quad \ddot{z} = \ell \cos \theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin \theta \ddot{\theta}$$

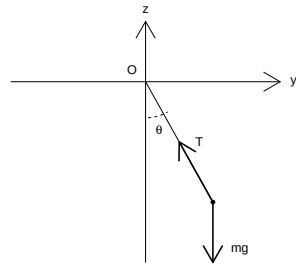


図 4.6 単振り子

がなりたつので、

$$(-\ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos \theta \ddot{\theta}) \cos \theta + (\ell \cos \theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin \theta \ddot{\theta}) \sin \theta = -g \sin \theta$$

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

となり、 θ についての運動方程式

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

を得る。

θ が 0 に近いとき近似式 $\sin \theta \approx \theta$ がなりたつ (1-13 節) から、この運動方程式は近似的に復元力についての運動方程式と同じ形 $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta$ をしているので、単振り子の角 θ は単振動に似た運動をする。

4.12 運動量と角運動量

質量 m の質点が運動しているとき、質量 m と速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ の積

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$$

を**運動量ベクトル**、あるいは、**運動量**という。 $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}}$ だから、ニュートンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}$$

と1階の微分方程式として表せる。また、位置ベクトル $\mathbf{r}$ と運動量ベクトル $\mathbf{p}$ の外積

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

を質点が O のまわりにもつ**角運動量ベクトル**という。角運動量ベクトルと、位置ベクトル $\mathbf{r}$ と力ベクトル $\mathbf{F}$ の外積ベクトルである原点に関する力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ について

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N}$$

がなりたつ。なぜなら、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

だからである。

運動量を用いたニュートンの運動方程式 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ の両辺を区間 $[t_1, t_2]$ で定積分すると、

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

が得られる。この等式の右辺を**力積**という。力積によって運動量の変化が与えられる。力ベクトル $\mathbf{F}$ が大きさ F の一定方向のベクトルの場合は、力積は $F(t_2 - t_1)$ となる。

ボールをバットで打った場合のような極めて短時間に大きな力が加わるものを**撃力**という。撃力については、力とそれがかった時間を区別することなく力積でもって運動を記述することもある。

第5章

エネルギー

5.1 仕事

曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ に沿って、力ベクトル $\mathbf{F}(t)$ が働くとき、

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

をこの力が曲線 C に沿ってした**仕事**という (図 5-1)。

特に一定方向の大きさ F の力が同じ方向に距離 ℓ だけ働いたときする仕事は、速度に関係なく

$$W = F\ell$$

となる。なぜなら、 $\mathbf{u}$ を $\mathbf{F} = F\mathbf{u}$ をみたす大きさ 1 のベクトルとし、同じ方向を向く長さ ℓ の直線を $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{u}$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ とすれば、 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}(t)\mathbf{u}$ だから、

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) dt$$

であり、

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = F\mathbf{u} \cdot \dot{x}(t)\mathbf{u} = F\dot{x}(t)|\mathbf{u}|^2 = F\dot{x}(t)$$

となるので、

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} F\dot{x}(t) dt = F\ell$$

がなりたつからである。

例 5-1、質量 m の質点が、距離 ℓ だけ落下したとき、重力ベクトルの大きさは

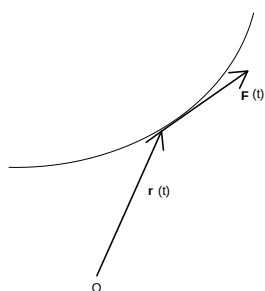


図 5.1 仕事 $W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$

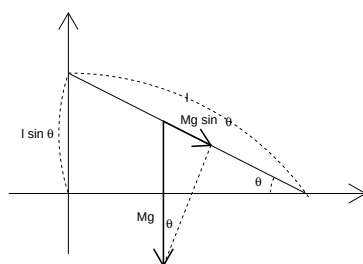


図 5.2 斜面を滑り降りる仕事

mg だから、重力がする仕事は $mg\ell$ である。

質点が滑らかな束縛を受けて運動するとき、束縛力 $\mathbf{N}$ は、変位ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ と直交する、すなわち、 $\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ がなりたつので、

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 0 dt = 0$$

となる。すなわち、束縛力は質点の移動に対して仕事をしない。

例 5-2、質量 m の質点が、傾斜角 θ の斜面を距離 ℓ だけ滑り降りるとき、質点に働く力がする仕事は、質点に働く束縛力の移動方向成分は 0 だから、質点に働く重力の移動方向の力 $mg \sin \theta$ と移動距離 ℓ の積 $W = \ell \times mg \sin \theta$ となる。これは、重力の大きさ mg と降下距離 $\ell \sin \theta$ の積に一致する (図 5-2)。

5.2 保 存 力

力のベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ は、 $-\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ をみたす関数 $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ が存在するとき、**保存力**という。このとき U を**ポテンシャル**、あるいは、**ポテンシャルエネルギー**という。 U がポテンシャルであるとき、任意の定数 c について、 $U + c$ もポテンシャルであるので、基準点を定めて、基準点におけるポテンシャルの値を定めることによって、各点のポテンシャルの値を考えることができる。関数 $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ に対して、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix}$ を記号 ∇U で表わす。数学記号 ∇ は**ナブラ**と読む。この記号を用いると U が保存力 $\mathbf{F}$ のポテンシャルであるとは、 $-\nabla U = \mathbf{F}$ をみたすことである。

例 5-3、質量 m の質点にかかる重力ベクトル $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ は、 $U = mgz$

について、

$$-\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

がなりたつので、保存力である。

例 5-4、質量 m の質点にかかる復元力 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega^2 z \end{pmatrix}$ は、 $U = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$

について、

$$-\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega^2 z \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

がなりたつので、保存力である。

例 5-5、力ベクトル場 $\mathbf{F} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}$ は、 $U = -\frac{1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について、

$$-\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

がなりたつので、保存力である。

例 5-6、力ベクトル場 $\mathbf{F} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r}$ は、 $U = -\frac{1}{2|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ について、

$$-\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{-2x}{2(x^2+y^2+z^2)} \\ \frac{-2y}{2(x^2+y^2+z^2)} \\ \frac{-2z}{2(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

がなりたつので、保存力である。

保存力 $\mathbf{F}$ のポテンシャル U と曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

がなりたつから、 $\mathbf{F}$ の曲線 C に沿っての仕事は

$$\begin{aligned}W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) dt = -U(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= U(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) - U(x(t_2), y(t_2), z(t_2)) = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2))\end{aligned}$$

となる。すなわち、保存力がする仕事 W はポテンシャル U の曲線 C の始点における値と終点における値の差になり、曲線の途中経路に関係しない。

5.3 力学的エネルギー保存則

運動している質量 m の質点について、

$$K = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2$$

をその運動エネルギーという。ポテンシャルが U の保存 $\mathbf{F}$ のもとで運動している質量 m の質点について、

$$E = K + U$$

をその力学的エネルギーという。

運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ 、および、 $\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{2} + \frac{d}{dt}U = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= (m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0\end{aligned}$$

がなりたつので、 $E = \text{一定}$ となる。このことを**力学的エネルギー保存則**という。力学的エネルギー保存則の等式 $\frac{d}{dt}E = 0$ は1階の微分方程式とみることができる。力学的エネルギー保存則のほうから運動の性質を見ることが、さらには、運動方程式を得ることができることもある。そうした例を以下に示す。

例 5-7、質量 m の質点が z 軸方向に落下するとき、運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ であり、ポテンシャルエネルギーは mgz だから、力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

となる。 E は一定だから、降下速度 $|\dot{z}|$ が大きくなると位置 z が下がり、位置 z が下がると速度 $|\dot{z}|$ が大きくなる、つまり、運動エネルギーが大きくなる。

また、 $\dot{z}^2 = \frac{2E}{m} - 2gz$ であり、 $\dot{z} < 0$ だから、 $\dot{z} = -\sqrt{\frac{2E}{m} - 2gz}$ となり、

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{E}{mg} - z}} = -\sqrt{2g}dt$$

を得る。両辺を積分すると

$$-2\sqrt{\frac{E}{mg} - z} = -\sqrt{2g}t + C$$

を得る。 $t = 0$ で $z = \frac{E}{mg}$ とすれば、 $C = 0$ となり、 $4(\frac{E}{mg} - z) = 2gt^2$ より、落下運動の式 $z = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{E}{mg}$ を得る。すなわち、力学的エネルギー保存則から、落下運動の式が得られた。

例 5-8、質量 m の質点到 z 軸方向に復元力 $-m\omega^2 z$ が働くとき、運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ であり、ポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{2}m\omega^2 z^2$ だから、力学的エネルギー

ギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$$

となる。 E は一定だから、その値を $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ とおけば、

$$\omega^2 A^2 - \omega^2 z^2 = \dot{z}^2 \geq 0$$

だから、 $-A \leq z \leq A$ となる。つまり、 z がこの区間の両端に近いとき、運動エネルギーは小さく、ポテンシャルエネルギーは大きく、 z がこの区間の中央に近いとき、運動エネルギーは大きく、ポテンシャルエネルギーは小さくなる。

$-1 \leq \frac{z}{A} \leq 1$ だから、 $\sin w = \frac{z}{A}$ と置くと、 $z = A \sin w$ となるので、

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 &= (A \cos w \times \dot{w})^2 = A^2(1 - \sin^2 w)\dot{w}^2 \\ &= A^2(1 - \frac{z^2}{A^2})\dot{w}^2 = \dot{z}^2 = (A^2 - z^2)\dot{w}^2 \end{aligned}$$

がなりたつ。したがって、 $(A^2 - z^2)\dot{w}^2 = \omega^2(A^2 - z^2)$ となり、 $\dot{w} = \pm\omega$ を得る。両辺を積分すると、 $w = \pm\omega t + \alpha$ となり、単振動の式 $z = A \sin(\pm\omega t + \alpha)$ を得る。すなわち、力学的エネルギー保存則から、単振動の式が得られた。

例 5-9、 単振り子の運動曲線の法線方向は糸の方向であり、質点に働く力の法線方向成分は $T - mg \cos \theta$ である。1-14 節で示したように、質点の加速度ベクトルの法線方向成分は $\frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{\ell}$ だから、運動方程式

$$m \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{\ell} = T - mg \cos \theta$$

がなりたつ。これより張力について

$$T = m \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{\ell} + mg \cos \theta$$

の関係式がなりたつ (図 5-3)。単振り子の糸の張力 T は束縛力であり、質点の運動方向に垂直に働くので仕事をしない。したがって、空気抵抗などが働かない限り、力学的エネルギー保存則が働く。運動エネルギーは $\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2$ であり、ポテンシャルエネルギーは mgz だから、力学的エネルギーは

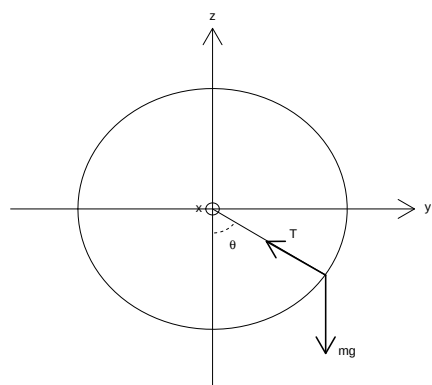


図 5.3 単振り子の張力

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + mgz$$

である。質点の最下点は $z = -\ell$ であり、そのときの速度を $|\dot{\mathbf{r}}| = v_0$ とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell$$

がなりたつ。これより得られる $|\dot{\mathbf{r}}|^2 = v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos \theta)$ を先に得た単振り子の張力の関係式に代入すると、

$$T = \frac{m}{\ell}\{v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos \theta)\} + mg \cos \theta = \frac{m}{\ell}\{v_0^2 + g\ell(3 \cos \theta - 2)\}$$

を得る。したがって、 $v_0^2 > 5g\ell$ がみたされるならば、常に $T > 0$ となるので、糸はたるむことなく、単振り子はくるくる回り続ける。そうでなければ、振り子運動するか、 $T < 0$ が起り、糸は弛んで質点は落下する。

例 5-10, 静止している球への別の球の衝突

直線状の水平で滑らかな溝に静止して置かれた球 B に速度 v の球 A を衝突させる。球 B の質量は球 A の質量 m の p 倍である pm とする。衝突後の 2 つの球の速度をそれぞれ v_A, v_B とする。運動量保存則から $mv = mv_A + pmv_B$ になりたつ。さらに、衝突の前後で運動エネルギーが変化しないとする（これを**完全弾性衝突**という）と、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}pmv_B^2$$

になりたつ。これら 2 つの関係式から得られる $v_A + pv_B = v$, $v_A^2 + pv_B^2 = v^2$ を v_A, v_B を未知数として、 $p \neq 0, v_B \neq 0$ を用いて解くと、

$$v_A = \frac{1-p}{1+p}v, \quad v_B = \frac{2}{1+p}v$$

を得る。例えば、 $p = 1$ のとき、すなわち、2 つの球が同じ質量のときは、 $v_A = 0, v_B = v$ となり、球 A は静止し、球 B は衝突前の球 A の速度になる。例えば、 $p = 2$ のとき、すなわち、球 B の質量が球 A の質量の 2 倍のときは、 $v_A = -\frac{1}{3}v, v_B = \frac{2}{3}v$ となり、球 A は逆方向に運動する。例えば、 $p = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち、球 B の質量が球 A の質量の半分のときは、 $v_A = \frac{1}{3}v, v_B = \frac{4}{3}v$ となり、球 A の速度は衝突前よりも小さくなるが、球 B の速度は球 A の衝突前の速度よりも大きくなる。

5.4 力学的エネルギーの散逸

質点には、一般に、保存力 $-\nabla U$ のほかに、束縛力 $\mathbf{N}$ と摩擦や抵抗の力 $\mathbf{F}'$ が働くので、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + \mathbf{N} + \mathbf{F}'$$

となる。また、

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d}{dt}U = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

を用いると、力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U$ について、

$$\frac{d}{dt}E = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}} = (-\nabla U + \mathbf{N} + \mathbf{F}') \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}' \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

がなりたつ。 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $(t_1 \leq t \leq t_2)$ を運動方程式の解曲線とすると、束縛力 $\mathbf{N}$ と運動の接線ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ は直交するので $\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ がなりたち、束縛や抵抗の力 $\mathbf{F}'$ は接線ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ とは逆向きのベクトルであるので $\mathbf{F}' \cdot \dot{\mathbf{r}} < 0$ となる。したがって、

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}E dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}' \cdot \dot{\mathbf{r}}) dt = 0 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \dot{\mathbf{r}} dt < 0$$

となる。 $E(t_2) < E(t_1)$ となるから、力学的エネルギーは保存されずに減少する。これを**力学的エネルギーの散逸**という。散逸したエネルギーは熱エネルギーなどに変わる。したがって、力学的エネルギー保存則は、摩擦や抵抗が全くない理想的な状況のもとでなりたつ。

第6章

中心力と惑星の運動

6.1 中心力による運動の性質

$F(r)$ を $r > 0$ に対して与えられた正の値をとる 1 変数関数で r が大きくなると 0 に近づくものとする。位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点において、 $\mathbf{r}$ と逆向きで大きさ $F(|\mathbf{r}|)$ の力を与えるベクトル場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -F(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

を考える。力の大きさは原点からの距離 $|\mathbf{r}|$ だけに関係し、しかも、原点 O へ向かう力である。このような力のベクトル場を**中心力**という (図 6-1)。 $U(r) = \int_0^r F(r) dr$ と置くと、

$$\begin{aligned} -\nabla U(|\mathbf{r}|) &= -U'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{pmatrix} \\ &= -F(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

がなりたつので、このベクトル場は $U(|\mathbf{r}|)$ をポテンシャルとする保存力である。この中心力による運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -F(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

となる。位置ベクトル $\mathbf{r}$ と速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ とのベクトル積を $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ と置

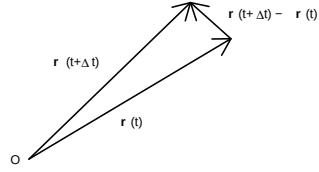


図 6.1 面積速度

く。角運動量ベクトルと同じ記号 $\mathbf{L}$ を用いているが、ここでの $\mathbf{L}$ は角運動量ベクトルにおける質量 m 外したものである。 $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ だから、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \frac{F(|\mathbf{r}|)}{m|\mathbf{r}|} \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

がなりたつので、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ は時刻 t に関係しない一定のベクトルである。このことは、質点が時刻 t に関係しない一定のベクトル $\mathbf{L}$ に垂直な平面上を運動することを意味する。また、

$$S(\Delta t) = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))|$$

と置けば、 $S(\Delta t)$ は、ベクトル $\mathbf{r}(t)$ とベクトル $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ を 2 辺とする三角形の面積であるので、 Δt を 0 に近づけたとき、 $\frac{S(\Delta t)}{\Delta t}$ が近づく値である $\frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$ を運動の面積速度という (図 6-2)。中心力による運動は $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ が一定であるので、面積速度が一定である。

6.2 中心力による運動を極座標で見る

中心力による運動は、一つの平面上の運動であるので、その運動平面を xy 平面であるとして、位置ベクトルを

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

と、極座標表示すると、

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、

$$r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) = r^2 \dot{\theta}$$

だから、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となる。したがって、中心力による運動において、 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ が一定であるという前節の結果を極座標で表わせば、 $r^2 \dot{\theta} = h$ が一定であるということである。 h は面積速度の2倍である。また、

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}|^2 &= (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta})^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta})^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \end{aligned}$$

となるので、力学的エネルギー保存則 $\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + U(|\mathbf{r}|) = E$ は、

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + U(r) = E$$

と表せる。

両辺を微分すると、

$$\frac{1}{2}m(2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2h^2}{r^3}\dot{r}) + U'(r)\dot{r} = 0$$

$\dot{r}$ で両辺を割ると、

$$m(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}) + U'(r) = 0$$

この微分方程式の解を $r = r(t)$ とすれば、 $r^2\dot{\theta} = h$ より、 $\dot{\theta} = \frac{h}{r(t)^2} \neq 0$ だから、 $\theta = \theta(t)$ は t の増加関数あるいは減少関数となり、 t は θ の関数 $t = t(\theta)$ になる。したがって、これを代入すると、 $r = r(t(\theta))$ は θ の関数である。

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} = \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

だから、これらをもとの微分方程式に代入すると、

$$\frac{mh^2}{r^2} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{mh^2}{r^3} + U'(r) = 0$$

両辺を mh^2 で割ると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r^3} + \frac{U'(r)}{mh^2} = 0$$

を得る。これが中心力による運動の極座標による方程式である。後でこの微分方程式を万有引力のポテンシャル $U(r)$ の場合について解く。

6.3 2つ質点の内力による運動

2つの質点 A, B がお互いに力（**内力**という）を及ぼし合って運動し、質点以外からの力（**外力**という）ははたらかないものとする。質点 A から質点に及ぼす力を $\mathbf{F}$ とすれば、作用反作用の法則より、質点 B が質点に及ぼす力は $-\mathbf{F}$

となる (図 6-3)。質点 A の質量を m とし、位置を $\mathbf{r}_A$ で、質点 B の質量を M とし、位置を $\mathbf{r}_B$ で表わすとき、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}}_A = -\mathbf{F}, \quad M\ddot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{F}$$

の 2 つである。ここで、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$$

と置くと、

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = -\frac{\mathbf{F}}{m}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_B = \frac{\mathbf{F}}{M}$$

だから、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_A - \ddot{\mathbf{r}}_B = -\frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{m+M}{Mm}\mathbf{F}$$

がなりたつので、

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

と置くと、

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}$$

がなりたつ。これは中心力についての運動方程式である。ただし、原点は質点 B の位置であり、質量は μ である。 μ を換算質量という。なお、

$$\mu = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}$$

だから、 M が m に比べて大きい場合は、 μ はほとんど m に等しくなる。

6.4 楕 円

次節で用いる楕円の性質を示しておく。

(1) $a > 0$, $0 \leq e < 1$ とするとき、点 $(-ae, 0)$ 、および、点 $(ae, 0)$ からの距離の和が $2a$ の点 (x, y) は、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ を描く (図 6-4)。なぜ

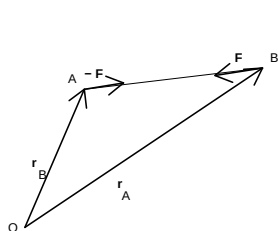


図 6.2 2つの質点間の内力

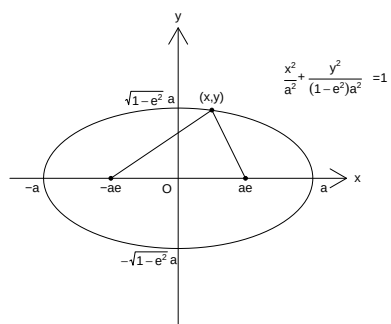


図 6.3 楕円

なら、

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} + \sqrt{(x+ae)^2+y^2} = 2a$$

より、

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+ae)^2+y^2}$$

両辺を2乗すると

$$(x-ae)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+ae)^2+y^2} + (x+ae)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+ae)^2+y^2} = 4a^2 + 4aex = 4a(a+ex)$$

$$(x+ae)^2+y^2 = a^2 + 2aex + e^2x^2$$

$$(1-e^2)x^2+y^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2)$$

これより、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ が得られるからである。

$0 < e < 1$ とするとき、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ について、 a を**長径**、 $\sqrt{1-e^2}a$ を**短径**、 e を**離心率**、点 $(-ae, 0)$ 、および、点 $(ae, 0)$ を**焦点**という。

(2) 点 $(ae, 0)$ を原点とする極座標 $x - ae = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ により表せる

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ は、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ をみたす (図 6-5)。なぜなら、

$$r + re \cos \theta = r(1 + e \cos \theta) = a(1 - e^2)$$

$$r = a(1 - e^2) - re \cos \theta = a(1 - e^2) - e(x - ae)$$

$$(x - ae)^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$= a^2(1 - e^2)^2 - 2ae(1 - e^2)(x - ae) + e^2(x - ae)^2$$

$$(1 - e^2)(x - ae)^2 + 2ae(1 - e^2)(x - ae) + y^2 = a^2(1 - e^2)^2$$

$$(x - ae)^2 + 2ae(x - ae) + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2 - a^2e^2$$

$$(x - ae + ae)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2$$

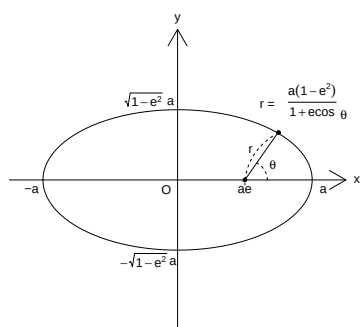


図 6.4 楕円の極座標表示

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$$

を得る。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ は、 $1-e^2 > 0$ のとき、楕円であり、 $1-e^2 < 0$ のとき、双曲線である。

6.5 万有引力による惑星の運動

物体にはお互いに引き合う万有引力が働く。質量 m の質点と質量 M の質点とが距離 r 離れているときの万有引力の大きさ $F(r)$ は

$$F(r) = G \frac{mM}{r^2}$$

である。ここで G は**万有引力定数**と呼ばれる定数であり、

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

である。万有引力は一方の質点を原点とする中心力であり、したがって、保存力でもあるが、そのポテンシャル $U(r)$ は

$$U(r) = \int G \frac{mM}{r^2} dr = -\frac{GmM}{r}$$

となる。2つの質点にかかる外力を無視した運動方程式を極座標で表わし、6-3節で求めた半径 r の角の大きさ θ についての関数 $r(\theta)$ がみたすべき微分方程式を考える。しかも、質量 M が m よりはるかに大きい場合を考え、計算式を簡単にするため、換算質量 μ は質量 m に等しいとすれば、それは

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r^3} + \frac{GM}{h^2 r^2} = 0$$

となる。因みに、太陽系の最大の惑星である木星の質量は、太陽の質量の約 $\frac{1}{1000}$ であり、地球の質量は太陽の質量の 33 万分 1 以下であり、月の質量は地球の質量の約 $\frac{1}{100}$ である。両辺に r^2 をかけると、

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{h^2}$$

となり、 $u = \frac{1}{r}$ と変数変換すれば、 $\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}$ だから、

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

が得られる。これは 4-8 節の復元力についての運動方程式と同じ形をしている。 $u = \frac{GM}{h^2}$ はこの微分方程式の特殊解であり、2 次方程式 $\alpha^2 + 1 = 0$ の解は $\alpha = \pm i$ だから、4-1 節 (2),(3) より、

$$u = \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta + \theta_0)$$

がこの微分方程式の解である。ここではコサイン関数を用いているが、定数 θ_0 取り替えればサイン関数を用いることもできる。さらに、

$$e = \frac{h^2 A}{GM}, \quad a = \frac{h^2 GM}{G^2 M^2 - h^4 A^2}$$

と置くと、

$$a(1 - e^2) = \frac{h^2 GM}{G^2 M^2 - h^4 A^2} \left(1 - \frac{h^4 A^2}{G^2 M^2}\right) = \frac{h^2}{GM}$$

$$a(1 - e^2) \frac{1}{r} = \frac{h^2}{GM} u = 1 + \frac{h^2 A}{GM} \cos(\theta + \theta_0) = 1 + e \cos(\theta + \theta_0)$$

がなりたつので、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)}$$

となる。6-3 節で示したように、 $1 - e^2 > 0$ がなりたつときは、上の等式は楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1$ の、焦点 $(ae, 0)$ を原点とした極座標表示である。また、 $1 - e^2 < 0$ がなりたつときは、双曲線の極座標表示である。

面積速度は $\frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2}$ だったから、楕円運動の周期 T は、楕円の面積 πab を面積速度で割った

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

である。 $h^2 = GMa(1 - e^2)$ だから、

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1 - e^2)}{GMa(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

となる。この等式は、周期 T の 2 乗は長径 a の 3 乗に比例することを意味する。

ケプラーは観測データから、惑星の運動は「楕円運動である」、「面積速度は一定である」、「公転周期の 2 乗が長径の 3 乗に比例する」ことを発見したが、本章の議論により、これらの 3 つの法則が理論的に示されたことになる。

第7章

座標系の取り替え

運動を調べるためには、極座標による変数など運動の特質に応じた変数を用いることが有効である。さらに、運動の特質に応じた座標系を取り替えて調べるが必要になることもある。座標系は軸単位ベクトルで表わすことができる。

7.1 並進座標系

軸単位ベクトル $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の原点 O を、ベクトル $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ だけ動かした点を O' とし、 O' を原点とする軸単位ベクトル $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ は、 $\mathbf{i}'$ は $\mathbf{i}$ に平行、 $\mathbf{j}'$ は $\mathbf{j}$ に平行、 $\mathbf{k}'$ は $\mathbf{k}$ に平行とする。このような軸単位ベクトル $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ による座標系を並進座標系という (図 7-1)。座標系 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ による位置ベクトル $\mathbf{r}$ の点の並進座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ による位置ベクトルを $\mathbf{r}'$ とすれば、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

の関係があるので、 $\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_0$ がなりたつ。したがって、質量 m の質点の座標系 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ における運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ は並進座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ において

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_0$$

となる。つまり、座標系を取り替えることによって運動方程式に $-m\ddot{\mathbf{r}}_0$ の項が

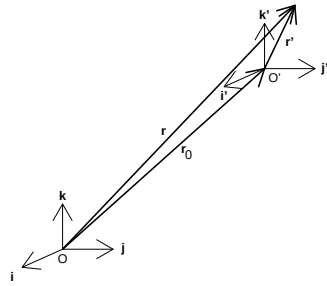


図 7.1 並進座標系

加わるが、これは質点や物体に加わる力ではなく、座標系の取り換えによって加わる見かけ上の力である。この見かけ上の力を**慣性力**という。加速度をもって動く並進座標系においては、このような見かけ上の力を入れた運動方程式を考えるが必要になる。

例 7-1, 加速度 a で昇降しているエレベータ内の質量 m の質点を考える。 $a > 0$ ならば、エレベータは上昇しており、 $a < 0$ ならば下降している。質点がエレベータに括り付けられていれば質点の運動はエレベータの運動と同じであるので括り付けられていないものとする。エレベータの床面 O' を原点とする並進座標系で鉛直上方向を z 軸とすると、質点の運動方程式は

$$m\ddot{z}' = -mg - am$$

となり、エレベータ内の質点には鉛直方向に $-m(g+a)$ の力がかかることになる。したがって、 $a = -g$ のときは、無重力であり、 $a > 0$ のときは、 $-(g+a)m < -gm$ となり、過重力である。なお、これはエレベータの動きに並進している座標系

からみたものであり、エレベータの外部の座標系からみれば、この質点にかかる力は $-mg$ である。

この質点エレベータの天井から長さ ℓ の糸でつるされた単振り子だとすると、エレベータの床面を原点とする並進座標系を考えることが必要になり、糸と鉛直方向との角度 ϕ についての運動方程式は

$$\ddot{\phi} = -\frac{g+a}{\ell} \sin \phi$$

となる (4-13 節)。

7.2 単振動する台に吊された単振り子の運動

O を原点とする座標軸 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の $\mathbf{j}$ 軸上を動く台があり、その台の 1 点 O' に長さ ℓ で質量 m の単振り子がつり下げられているとする。点 O' の運動が原点 O を中心とする振幅 B で角振動数 ω_0 の単振動だとすると、点 O' の位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ について、

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ B \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 B \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 B \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

がなりたつ。糸と鉛直下方との角度を θ とすると、質点には、糸の張力 T と重力 $-mg$ が作用するから、質点の運動方程式を座標軸 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ による位置ベクトルで表わすと、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta \\ -mg + T \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる (図 7-2)。したがって、O' を原点とする並進座標軸 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ による質

点の位置ベクトル $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ についての運動方程式は

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x}' \\ m\ddot{y}' \\ m\ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -T \sin \theta + m\omega_0^2 B \cos \omega_0 t \\ -mg + T \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。これより

$$m\ddot{y}' = -T \sin \theta + m\omega_0^2 B \cos \omega_0 t$$

$$m\ddot{z}' = -mg + T \cos \theta$$

を得る。この2つの等式から、 T を消去すると、

$$m(\ddot{y}' \cos \theta + \ddot{z}' \sin \theta) = m\omega_0^2 B \cos \omega_0 t \cos \theta - mg \sin \theta$$

を得る。一方、

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \sin \theta \\ \ell \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \cos \theta \dot{\theta} \\ -\ell \sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos \theta \ddot{\theta} \\ \ell \cos \theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin \theta \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

だから、

$$\ddot{y}' = -\ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos \theta \ddot{\theta}, \quad \ddot{z}' = \ell \cos \theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin \theta \ddot{\theta}$$

を得る。これより、

$$\ddot{y}' \cos \theta + \ddot{z}' \sin \theta = \ell \ddot{\theta}$$

がなりたつから、

$$m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m\omega_0^2 B \cos \omega_0 t \cos \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{\omega_0^2 B}{\ell} \cos \omega_0 t \cos \theta$$

を得る。単振り子の振動角 θ が 0 に近い場合は、関数の近似式 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ を用いると、

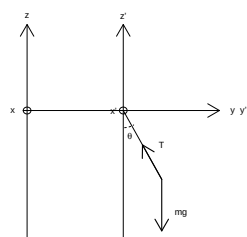


図 7.2 図 7-2 単振動する台に吊された振り子

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta + \frac{\omega_0^2 B}{\ell} \cos \omega_0 t$$

が得られる。これは強制振動の方程式であり、4-8 節で見たように、この方程式の解は、台の運動の角振動数 ω_0 が単振り子の角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ に等しいときは共鳴を起す。

7.3 ガリレイ変換

原点のずらしが $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t$ で表せる等速度直線運動している並進座標系において、 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ とすれば、

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t$$

がなりたつ。これを**ガリレイ変換**という。ガリレイ変換において、 $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$ がなりたっている、つまり、原点のずらしに加速度の項が無いので、運動方程式

$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ は $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}$ となり、形が変わらない。このことをニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変であるという。しかし、速度が速いガリレイ変換に対して運動は不変とはならない。そのときでも光速は変わらないとして、アインシュタインの相対性理論はつくられた。

いろいろな座標系を考えると、運動している座標系を**運動系**といい、静止している座標系を**静止系**という。また、慣性の法則がなりたつ座標系、つまり、力が加わらなければ、静止するか等速度直線運動をする座標系を**慣性系**という。

7.4 回 転 座 標 系

静止座標系 $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ を

$$\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{k}$$

とする。すなわち、座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ の原点は座標系 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の原点とは変わらず z 軸も同じで、 z 軸を回転軸として角速度 ω で回転する動座標系とする (図 7-3)。これより、

$$\dot{\mathbf{i}}' = \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \mathbf{j}', \quad \dot{\mathbf{j}}' = \begin{pmatrix} -\omega \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega \mathbf{i}', \quad \dot{\mathbf{k}}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となるので、 $\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$ とするとき、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}'\mathbf{i}' + x'\dot{\mathbf{i}}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + \dot{z}'\mathbf{k}' + z'\dot{\mathbf{k}}'$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{x}'\mathbf{i}' + x'\omega\mathbf{j}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + y'(-\omega)\mathbf{i}' + \dot{z}'\mathbf{k}' \\
&= (\dot{x}' - \omega y')\mathbf{i}' + (\dot{y}' + \omega x')\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' \\
\ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{x}' - \omega\dot{y}')\mathbf{i}' + (\dot{x}' - \omega y')\dot{\mathbf{i}}' + (\ddot{y}' + \omega\dot{x}')\mathbf{j}' + (\dot{y}' + \omega x')\dot{\mathbf{j}}' + \ddot{z}'\mathbf{k}' + \dot{z}'\dot{\mathbf{k}}' \\
&= (\ddot{x}' - \omega\dot{y}')\mathbf{i}' + (\dot{x}' - \omega y')\omega\mathbf{j}' + (\ddot{y}' + \omega\dot{x}')\mathbf{j}' + (\dot{y}' + \omega x')(-\omega)\mathbf{i}' + \ddot{z}'\mathbf{k}' \\
&= (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\mathbf{i}' + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}'
\end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{F} = X'\mathbf{i}' + Y'\mathbf{j}' + Z'\mathbf{k}'$ とすると、質量 m の質点の運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ より、

$$m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\mathbf{i}' + m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\mathbf{j}' + m\ddot{z}'\mathbf{k}' = X'\mathbf{i}' + Y'\mathbf{j}' + Z'\mathbf{k}'$$

となり、これより、

$$m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x') = X', \quad m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y') = Y', \quad m\ddot{z}' = Z'$$

を得る。したがって、

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m\omega\dot{y}' \\ -2m\omega\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 x' \\ m\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。このように回転座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ についての運動方程式では、座標系 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ についての運動方程式に比べると最後の2つの項が付け加わる。

$$\begin{pmatrix} 2m\omega\dot{y}' \\ -2m\omega\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} \text{ をコリオリの力といい、} \begin{pmatrix} m\omega^2 x' \\ m\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を遠心力という。}$$

遠心力 $m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$ は回転座標系の原点から質点の方向へ向かった大きさ $m\omega^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}$ の力である (図 7-4)。

コリオリの力はベクトル積を用いると

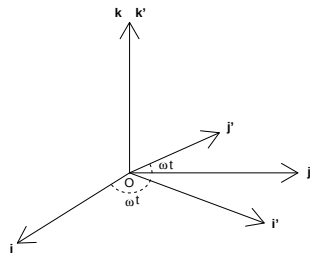


図 7.3 回転座標系

$$\begin{pmatrix} 2\omega\dot{y}' \\ -2m\omega\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} = 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せるので、回転座標系 i', j', k' についての速度ベクトルと回転軸の両方に直交する方向に運動を曲げる、大きさ $2m\omega\sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2}$ の力である (図 7-5)。長い振り子 (できれば 10m 以上) に重い錘を付けたフーコーの振り子は、往復振動面が北半球においては、右回りに回転する。これは地球の自転によるコリオリの力がはたらくことによるものである。また、台風は、北半球においては、左まわりに渦を巻く。これも地球の自転によるコリオリの力がはたらくことによるものである。

なお、遠心力とコリオリの力はともに質点に作用する力でなく回転座標系で運動を捉えることによる見かけ上の力である。

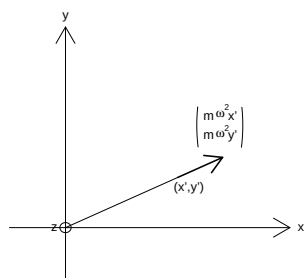


図 7.4 遠心力

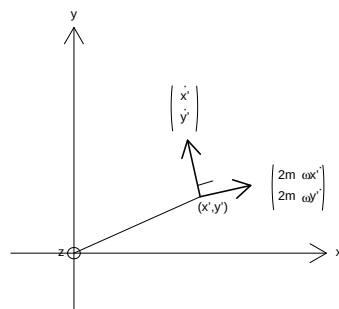


図 7.5 コリオリの力

7.5 円錐振り子の運動

長さ ℓ の糸の一端を天井にくくりつけ、他端に質量 m の小さなボールをくくりつけて、角速度 ω の等速度円運動をさせるものを**円錐振り子**という (図 7-6)。円錐振り子のボールが受ける力は、重力 mg と糸の張力だけである。張力を T とし、鉛直方向と糸のなす角を θ とする。前節と同じ回転座標軸

$$\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いる。ただし、座標軸の角速度をボールの角速度 ω と同じにする。すると、

$$x' = \ell \sin \theta, \quad y' = 0, \quad z' = -\ell \cos \theta$$

となるので、

$$\dot{x}' = \dot{y}' = \dot{z}' = 0, \quad \ddot{x}' = \ddot{y}' = \ddot{z}' = 0$$

となる。前節で得た座標系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ についての運動方程式

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m\omega \dot{y}' \\ -2m\omega \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 x' \\ m\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

を適用すると、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \sin \theta \\ 0 \\ T \cos \theta - mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 \ell \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。これより、

$$-T \sin \theta + m\omega^2 \ell \sin \theta = 0, \quad T \cos \theta - mg = 0$$

を得る。これらの2つの等式は、張力 T と重力 mg と見かけ上の力である遠心力 $m\omega^2 \ell \sin \theta$ の3つの力が釣り合っていることを示すものである (図 7-7)。こ

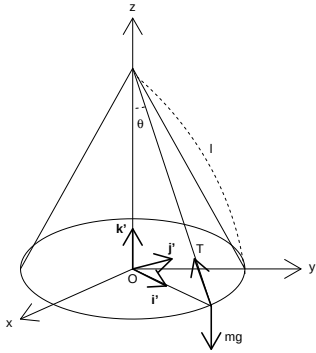


図 7.6 円錐振り子

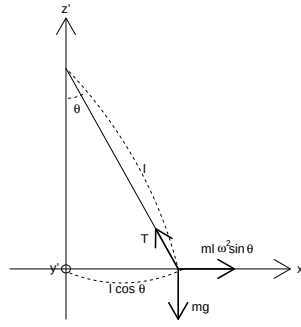


図 7.7 張力と重力と遠心力のつり合い

れより、

$$T = \frac{m\omega^2 l \sin \theta}{\sin \theta} = m\ell\omega^2$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\ell\omega^2} = \frac{g}{\ell\omega^2}$$

が得られる。 $\omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \theta}$ だから、この円錐振り子の周期は $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta}{g}}$ となる。なお、この場合は、ボールとともに回転座標系が回転するので、回転座標系についてのボールの速度が 0 になり、コリオリの力ははたらかない。

第8章

質点系の運動

例えば、太陽と地球のような二つの天体が相互に万有引力を作用させ合って運動するときの運動方程式は、6章で示したように、楕円運動あるいは双曲線運動として解を記述できる。ところが、それに月が加わるような3つ以上の天体の運動方程式の解になると、よく知られた関数の合成や積分でもって記述できないことが知られている。もちろん、数値計算によって解を記述することができるが、それでは誤差が蓄積するため、長時間にわたる解の記述には有効でない。本章では、複数の質点の運動についての一般的な性質を取り扱う。

8.1 2つの連結された球の間の内力

2つの連結された小球のそれぞれに外力が働くと、それらの小球相互の間に内力が働く。その内力の大きさは、運動方程式を考えることによって見ることができる。質量 m_1 の球 A_1 と質量 m_2 の球 A_2 が連結されているとする。また、球 A_2 から球 A_1 に向かう大きさ 1 のベクトルを $\mathbf{u}$ として、球 A_1 に大きさ F_1 の外力 $F_1\mathbf{u}$ が、球 A_2 に逆方向の大きさ F_2 の外力 $-F_2\mathbf{u}$ が働くものとする。つまり、連結された2つの球はそれぞれ反対方向に引っ張られている場合を考えると良い。このとき、球 A_1 が球 A_2 にかかる内力を $k\mathbf{u}$ とすれば、作用反作用の法則より、球 A_2 が球 A_1 にかかる内力は $-k\mathbf{u}$ となる (図 8-1)。2つの球はともに小さくて連結されているので、同一位置にあると考えて、その

位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とする。球 A_1 にかかる力は $F_1\mathbf{u} - k\mathbf{u}$ だから、球 A_1 の運動方程式は

$$m_1\ddot{\mathbf{r}} = F_1\mathbf{u} - k\mathbf{u}$$

となる。球 A_2 にかかる力は $-F_2\mathbf{u} + k\mathbf{u}$ だから、球 A_2 の運動方程式は

$$m_2\ddot{\mathbf{r}} = -F_2\mathbf{u} + k\mathbf{u}$$

となる。2つの運動方程式の両辺を加えると、

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}} = (F_1 - F_2)\mathbf{u}$$

を得る。これは、連結した球を一つの質点と考えたときのその運動方程式である。これより、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}$$

を得る。これを最初の運動方程式に代入すると、

$$k\mathbf{u} = F_1\mathbf{u} - m_1\frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u} = \frac{m_2F_1 + m_1F_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}$$

を得る。すなわち、

$$k = \frac{m_2F_1 + m_1F_2}{m_1 + m_2}$$

である。このように、運動方程式を考えることにより、内力の大きさを計算することができた。なお、力 F_1, F_2 は時間 t に依存してもかまわない。これより、特に、 $F_1 = F_2 = F$ のときは、 $k = F$ であり、特に、 $m_1 = m_2$ のときは、 $k = \frac{F_1 + F_2}{2}$ となる。

8.2 運動量保存の法則

複数の質点の集まりを質点系という。質点系については、質点系の外部からの外力と、質点系に属する質点相互の内力によって運動が決まる。質量がそれぞ

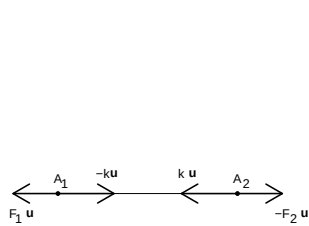


図 8.1 連結された小球

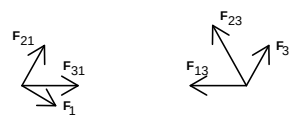


図 8.2 内力と外力（3 質点の場合）

れ $m_1, m_2, \dots, m_n$ の n 個の質点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ を考える。 i 番目の質点 A_i にかかる外力を $\mathbf{F}_i$ とする。質点 A_i に質点 A_j からかかる内力を $\mathbf{F}_{ij}$ とする。例えば、質点 A_1 には外力 $\mathbf{F}_1$ と $n-1$ 個の内力 $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{13}, \dots, \mathbf{F}_{1n}$ がかかる。したがって、質点 A_1 にかかる力は $\mathbf{F}_1 + \sum_{j \neq 1} \mathbf{F}_{1j}$ である。ここで、記号 $\sum_{j \neq 1}$ は、1 以外の $n-1$ 個の j について加えることを意味する (図 8-2)。したがって、

$$\sum_{j \neq 1} \mathbf{F}_{1j} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1n}$$

のことである。質点 A_i の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ で表わせば、この質点についての運動方程式は

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

となる。すべての i について加えると、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \dots + m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= \sum_i (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}) \\ &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \end{aligned}$$

がなりたつ。なぜなら、すべての i, j ($i \neq j$) について、作用反作用の法則より、 $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ がなりたつので、すべての内力は打ち消し合うからある。したがって、

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \\ \mathbf{r}_G &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{aligned}$$

と置けば、

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$$

がなりたつ。 M は質点系の総質量であり、 $\mathbf{F}$ は質点系にかかる外力の総和である。 $\mathbf{r}_G$ を質点系の重心という。 $M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$ は質点系の重心についての運動方程式である。また、質点 A_i の運動量ベクトル $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ の和

$$\mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + \dots + m_n \dot{\mathbf{r}}_n$$

を質点系の**全運動量ベクトル**、あるいは、**全運動量**という。全運動量ベクトルについても、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{F}$$

がなりたつ。なぜなら、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{P} &= m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + \cdots + m_n\ddot{\mathbf{r}}_n \\ &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{F}\end{aligned}$$

だからである。

$\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 、すなわち、質点系への外力の総和がゼロベクトルであるとき、

$$M\mathbf{r}_G = \mathbf{0}$$

となるので、質点系の重心は静止、あるいは、等速直線運動をする。また、同じく、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ の場合、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{0}$$

となるので、 $\mathbf{P}$ は一定、すなわち、外力の総和がゼロベクトルであるとき、全運動量は一定となる。これを、**運動量保存の法則**という。

8.3 角運動量保存の法則

質点 A_i の角運動量ベクトル $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ についての和

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n$$

を質点系の**全角運動量ベクトル**、あるいは、**全角運動量**という。また、各質点にかかる外力の原点 O に関するモーメントの総和を

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n$$

とする。すべての i について、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i &= m_i \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) \\ &= m_i(\mathbf{0} + \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij})\end{aligned}$$

がなりたつ。すべての、 i, j ($i \neq j$) について、内力の性質より、 $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ がなりたち、 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ と $\mathbf{F}_{ij}$ は平行だから、

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

がなりたつ。したがって、異なる i, j の組み合わせ (i, j) の全体の和を記号 $\sum_{(i,j) \ i \neq j}$ で表わせば、

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{(i,j) \ i \neq j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) = \mathbf{0}$$

がなりたつので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}) \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}\end{aligned}$$

がなりたつ。すなわち、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N}$$

がなりたつ。

質点系の各質点にかかる外力がゼロの場合は、質点系は内力だけで運動するが、この場合はもちろん、運動量保存の法則がなりたつが、さらに、この場合は、外力のモーメントの総和は $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ であるので、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{0}$$

がなりたつ、すなわち、質点系の各質点にかかる外力がゼロの場合は全角運動

量 L は一定になる。このことを**角運動量保存の法則**という。

質点系は、受ける外力の総和がゼロで、しかも、原点 O に関する力のモーメントの総和がゼロであるとき、すなわち、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \mathbf{0}$$

の2つの条件をみたすとき、**つり合いの状態**にあるという。つり合いの状態にある質点系は、空間のすべての点に関する力のモーメントの総和がゼロになる。なぜなら、点 P の位置を $\mathbf{r}$ とし、点 P を原点とする質点 A_i の位置を $\mathbf{r}'_i$ とすれば、点 P に関する力のモーメントの総和は

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}'_n \times \mathbf{F}_n \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_2 + \cdots + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_n \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n - \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となるからである。

第9章

剛体の運動

9.1 質点系としての剛体

剛体とは力を加えても形が変わらない物体のことであり、その自由度は6であることを2-3節において説明し、さらに、2-4節において、剛体に加わる力が釣り合って静止するのは、外力の総和と外力のモーメントの総和のいずれもがゼロベクトルになるときであることを説明した。本章においては、剛体へ加わる力が釣り合わないときの運動を取り扱う。

剛体の運動を考えると、剛体をたくさんな部分に分けて、それらの全体からなる質点系であるという考え方をする。 i 番目の部分の質量を m_i とすれば、剛体の総質量は

$$M = \sum_i m_i$$

で表せる。ここで記号 $\sum_i$ は和を表わすが、無限個の和を考えるので、積分の意味での和である。 i 番目の部分の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とすれば、

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

が剛体の重心を表わす位置ベクトルである。 i 番目の部分にかかる外力を $\mathbf{F}_i$ とすれば、

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

が剛体に働く外力の総和である。 $M\mathbf{r}_G = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$ の両辺を2回微分すると

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$$

がなりたつ。得られた

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$$

は剛体の重心の運動方程式である。また、

$$\mathbf{L} = \sum_i (m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

が剛体の全角運動量であり、

$$\mathbf{N} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

が剛体に働く外力のモーメントの総和である。これらを用いると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

がなりたつ。これが剛体の全角運動量についての方程式である。剛体については、重心の運動方程式と全角運動量の方程式のそれぞれによって自由度 3 が定まり、あわせて剛体の自由度 6 を定めることになるので、これら 2 つの方程式が剛体の運動を定める。

さらに、 $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G$ として、

$$\mathbf{L}' = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad \mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

と置くと、

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}'$$

がなりたつ。なぜなら、

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_G) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_G - \sum_i m_i \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G \\ &= \mathbf{L} - M\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G - M\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + M\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G \\ &= \mathbf{L} - M\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G \end{aligned}$$

がなりたち、 $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G) = \mathbf{r}_G \times \ddot{\mathbf{r}}_G$ だから、

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} - M \frac{d}{dt} \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - M \mathbf{r}_G \times \ddot{\mathbf{r}}_G \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{r}_G \times \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_i \mathbf{r}_G \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}'\end{aligned}$$

がなりたつ。したがって、剛体の運動は剛体の重心の運動方程式 $M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}$ 、および、剛体の重心のまわりの全角運動量についての方程式 $\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{N}'$ で定めると言うこともできる。ただし、このように考えるのは束縛条件が無い剛体の運動についてである。

9.2 回転軸をもつ剛体

剛体上の2点P, Qが固定して、直線PQを回転軸として回転運動する剛体を考える。この剛体の運動は回転角の時間変化だけで記述できるので、自由度は1である。回転軸を z 軸にとり、原点を z 軸上にとって xyz 座標軸を定めれば、自由度が1である回転する剛体の運動は、剛体の全角運動量についての方程式

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i), \quad \mathbf{N} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

の z 成分のみで記述できる。

ベクトル $\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ の xy 平面への正射影を $\mathbf{r}'_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ とすると、
 $\rho_i = |\mathbf{r}'_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ は $\mathbf{r}_i$ の z 軸までの距離であり、 $\mathbf{r}'_i$ の x 軸からの回転角を θ_i とすると、

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

と表せる (図 9-1)。剛体だから ρ_i は時間 t に依存しない。また、 θ_i の時間 t の差は i に依存しないので、 θ_i の時間 t の差の極限で与えられる導関数 $\dot{\theta}_i$ は i に依存しない。したがって、 $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}$ と添字 i を外して表わせば、

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} -\rho_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i \\ \rho_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_i \dot{\theta} \sin \theta_i \\ \rho_i \dot{\theta} \cos \theta_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \\ z_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho_i \dot{\theta} \sin \theta_i \\ \rho_i \dot{\theta} \cos \theta_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_i^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 x 成分と y 成分は書いていない。剛体に働く力はこのほかに剛体を支える 2 点 P, Q での抗力 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ があるが、これら 2 点の位置ベクトルは z 軸と平行だから、抗力による角運動量の z 成分はいずれも 0 になる。したがって、 $\mathbf{L}_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\theta}$ となるから、剛体の全角運動量についての方程式

$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$ の z 成分は

$$I\ddot{\theta} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)_z$$

となる。ここで

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2$$

である。この I を固定軸のまわり剛体の慣性モーメントという。

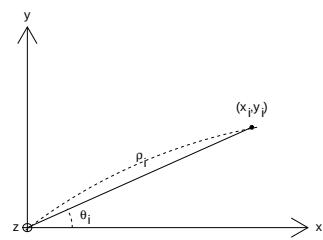


図 9.1 xy 平面への射影

9.3 剛体の慣性モーメントの計算

ある剛体の回転軸 z 軸のまわりの慣性モーメントを I とする。その剛体の重心を通る z 軸に平行な軸を z' 軸とし、 z' 軸のまわりの慣性モーメントを I_0 すると、

$$I = I_0 + Md^2$$

がなりたつ。ここで、 M は剛体の質量であり、 d は z 軸と z' 軸の間の距離である。このことを示すために z 軸の位置が $x' = d$ となるように x' 軸を引き、剛体の i 番目の部分から z 軸までの距離を ρ_i 、 z' 軸までの距離を ρ'_i 、 i 番目の部

分の $x'y'z'$ 座標を $\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix}$ とすると、ピタゴラスの定理から、

$$\rho_i^2 = y_i'^2 + (d - x'_i)^2, \quad \rho_i'^2 = y_i'^2 + x_i'^2$$

がなりたつ (図 9-2)。これより、

$$\rho_i^2 = \rho_i'^2 - x_i'^2 + (d - x'_i)^2 = \rho_i'^2 + d^2 - 2dx'_i$$

がなりたつ。 z' 軸は重点を通るので $\sum_i m_i x'_i = 0$ がなりたつから、

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i \rho_i'^2 + \sum_i m_i d^2 - 2d \sum_i m_i x'_i = I_0 + Md^2$$

が得られる。このことを用いれば、慣性モーメントは重心を通る軸のまわりの慣性モーメントから計算できる。

例 9-1, 棒状の剛体の慣性モーメント

長さ ℓ の一様な棒状の剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_0 = \sum_i m_i \rho_i^2$ を求める。ただし、棒の太さは無視できるものとする。棒の中心を原点とし、棒に沿った x 軸を考える (図 9-3)。棒の質量を M とし、単位長さ当りの棒の質量を $\rho = \frac{M}{\ell}$ とすると、棒の微小長さ dx の質量は ρdx だから、

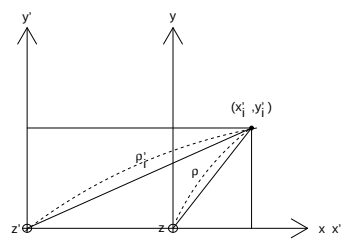


図 9.2 剛体の i 番目の部分の位置

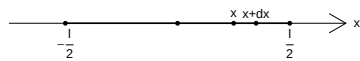


図 9.3 棒状の剛体

$$I_0 = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \rho dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \rho \frac{2}{3} \frac{\ell^3}{8} = \frac{M \ell^2}{12}$$

が得られる。

例 9-2, 円盤状の剛体の慣性モーメント

半径 a の一様な円盤状の剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_0 = \sum_i m_i \rho_i^2$ を求める。ただし、円盤の厚さは無視できるものとする。円

盤の質量を M とし、単位面積当りの円盤の質量を $\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$ とすると、円盤の中心から半径 r の円周の長さは $2\pi r$ だから、円盤の中心から半径 r と半径 $r + dr$ の間の部分の質量は $2\sigma\pi r dr$ となる (図 9-4)。したがって、

$$I_0 = \int_0^a r^2 \times 2\sigma\pi r dr = 2\sigma\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\sigma\pi a^4}{2} = \frac{Ma^2}{2}$$

が得られる。

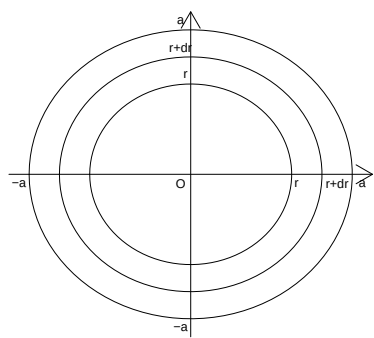


図 9.4 円盤状の剛体

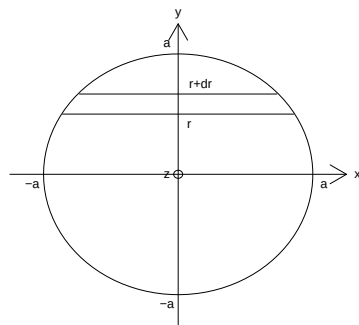


図 9.5 球状の剛体

例 9-3, 球状の剛体の慣性モーメント

半径 a の一様な球状の剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_0 = \sum_i m_i \rho_i^2$ を求める。球状の剛体の質量を M とし、単位体積当りの質量を $\sigma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ とする。半径 a の球の中心を原点とする球の xy 平面に平行な z の位置の切口の円の面積は $\pi(\sqrt{a^2 - z^2})^2$ だから、 z から $z + dz$ の間の部分の質量は $\sigma\pi(a^2 - z^2)dz$ となる (図 9-5)。したがって、例 9-2 より、その部分の慣性モーメントは

$$\frac{1}{2}\sigma\pi(a^2 - z^2)dz \times (\sqrt{a^2 - z^2})^2 = \frac{1}{2}\sigma\pi(a^4 - 2a^2z^2 + z^4)$$

となるので、

$$I_0 = \int_{-a}^a \frac{1}{2}\sigma\pi(a^4 - 2a^2z^2 + z^4)dz = \frac{8}{15}a^5\sigma\pi = \frac{2}{5}Ma^2$$

が得られる。

例 9-4, 円筒状の剛体の慣性モーメント

半径 a で高さ ℓ の一様な円筒状の剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメント $I_0 = \sum_i m_i \rho_i^2$ を求める。円筒の質量を M とし、単位体積当りの円筒の質量を $\sigma = \frac{M}{\pi a^2 \ell}$ とする。円筒の中心軸を z 軸とし、円筒の底面を xy 平面とする (図 9-6)。高さ z の切口の面積は πa^2 だから、 z から $z + dz$ の間の部分の質量は $\sigma\pi a^2 dz$ となり、この部分の慣性モーメントは例 9-2 より、 $\frac{\sigma\pi a^4}{2}dz$ となる。したがって、

$$I_0 = \int_0^\ell \frac{\sigma\pi a^4}{2}dz = \frac{\sigma\pi a^4}{2}\ell = \frac{Ma^2}{2}$$

が得られる。

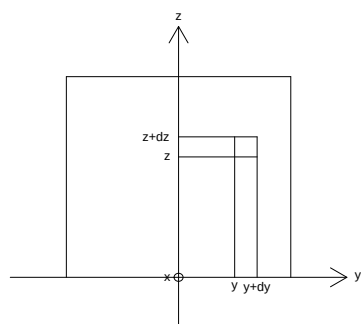


図 9.6 円筒状の剛体

9.4 アトウッドの器械

半径 a の滑車に質量が無視できるくらい軽い糸をかけ、糸の両端にそれぞれ質量 m_A, m_B の錘 A, B ををつるす。これはアトウッドが重力を精密に測定するために考案した装置である。滑車が極めて軽い物質からできていて滑車の軸のまわりの回転が円滑であれば滑車の軸のまわりの慣性モーメントを無視できるが、ここでは無視できないものとして慣性モーメントを I とする。ただし、糸は滑らないように巻き付けられている。回転軸を z 軸、鉛直上方向を y 軸として、錘 A, B の位置をそれぞれ y_A, y_B とする。滑車の両側における糸の張力を T_A, T_B とすると、2つの錘の運動方程式は

$$m_A \ddot{y}_A = T_A - m_A g, \quad m_B \ddot{y}_B = T_B - m_B g$$

となる。滑車と糸との接点の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ とし、張力ベクトルをそれぞれ $\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B$ とする (図 9-7)。滑車にはたらく力は (滑車を支える回転軸にかかる抗力のほかは) $\mathbf{T}_A$ と $\mathbf{T}_B$ だけであるから、滑車の回転角を θ とすると、回転する剛体である滑車の運動方程式は 9-2 節で示したことから、

$$I \ddot{\theta} = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{T}_A)_z + (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B)_z = aT_A - aT_B = a(T_A - T_B)$$

となる。

$$y_A + y_B = d_1 \quad y_B = a\theta + d_2, \quad (d_1, d_2 \text{ 定数})$$

の関係がなりたつので、 $y = y_B$ と置くと、 $\ddot{y} = -\ddot{y}_A = \ddot{y}_B = a\ddot{\theta}$ がなりたつ。したがって、

$$\begin{aligned} I \ddot{y} &= a^2(T_A - T_B) = a^2\{(m_A g - m_A \ddot{y}) - (m_B \ddot{y} + m_B g)\} \\ &= a^2(m_A - m_B)g - a^2(m_A + m_B)\ddot{y} \end{aligned}$$

がなりたち、

$$\ddot{y} = \frac{(m_A - m_B)a^2 g}{(m_A + m_B)a^2 + I}$$

を得る。これを最初の2つの運動方程式に代入すれば、2つの張力 T_A, T_B が得られる。また、得られた運動方程式の解は

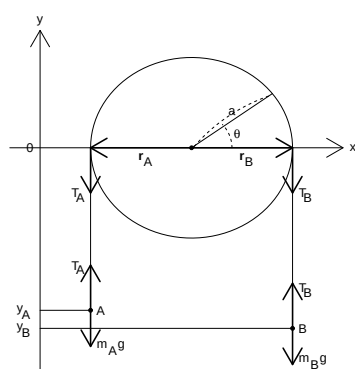


図 9.7 アトウツドの器械

$$y = \frac{(m_A - m_B)a^2 g}{(m_A + m_B)a^2 + I} t^2 + c_1 t + c_0 \quad (c_1, c_2 \text{は定数})$$

である。

9.5 剛体振り子

質量 M の薄い剛体の一点に穴を開けて軸を通して、軸を留めてつり下げたものを剛体振り子という。軸の方向を z 軸、剛体の面を xy 平面、鉛直下方を x 軸とする (図 9-8)。この剛体振り子は、剛体に重力 $\begin{pmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と原点 O に

束縛力 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix}$ が働く xy 平面上の運動と考えることができる。重心 G の運動方程式は

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。OG の長さを d とし、OG と x 軸がなす角を θ とすると、

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cos \theta \\ d \sin \theta \end{pmatrix}$$

と表せるので

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \sin \theta \dot{\theta} \\ d \cos \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \cos \theta \dot{\theta}^2 - d \sin \theta \ddot{\theta} \\ -d \sin \theta \dot{\theta}^2 + d \cos \theta \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

となる。抗力は

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\ddot{x}_G - Mg \\ M\ddot{y}_G \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Md \cos \theta \dot{\theta}^2 - Md \sin \theta \ddot{\theta} - Mg \\ -Md \sin \theta \dot{\theta}^2 + Md \cos \theta \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せるので、抗力 $\mathbf{R}$ の重心 G に関するモーメントは

$$\begin{pmatrix} -d \cos \theta \\ -d \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -Md \cos \theta \dot{\theta}^2 - Md \sin \theta \ddot{\theta} - Mg \\ -Md \sin \theta \dot{\theta}^2 + Md \cos \theta \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。この外積ベクトルを計算すると、 x 成分と y 成分はともに 0 であり、 z 成分は

$$\begin{aligned} & -d \cos \theta (-Md \sin \theta \dot{\theta}^2 + Md \cos \theta \ddot{\theta}) + d \sin \theta (-Md \cos \theta \dot{\theta}^2 - Md \sin \theta \ddot{\theta} - Mg) \\ & = -Md^2 \ddot{\theta} - Mgd \sin \theta \end{aligned}$$

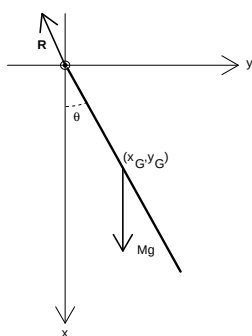


図 9.8 剛体振り子

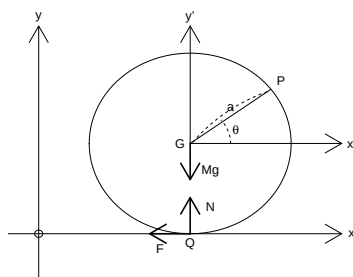


図 9.9 平面を転がる円盤

...9-9

となる。したがって、重心のまわりの慣性モーメントを I_0 とすれば、回転運動の方程式は

$$I_0 \ddot{\theta} = -Md^2 \ddot{\theta} - Mgd \sin \theta$$

となる。回転軸のまわりの慣性モーメントを I で表わせば、 $I = I_0 + Md^2$ の関係があるので、運動方程式

$$I \ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta$$

が得られる。剛体振り子をあえて平面運動と考えて運動方程式を導いたが、この運動方程式は回転軸のまわりの外力のモーメントが $-Mgd \sin \theta$ であることから直接導くことができる。また、この運動方程式は単振り子の運動方程式と同じような形をしており、 θ が小さいときは単振動の運動方程式で近似できる。

9.6 あらい平面上を真っ直ぐに転がる円盤の運動

あらい平面上を真っ直ぐにころがる円盤の運動を考える。円盤の半径を a 、質量を M とすると、重心のまわりの慣性モーメントは $I_0 = \frac{Ma^2}{2}$ となる。円盤がころがる方向を x 軸とし、鉛直方向を y とする xyz 座標系と、円盤の重心を原点として並進する $x'y'z'$ 座標系を考える (図 9-9)。円盤にはたらく外力は、重力、円盤と平面との接点に働く垂直抗力、平面があらいために同じく接点に働く摩擦力の 3 つである。垂直抗力は重力と反対向きでその大きさ $N = Mg$ であり、摩擦力は円盤の進行方向と反対向きでその大きさ F は重力に比例するので、比例定数を μ とすれば、 $F = \mu Mg$ と表せる。この円盤の運動も剛体の xy 平面上の運動と考えることができる。円盤の重心 G の運動方程式は

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ N - Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから、 $\ddot{x}_G = -\mu g$ が得られる。円盤の重心のまわりに働く外力のモーメントは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F \\ N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aF \end{pmatrix}$$

だから、円盤の周点 P と円盤の重心 G と結ぶ直線と x' 軸とのなす角を θ とすれば、回転運動の方程式は $I_0 \ddot{\theta} = -aF$ となるから、

$$\ddot{\theta} = -\frac{aF}{I_0} = -\frac{a\mu Mg}{\frac{Ma^2}{2}} = -\frac{2\mu g}{a}$$

を得る。 $t = 0$ において $x_G = 0, \dot{x}_G = v_0$ とすれば、微分方程式 $\ddot{x}_G = -\mu g$ より

$$\dot{x}_G = v_0 - \mu g t, \quad x_G = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2$$

を得る。また、 $t = 0$ において $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega_0$ とすれば、微分方程式 $\ddot{\theta} = -\frac{2\mu g}{a}$ より、

$$\dot{\theta} = \omega_0 - \frac{2\mu g}{a}t, \quad \theta = \omega_0 t - \frac{\mu g}{a}t^2$$

を得る。円盤の周上の点 P は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G + a \cos \theta \\ y_G + a \sin \theta \end{pmatrix}$ と表せるので、

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_G - a \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y}_G + a \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

となる。円盤と平面の接点は $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のときだから、接点における円盤の運動速度は

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_G + a\dot{\theta} \\ \dot{y}_G + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 - \mu g t) + a(\omega_0 - \frac{2\mu g}{a}t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 + a\omega_0) - 3\mu g t \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる（これは接点の平面上の移動速度ではない）。したがって、接点における円盤の運動速度が 0 となる時刻は $t = \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu g}$ である。この時刻より後の時刻では摩擦力の向きが変わるので、たとえば、 $\dot{x}_G = v_0 - \mu g t$ がなりたつのはこの時刻までである。

9.7 あらい傾斜面上を真っ直ぐにころがる円盤の運動

傾斜角 α のあらい平面上を真っ直ぐにころがる円盤の運動を考える。円盤の半径を a 、質量を M とすると、重心のまわりの慣性モーメントは $I_0 = \frac{Ma^2}{2}$ である。円盤がころがる方向を x 軸とし、それと垂直な方向を y 軸とする xyz 座標系と、円盤の重心を原点として並進する $x'y'z'$ 座標系を考える（図 9-10）。円盤に働く外力は、重力、円盤と平面との接点に働く垂直抗力、平面があらいために同じく接点に働く摩擦力の 3 つである。この円盤の運動も剛体の xy 平面

上の運動と考えることができる。重力は $\begin{pmatrix} Mg \sin \alpha \\ -Mg \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、垂直抗力は

重力の y 軸成分と反対向きでその大きさは $N = Mg \cos \alpha$ である。摩擦力は円盤の進行方向と反対向きでその大きさ F は垂直抗力に比例するので、比例定数を μ とすれば、 $F = \mu Mg \cos \alpha$ と表せる。円盤の重心の運動方程式は

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg \sin \alpha - F \\ N - Mg \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)Mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから、 $\ddot{x}_G = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g$ が得られる。円盤の重心のまわりに働く外力のモーメントは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F \\ -N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aF \end{pmatrix}$$

である。円盤の周上の点 P と円盤の重心とを結ぶ直線と x' 軸とのなす角を θ とすれば、回転運動の方程式は $I_0 \ddot{\theta} = -aF$ となるから、

$$\ddot{\theta} = -\frac{aF}{I_0} = -\frac{a\mu Mg \cos \alpha}{\frac{Ma^2}{2}} = -\frac{2\mu g \cos \alpha}{a}$$

を得る。あらい平面上をころがる円盤の運動と同じ形の重心の運動方程式と回転運動の方程式が得られた。したがって、 $\sin \alpha - \mu \cos \alpha < 0$ の場合は、円盤の初速度を与えても、円盤のころがり運動はしばらくするとストップする。 $\sin \alpha - \mu \cos \alpha > 0$ の場合を考える。 $t = 0$ において $x_G = 0, \dot{x}_G = 0$ とすれば、微分方程式 $\ddot{x}_G = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g$ より

$$x_G = \frac{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g}{2} t^2$$

を得る。また、 $t = 0$ において $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ とすれば、微分方程式 $\ddot{\theta} = -\frac{2\mu g \cos \alpha}{a}$ より、

$$\theta = -\frac{\mu g \cos \alpha}{a} t^2$$

を得る。円盤の回転方向と円盤の重心の移動方向は逆であるので、

$$x_G + a\theta = \frac{(\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha)g}{2} t^2$$

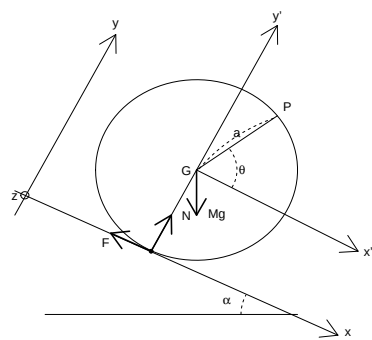


図 9.10 斜面を転がる円盤

は、円盤と平面の接点における時刻 t までの滑りの量である。

9.8 剛体の力学的エネルギー

剛体を質点系とみなしたとき、各質点の間の距離は不変であるので、内力のポテンシャルは 0 と考えてよい。したがって、外力のポテンシャルだけを考えればよい。

鉛直方向を z 軸として、剛体の i 番目の部分の位置を z_i とすれば、その重力ポテンシャルは $m_i g z_i$ であるので、剛体の重力ポテンシャルは $U = \sum_i m_i g z_i$ となるが、剛体の全質量を $M = \sum_i m_i$ 、重心の位置を $z_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$ とするとき、

$$U = g \sum_i m_i z_i = M g z_G$$

となるので、重心だけにポテンシャルが働いていると考えて良い。

剛体の運動エネルギーは各部分の運動エネルギーを加えた $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ であるが、 $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G$ と置くとき、 $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$ がなりたつから、

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{r}}_G) \cdot (\dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{\mathbf{r}}_G) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \mathbf{0} + M \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G \right) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G \end{aligned}$$

となり、重心に全質量 M が集中したと考えたときの運動エネルギーに重心の

まわりの運動エネルギーを加えたものに一致する。

剛体の各部分について

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}_i) = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla(\mathbf{r}_i) = -\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i$$

および、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) = m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i$$

がなりたつので、剛体にかかるポテンシャル $U = \sum_I U(\mathbf{r}_i)$ について、

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + U(\mathbf{r}_i)\right) = \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i) = 0$$

がなりたつ。したがって、力学的エネルギー $E = K + U$ は時間によらず一定であるという力学的エネルギー保存則が剛体についてもなりたつ。

9.9 回転する剛体の運動エネルギー

z 軸を回転軸として回転運動をしている剛体を考える。その剛体の i 番目の部分の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \\ z_i \end{pmatrix}$ とする。すなわち、 ρ_i は $\mathbf{r}_i$ の z 軸

までの距離、 θ_i は $\mathbf{r}_i$ と xz 平面がなす角である（図 9-11）。剛体であることから ρ_i は時間 t に依存しないし、 $\dot{\theta}_i$ は剛体の回転の角速度 $\dot{\theta}$ と一致するから、

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} -\rho_i \sin \theta_i \cdot \dot{\theta} \\ \rho_i \cos \theta_i \cdot \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となり、 } \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \rho_i^2 \dot{\theta}^2 \text{ となる。したがって、剛体の}$$

運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

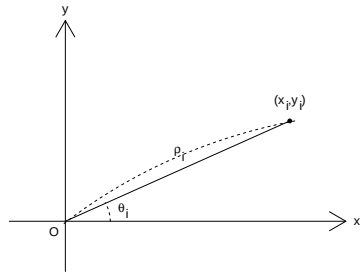


図 9.11 剛体の i 番目の部分の位置

となる。ここで、 $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ は剛体の回転軸のまわりの慣性モーメントである。

例 9-5, フィギュアスケート選手が両腕を広げてスピンしているときの慣性モーメントを I_1 とし、両腕を縮めてスピンしているときの慣性モーメントを I_2 とする。両腕を広げて角速度 ω_1 でスピンしているとき、両腕を縮めると角速度は変化するが、変化した角速度を ω_2 とすると、ポテンシャルエネルギーは関係せず運動エネルギーが保存されるので、 $I_1 \omega_1^2 = I_2 \omega_2^2$ がなりたつ。したがって、

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

の関係がなりたつ。たとえば、 $I_2 = \frac{1}{2} I_1$ になったとすれば、 $\omega_2 = \sqrt{2} \omega_1$ と回転速度が上がる。

9.10 滑車に巻き付けられた糸につるされた錘の落下運動

天井につるされた半径 a の滑車に質量が無視できるような細い糸が巻き付けられ、その先端に質量 m の錘がくくりつけられ、糸をほどきながら錘が落下運動する。鉛直上方向を z 軸とし、糸の張力を T とすれば、錘の運動方程式は

$$\ddot{z} = T - mg$$

である (図 9-12)。滑車の回転軸に関する慣性モーメントを I して、滑車の回転角を θ とすれば、回転運動の方程式は

$$I\ddot{\theta} = aT$$

である。 $a\theta = -z + \text{定数}$ の関係があるので、 $a\ddot{\theta} = -\ddot{z}$ の関係がなりたつ。したがって、

$$\ddot{z} = \frac{I}{a}\ddot{\theta} - mg = -\frac{I}{a^2}\ddot{z} - mg$$

がなりたつので、

$$\ddot{z} = -\frac{a^2 mg}{I + a^2}, \quad \ddot{\theta} = \frac{a mg}{I + a^2}$$

を得る。したがって、 $t = 0$ で錘と滑車がともに静止していたとすると、

$$\dot{\theta} = \frac{a mg}{I + a^2} t, \quad \dot{z} = -\frac{a^2 mg}{I + a^2} t$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 &= \frac{a^4 m^2 + a^2 m^2 I}{2(I + a^2)^2} g^2 t^2 - \frac{a^2 m^2}{2(I + a^2)} g^2 t^2 \\ &= mg \left(0 - \frac{a^2 mg}{2(I + a^2)} t^2 \right) = mg(z(0) - z(t)) \end{aligned}$$

がなりたつ。すなわち、錘の運動エネルギーと滑車の回転エネルギーとを加えたものが、重力ポテンシャルの差に一致する。つまり、重力ポテンシャルの差を錘の運動エネルギーと滑車の回転エネルギーに分けている。

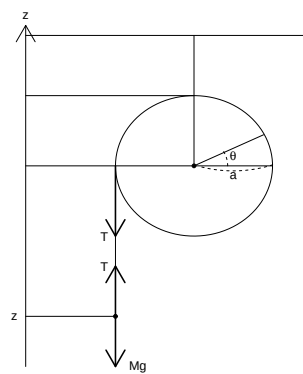


図 9.12 滑車に巻きつけられた錘の落下

第10章

ラグランジュの運動方程式

10.1 変数の取り替え

2つの変数 x_1, x_2 が2つの関数 f_1, f_2 と2つの変数 q_1, q_2 によって、

$$x_1 = f_1(q_1, q_2), \quad x_2 = f_2(q_1, q_2)$$

と表せ、逆に、2つの変数 q_1, q_2 が2つの関数 g_1, g_2 と2つの変数 x_1, x_2 によって、

$$q_1 = g_1(x_1, x_2), \quad q_2 = g_2(x_1, x_2)$$

と表せ、さらに、

$$x_1 = f_1(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)), \quad x_2 = f_2(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$$

がなりたつものとする。 $f_1(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = x_1$ の両辺を x_1 で偏微分すれば、合成関数の偏微分公式より

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = 1$$

を得る。同じく両辺を x_2 を偏微分すれば、

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0$$

を得る。同じように、 $f_2(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = x_2$ の両辺を x_1 と x_2 でそれぞれ偏微分すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} &= 1\end{aligned}$$

を得る。得られた4つの等式を行列を用いて表わすと、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。理解しやすいように変数が2個の場合を説明したが、変数の個数が多い場合でも式が長くなるだけで同じである。

d 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_d$ が d 個の関数 $f_1, f_2, \dots, f_d$ と d 個の変数 $q_1, q_2, \dots, q_d$ で、

$$x_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_d), x_2 = f_2(q_1, q_2, \dots, q_d), \dots, x_d = f_d(q_1, q_2, \dots, q_d)$$

と表せ、逆に、 d 個の変数 $q_1, q_2, \dots, q_d$ が d 個の関数 $g_1, g_2, \dots, g_d$ と d 個の変数 $x_1, x_2, \dots, x_d$ で、

$$q_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_d), q_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, q_d = g_d(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

と表せ、さらに、

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(g_1(x_1, x_2, \dots, x_d), g_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, g_d(x_1, x_2, \dots, x_d)), \\ x_2 &= f_2(g_1(x_1, x_2, \dots, x_d), g_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, g_d(x_1, x_2, \dots, x_d)) \\ &\quad, \dots, x_d = f_d(g_1(x_1, x_2, \dots, x_d), g_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \dots, g_d(x_1, x_2, \dots, x_d))\end{aligned}$$

がなりたつとき、これらの2組の変数は**互い取り替え可能である**と呼ぶことにする。このとき、2個の変数の場合と同様にして

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_d} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial q_1} & \frac{\partial x_d}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_d}{\partial q_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_d}{\partial x_1} & \frac{\partial q_d}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial q_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。この行列の等式の (i, j) 成分は

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。この等式を互いに置き換え可能な変数についての公式と呼ぶことにする。

10.2 微小変量解析の考え方

2変数関数 $f(x, y)$ と仮想変位（微小変量） $\delta x, \delta y$ に対して

$$h(t) = f(x + t\delta x, y + t\delta y)$$

と置くと、合成関数の微分公式より

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + t\delta x, y + t\delta y)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x + t\delta x, y + t\delta y)\delta y$$

がなりたつ。平均値の定理より、 $h(1) - h(0) = h'(\theta)$ をみたす $0 < \theta < 1$ が存在するので、

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta\delta x, y + \theta\delta y)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta\delta x, y + \theta\delta y)\delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\delta y + \epsilon \end{aligned}$$

がなりたつ。ここで

$$\epsilon = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta\delta x, y + \theta\delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\} \delta x + \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta\delta x, y + \theta\delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\} \delta y$$

である。 $\delta x, \delta y$ は微小変量だから、上の等式の2つの $\{\}$ の中は0に近い。したがって、 ϵ は微小変量 $\delta x, \delta y$ よりも微小である。したがって、

$$\delta f(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$$

と置くと、

$$\delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

がなりたつ。ただし、この等式は微小変量 $\delta x, \delta y$ よりも微小な ϵ を無いものと考えた等式である。このように仮想で微小な変数である微小変量を用いて、しかも、微小変量よりも微小なものを無いものとするのが**微小変量解析の考え方**である。微小変量が含まれた等式は微小変量より微小なものが無視された等式である。しかし、微小変量を用いた議論を通して得られる微小変量を含まない等式は、そのような無視のない等式である。理解しやすいように変数が2個の場合を説明したが、変数の個数が多い場合でも式が長くなるだけで同じである。すなわち、 d 個の変数をもつ関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$ と仮想変位（微小変量） $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ に対して

$$\delta f(x_1, x_2, \dots, x_d) = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_d + \delta x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

と置くとき、微小変量解析の考え方にもとづいて、

$$\delta f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d} \delta x_d = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_d \end{pmatrix}$$

がなりたつ。この等式を**微小変量解析の公式**と呼ぶことにする。以下、記号 δ を用いる等式においては、微小変量解析の考え方にもとづく、つまり、微小変量よりも微小なものは無視することにする。

10.3 ラグランジアン

n 個の質点からなる質点系において、運動エネルギーを $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$

とし、ポテンシャルを $U = \sum_{i=1}^n U(\mathbf{r}_i)$ とするとき、

$$L = K - U$$

をラグランジアンという。記号

$$\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (d = 3n)$$

を用いる。つまり、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ をまとめたものを記号 $\bar{\mathbf{r}}$ で表わし、 $\bar{\mathbf{r}}$ の成分を $x_1, x_2, \dots, x_d$ ($d = 3n$) としたのである。ラグランジアンも

$$L = L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) = L(x_1, x_2, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_d)$$

と表わすことにすると、微小変量解析の公式より、

$$\delta L = \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i$$

となる。変数 $x_1, x_2, \dots, x_d$ と取り替え可能な変数を $q_1, q_2, \dots, q_d$ とすると、偏微分公式、微小変量解析の公式、互いに取り替え可能な変数についての公式より、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i &= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial L}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned}$$

がなりたつ。同様に、 $\sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$ もなりたつので、

$$\delta L = \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^d \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

がなりたつ。つまり、 δL は取り替え可能な座標の取り方に依存しない。

10.4 最小作用の原理とラグランジュの運動方程式

保存力による n 個の質点からなる質点系のニュートンの運動方程式

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \nabla U = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

は記号

$$\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (d = 3n)$$

を用いると、

$$m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と表せる。また、ラグランジアン

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_d) &= L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^n U(\mathbf{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + U(x_1, x_2, \dots, x_d) \end{aligned}$$

を用いると、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$, $\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ だから、 $m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

と表せる。この方程式はニュートンの運動方程式をラグランジアンを用いて書き直したものにすぎない。

ラグランジアン L と d 次元空間の曲線 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ と区間 $t_1 < t < t_2$ に対して、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{\mathbf{r}}(t), \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t)) dt$$

を作用という。また、 $\delta \bar{\mathbf{r}}(t) = (\delta x_1(t), \delta x_2(t), \dots, \delta x_d(t))$ がすべての t について仮想変位（微小変量）であり、 $\delta \bar{\mathbf{r}}(t_1) = \delta \bar{\mathbf{r}}(t_2) = \mathbf{0}$ をみたしているとき、変分と呼ぶことにする（図 10-1）。

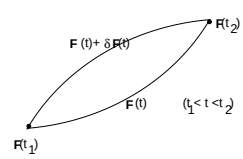


図 10.1 変分のイメージ

曲線 $\bar{\mathbf{r}}(t)$ は、すべての区間 $t_1 < t_2$ とすべての変分 $\delta\bar{\mathbf{r}}(t)$ に対して、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\bar{\mathbf{r}}(t), \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t)) dt = 0$$

がなりたつとき、**最小作用の原理**がなりたつという。

微小変量解析の考え方をいれれば、 $\delta\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i = 0$ だから、

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) &= \frac{1}{2}m_i(\dot{\mathbf{r}}_i + \delta\dot{\mathbf{r}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_i + \delta\dot{\mathbf{r}}_i) - \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= m_i\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned}$$

がなりたつ。また、部分積分の公式と変分の条件 $\delta\mathbf{r}_i(t_1) = \delta\mathbf{r}_i(t_2) = \mathbf{0}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i dt &= \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i dt \\ &= \dot{\mathbf{r}}_i(t_2) \cdot \delta\mathbf{r}_i(t_2) - \dot{\mathbf{r}}_i(t_1) \cdot \delta\mathbf{r}_i(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i dt \end{aligned}$$

がなりたつ。したがって、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\bar{\mathbf{r}}, \dot{\bar{\mathbf{r}}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - \delta \sum_{i=1}^n U(\mathbf{r}_i) \right\} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ m_i \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \nabla U(\mathbf{r}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i dt \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \{ m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \nabla U(\mathbf{r}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i \} dt \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \nabla U(\mathbf{r}_i)) \cdot \delta\mathbf{r}_i dt \\ &= - \sum_{i=1}^d \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x_i dt \end{aligned}$$

がなりたつ。この関係を用いると、ニュートンの運動方程式をラグランジアン

を使って書いた $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, d$) がなりたつならば、すべての $t_1 < t < t_2$ とすべての変分 $\delta \bar{\mathbf{r}}$ について、 $\delta S = 0$ がなりたつ、つまり、最小作用の原理がなりたつ。次に、ニュートンの運動方程式がなりたたない i_0 と時刻 t_0 とがあると仮定して、 t_0 を挟む区間 $t_1 < t_2$ を、すべての $t_1 < t < t_2$ での $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i_0}} \right) (t) - \frac{\partial L}{\partial x_{i_0}} (t)$ の値の符号が t_0 での値の符号と同じになるようにとり、 i_0 成分は $(t - t_1)(t - t_2) \delta q_{i_0}$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) で、 i_0 以外の成分はすべて 0 となるような変分を考えれば、

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i_0}} (t) - \frac{\partial L}{\partial x_{i_0}} (t) \right) (t - t_1)(t - t_2) dt \delta q_{i_0}$$

は、積分区間のすべての t について同符号の関数の積分であり、その値は 0 でないから、微小変量解析の意味で 0 にならない。すなわち、最小作用の原理がなりたたない。したがって、ニュートンの運動方程式がなりたつことと、最小作用の原理がなりたつことは同値である。

δL は取り替え可能な座標の取り方に依存しないので、最小作用の原理がなりたつかどうかは、取り替え可能な座標の取り方に依存しない。したがって、ニュートンの運動方程式がなりたつとき、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

がすべての取り替え可能な座標 $q_1, q_2, \dots, q_d$ に対してなりたつ。これを**ラグランジュの運動方程式**という。ラグランジュの運動方程式の形はニュートンの運動方程式をラグランジアンを用いて書き直したものと同じであるが、取り替え可能な変数を自由に取れることが異なっている。それだけでなく、ラグランジアンを定める少ない個数の運動方程式だけを考えればよいことになる。なお、説明を短くするために、保存系の場合だけを説明した。

10.5 束縛条件があるときのラグランジュの運動方程式

保存力による n 個の質点からなる質点系が h 個の束縛条件

$$f_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h)$$

のもとで運動しているとする。ニュートンの運動方程式は

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \nabla U(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である。これらを変数記号

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (d = 3n)$$

および、束縛条件が無いときのラグランジアン $L(x_1, x_2, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_d)$ を用いて表わすと、

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h)$$

および、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

となる。束縛条件のもとでの微小変量は束縛条件をみたさなければならないので

$$\begin{aligned} \delta f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_d) &= f_\nu(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_d + \delta x_d) - f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_d) \\ &= 0 - 0 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h) \end{aligned}$$

をみたさなければならない。すなわち、

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, h)$$

をみたす微小変量 (の組) $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_d$ を考える必要がある。

束縛条件をみたすすべての微小変量 (の組) とすべての h 個の数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} \right) \delta x_i &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \sum_{i=1}^d \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} \delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^d 0 \times \delta x_i + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

はなりたっている。このことがもとになって、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

をみたす数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ が存在することを以下で説明する。

束縛条件をみたす微小変量は h 個の条件式で決まるので、束縛条件をみたす微小変量の自由度は $d - h$ 以上である。したがって、条件

$$(*i) \quad \delta x_i \neq 0, \text{ かつ、} \delta x_j = 0 \quad (j \neq i)$$

をみたす微小変量（の組）が少なくとも $d - h$ 個存在する。簡単のため、 $(*h + 1), (*h + 2), \dots, (*d)$ をみたす微小変量（の組）がそれぞれ存在するものとする。 h 個の未知数で h 個の等式からなる連立 1 次方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

には解が存在するので、その解 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ を考えると、

$$\sum_{i=h+1}^d \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0$$

がすべての微小変量（の組）についてなりたつ。したがって、各 $j = 1, 2, \dots, d - h$ について、 $(*h + j)$ をみたす微小変量（の組）について、

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{h+j}} - \frac{\partial L}{\partial x_{h+j}} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{h+j}} \right) \delta x_{h+j} = 0$$

がなりたつことになるので、 $\delta x_{h+j} \neq 0$ より、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{h+j}} - \frac{\partial L}{\partial x_{h+j}} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{h+j}} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, d - h)$$

がなりたつ。以上あわせて、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

がなりたつ。これが束縛条件がある場合のニュートンの運動方程式である。したがって、この場合はラグランジアンを

$$L = \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - U(x_1, x_2, \dots, x_d) + \sum_{j=1}^h \lambda_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

に変更すればよいだけである。なぜなら、このように変更することによって、束縛条件が無い場合と全く同様に、最小作用の原理からニュートンの運動方程式が得られ、ラグランジュの運動方程式が得られるからである。もちろん、ラグランジュの運動方程式については変数を取り替えることができる。なお、運動エネルギーとポテンシャルを定める変数と束縛条件を定める関数の変数を別に選ぶことができる場合には、ラグランジアンにつけ加えた束縛条件の項を無視できることになり、少ない変数の運動方程式を考えればよいことになる。

10.6 ラグランジュの運動方程式の利用

例 10-1 (単振り子)

4 章 9 節で取り扱った単振り子について、ラグランジュの運動方程式を考える。糸と z 軸の角度 ϕ を変数として用いると、質点の速度は $\ell \dot{\phi}$ だから、質点の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\phi})^2$$

である。また、質点のポテンシャルは

$$U = mgz = mg\ell(1 - \cos \phi)$$

である。したがって、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 - mg\ell(1 - \cos \phi)$$

となり、宇宇

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2\dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = -mg\ell \sin \phi$$

だから、ラグランジュの運動方程式は

$$m\ell^2\ddot{\phi} + mg\ell \sin \phi = 0$$

となる。糸の張力を考慮することなく、4-11 節で得た運動方程式と同じものが得られた。

例 10-2, 慣性モーメントをもつアトウッドの器械

9-4 節で取り扱ったアトウッドの器械について、ラグランジュの運動方程式を考える。滑車の回転角 θ を変数として用いると、慣性モーメントが I である滑車の運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ であり、二つの質点 A,B の運動エネルギーはそれぞれ

$$\frac{1}{2}m_A\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m_Aa^2\dot{\theta}^2, \quad \frac{1}{2}m_B\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m_Ba^2\dot{\theta}^2$$

である。 $y = y_B = a\theta + d_1, y_A = -y + d_2$ (d_1, d_2 は定数) だから、重力ポテンシャルは

$$U = m_Agy_A + m_Bgy_B = m_Ag(d_2 - y) + m_Bgy = (m_B - m_A)g(a\theta + d_1) + m_Agd_2$$

である。ポテンシャルの定数項は無視できるので、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_Aa^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_Ba^2\dot{\theta}^2 - (m_B - m_A)ga\theta$$

となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_Aa^2 + m_Ba^2 + I)\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = (m_B - m_A)ga$$

だから、ラグランジュの運動方程式は

$$(m_A a^2 + m_B a^2 + I)\ddot{\theta} - (mA - m_B)ga = 0$$

となる。 $\ddot{y} = a\ddot{\theta}$ だから、

$$(m_A a^2 + m_B a^2 + I)\ddot{y} - (mA - m_B)ga^2 = 0$$

となり、糸の張力を考慮することなく、9-4 節で得た運動方程式と同じものが得られた。なお、ラグランジアンに束縛条件 $y_A + y_B = d_1$ $y_B = a\theta + d_2$, (d_1, d_2 定数) の項を入れなかったが、運動エネルギーとポテンシャルは変数 θ で定めることができ、束縛条件はそれとは別の変数 $\xi = z_A + z_B, \eta = z_B - a\theta$ で表わすことができるからである。つまりこの例の場合のラグランジュ運動方程式には束縛条件に関わる式は無視することができた。

10.7 ハミルトンの運動方程式

ラグランジュの運動方程式における変数 $q_1, q_2, \dots, q_d$ に対して、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

と置く。直交座標の場合は $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$ となり、運動量であるので、変数 p_i を q_i と共役な一般運動量という。ラグランジュ運動方程式より、

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

がなりたつ。さらに、

$$H = \sum_{i=1}^d p_i \dot{q}_i - L$$

と置き、 H をハミルトニアンという。ラグランジアン L は $q_1, q_2, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_d$ の関数だから、各 $\dot{q}_i$ が $q_1, q_2, \dots, q_d, p_1, p_2, \dots, p_d$ の関数として表せるとすれば、ハミルトニアン H は $q_1, q_2, \dots, q_d, p_1, p_2, \dots, p_d$ の関数になる。

$$\delta L = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^d (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i)$$

$$\delta \left(\sum_{i=1}^d p_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^d \{ (p_i + \delta p_i) (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - p_i \dot{q}_i \} = \sum_{i=1}^d (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i)$$

だから、

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{i=1}^d (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \sum_{i=1}^d (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) \\ &= \sum_{i=1}^d (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{dq_i}{dt} \delta p_i - \frac{dp_i}{dt} \delta q_i \right) \end{aligned}$$

がなりたつ。一方、 $\delta H = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right)$ だから、

$$\sum_{i=1}^d \left(\frac{dq_i}{dt} \delta p_i - \frac{dp_i}{dt} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

がなりたつ。この等式がすべての微小変数 $\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_d, \delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_d$ についてなりたつことから、

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

がなりたつ。これを**ハミルトンの正準運動方程式**という。ハミルトンの正準運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, d)$$

とも表せる。ハミルトンの正準運動方程式の特徴は変数の個数が多いが1階の微分方程式であることである。運動方程式については、ニュートンの運動方程式、ラグランジュの運動方程式、ハミルトンの正準運動方程式の3つを取り扱ってきた。

索引

値, 14

アトウッドの器械, 117

あらい斜面, 57

e の複素数乗, 24

位置ベクトル, 19

一般解, 50

運動エネルギー, 72

運動系, 94

運動量, 66

運動量ベクトル, 66

運動量保存の法則, 104

M S K 単位, 50

遠心力, 96

円錐振り子, 98

外積ベクトル, 14

回転座標系, 94

回転する剛体の運動エネルギー, 126

外力, 82

角運動量ベクトル, 66

角運動量保存の法則, 106

角振動数, 47

角速度, 45

加速度, 43

加速度ベクトル, 43

カタナリー, 40

ガリレイ変換, 94

換算質量, 83

慣性系, 94

慣性の法則, 51

慣性モーメント, 110

慣性力, 90

完全弾性衝突, 74

共鳴, 62

共役な一般運動量, 143

曲線の長さ, 27

曲率半径, 28

近似公式, 27

撃力, 66

懸垂線, 40

剛体, 33, 107

剛体の重心の運動方程式, 109

剛体の重心のまわりの全角運動量について
の方程式, 109

剛体振り子, 119

コサイン関数, 8

弧長パラメータ, 28

弧度法, 7

コリオリの力, 96

最小作用の原理, 137

サイン関数, 8

作用線, 32

作用点, 32

作用反作用の法則, 41

C G S 単位, 50

仕事, 67

指数関数, 7

質点, 50

周期, 47

重心, 103

自由度, 31

自由落下運動, 45

重力, 32
重力定数, 33
焦点, 84
初期位相, 47
振幅, 47

垂直抗力, 57
スカラー積, 13
スカラー積の微分, 21

静止系, 94
静摩擦, 57
接ベクトル, 27
全運動量, 104
全運動量ベクトル, 104
全角運動量, 104
全角運動量ベクトル, 104

増分, 19
速度, 43
速度ベクトル, 43

対数関数, 7
だいに, 50
楕円, 84
互いに取り替え可能な変数についての公
式, 132
単位接ベクトル, 28
単位法線ベクトル, 28
短径, 84
たんしんどう, 59
単振動, 47
単振り子, 63

力, 32
力のモーメント, 32
中心力, 78
長径, 84
直交, 13

つり合いの状態, 106

定積分, 25

導関数, 19
等速円運動, 45
動摩擦係数, 57
特殊解, 50

内積, 13
内力, 82
ナブラ記号, 19, 70
なめらかな斜面, 57

2 階線型微分方程式, 48
2 次の行列式, 14
ニュートン (単位), 50
ニュートンの運動第 3 法則, 41
ニュートンの運動第 2 法則, 51
ニュートンの運動方程式, 50

ネイピアの数, 7

ハミルトニアン, 143
ハミルトンの正準運動方程式, 144
万有引力定数, 87

微小変量解析の考え方, 133
微小変量解析の公式, 133
微積分学の基本定理, 25
微分, 19

復元力, 61
フックの法則, 59
不定積分, 25

平均値の定理, 26
並進座標系, 89
ベクトル, 11
ベクトル積, 14
ベクトル積の微分, 21
偏導関数, 26
偏微分, 26
変分, 135

放物運動, 54
保存力, 70
ポテンシャル, 70
ポテンシャルエネルギー, 70

右手系, 16

面積速度, 79

矢線ベクトル, 11

ラグランジアン, 134
ラグランジュの運動方程式, 138

力学的エネルギー, 72
力学的エネルギーの散逸, 77
力学的エネルギー保存則, 72, 126
力積, 66
離心率, 84