# 線型代数で何を学んだか（学習を終わって振り返る）

線型代数の学習目的は多次元思考、多変量思考の能力を身につけることです。線型代数を学ぶなかで計算問題を解くことがあったとしても、その多くは多次元思考のための数学概念に慣れるためです。線型代数の応用の多くはコンピュータで計算処理されますので、そうした計算処理の意味を理解することにあるとさえ言うことができます。線型代数の数学概念は厳密な数学論理の積み重ねにより展開されます。ときには何を学んでいるのか見失うことも起りがちです。したがって、線型代数の学習が一通り終わった段階で、何を学んだかを振り返ってみることは、学習の成果を確実にするうえで大切です。細かな点は忘れるとしても何を学んだのかを確認しておくことは学習の成果に自信を与えてくれるに違いありません。このファイルはそうした目的でつくられています。すべてを学ぶことができなかった人についても、学び残したものが何であるかの概観をつかんでおくことは線型代数についてのいっそうの自信を与えてくれるでしょう。

1-1.　いくつかの行といくつかの列に数または文字式が並び両側から括弧で挟んだものを**行列**という。$m$ 行 $n$ 列の行列を $m \times n$ 行列という。行列の中の数または文字式をその行列の**成分**という。成分が実数だけからなる行列を**実行列**、成分に複素数が入った行列を**複素行列**という。$m \times n$ 行列は一般に

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表すことができる。この行列の第 $i$ 行第 $j$ 列の成分は $a_{ij}$ となるが、これをこの行列の $(i,j)$ 成分という。行列はアルファベットの大文字で表すことがある。

1-2.　$(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ の $m \times n$ 行列 $A$ と $(i,j)$ 成分が $b_{ij}$ の $m \times n$ 行列 $B$ についてそれらの**和** $A+B$ は $(i,j)$ 成分が $a_{ij}+b_{ij}$ となる $m \times n$ 行列である。

$(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ の $m \times n$ 行列 $A$ の $c$ **倍** $cA$ は $(i,j)$ 成分が $ca_{ij}$ となる $m \times n$ 行列である。

1-3.　行列については最も重要であるのはその作用としての役割である。作用としての行列を重ねることに対応するのが行列の積である。$(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ の $m\times n$ 行列 $A$ と $(i,j)$ 成分が $b_{ij}$ の $n\times\ell$ 行列 $B$ についてそれらの**積** $AB$ は $(i,j)$ 成分が $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ となる $m\times\ell$ 行列である。

数の積については $a\times b=b\times a$ がなりたつが、行列の積については $AB=BA$ は必ずしもなりたたない。なお、2 つの行列が等しいとは、それらの成分がすべて等しいことである。数の積については「$ab=0$ ならば、$a=0$ または $b=0$」がなりたつが、行列の積については、$A\neq O$ かつ $B\neq O$ であるのに $AB=O$ になることがある。ここで記号 $O$ は成分がすべて 0 の行列（**零行列**という）とする。

行の個数と列の個数が等しい行列を**正方行列**という。左上から右下にかけての対角成分はすべて 1 で、その他の成分はすべて 0 である正方行列を**単位行列**という。$n\times n$ 単位行列を記号 $E_n$ で表すことにするが、$n$ を省略して $E$ で表すこともある。

1-4.　行列 $A$ の行と列を入れ替えてできる行列を $A$ の**転置行列**といい、記号 $A^T$ で表す。

1-5.　行列の和、定数倍、積、転置には次の性質がある。ただし、それぞれ和や積を考えることができる場合になりたつ性質である。つまり、和 $A+B$ は $A$ と $B$ の行の個数および列の個数が一致する場合のみ考え、積 $AB$ は $A$ の列の個数と $B$ の行の個数が一致する場合のみ考える。

(1)　$(A+B)+C=A+(B+C)$,　(2)　$A+B=B+A$,
(3)　$c(A+B)=cA+cB$,　(4)　$(AB)C=A(BC)$,
(5)　$c(AB)=(cA)B=A(cB)$,　(6)　$A(B+C)=AB+AC$,
(7)　$(A+B)C=AC+BC$,　(8)　$AE=A$,
(9)　$EA=A$,　(10)　$(A^T)^T=A$,
(11)　$(A+B)^T=A^T+B^T$,　(12)　$(cA)^T=cA^T$,
(13)　$(AB)^T=B^TA^T$

1-6.　$n$ を自然数とするとき、正方行列 $A$ の $n$ 個の積を $A^n$ で表し、$A$ の $n$ 乗という。2 つの $n\times n$ 行列 $A,B$ が $AB=BA$ をみたすとき、$A$ と $B$ は**可換**であるとい

う。２つの可換な $n\times n$ 行列 $A, B$ について、

$$
\begin{aligned}
(A+B)^k &= A^k + kA^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2}A^{k-2}B^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}A^{k-3}B^3 \\
&\qquad + \cdots + \frac{k!}{(k-i)!i!}A^{k-i}B^i + \cdots + B^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^{k-i}B^i
\end{aligned}
$$

がなりたつ。ここで $\displaystyle\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!i!}$ は２項係数である。

2-1.　２次の行列式の**値**は $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ である。

2-2.　連立１次方程式 $\begin{cases} ax & +by = & p \\ cx & +dy = & q \end{cases}$ の解は２次の行列式を用いた

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ によって求めることができる。ただし、分母が０でないときである。

2-3.　３次の行列式の値は、$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = aqw + bru + cpv - arv - bpw - cqu$ である。プラスの項が３つとマイナスの項が３つから成っているが、符号を間違えることなくすべての項を抜け落とさず計算する**サラスの方法**というのがある。なお、3 次の行列式の値はそれぞれの行や列について２次の行列式への展開によって求めることができる。例えば、第１行についての**展開等式**は

$$
\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} q & r \\ v & w \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} p & r \\ u & w \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} p & q \\ u & v \end{vmatrix}
$$

である。

2-4.　３次の行列式の性質

３次の行列式には、(1) 行列式の行と列を入れ替えても値は変わらない。(2) 行列式の２つの行（または列）を入れ替えた行列式の値はもとの行列式の値の $-1$ 倍になる。(3) ２つの行（または列）は同じである２つの３次の行列式の値の和は、それら２つの行（列）はそのままにして、他の１つの行（列）の成分はそれぞれ対応する成分を加え合わせてできる行列式の値に等しい。(4) 行列式のある行（または列）を $k$ 倍した行列式の値は、もとの行列式の値の $k$ 倍になる。(5) ２つの行 (列）が一致する行列式の値は 0 である。(6) ある行 (列）の定数倍を他の行 (列）に加えても行列式の値は変わらない。(7) ２つの $3 \times 3$ 行列 $A$, $B$ に対して $A$ と $B$ の積 $AB$ が定める行列式の値が、$A$ が定める行列式の値と $B$ が定める行列式の値の積に一致する。の性質がある。特に (6) は行列式の値の計算に役立つ。

2-5.　連立１次方程式 $\begin{cases} ax & +by & +cz = & p \\ dx & +ey & +fz = & q \\ gx & +hy & +iz = & r \end{cases}$ の解は３次の行列式を用いた

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

によって求めることができる。ただし、分母が 0 でないときである。

2-6.　４次以上の行列式も考えることができ、3 次の行列式と同様の性質があるので、ある行 (列）の定数倍を他の行 (列）に加えることによって、また、より低い次数の行列式に展開することによって値を求めることができる。

3-1.　$2\times 2$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ をみたすとき、

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix}$ と置くと、$AA^{-1}=A^{-1}A=E_2$ がなりたつ。ただし、

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix},\ |A_{12}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix},\ |A_{21}|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\ |A_{22}|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

であり、$A^{-1}$ を $2\times 2$ 行列 $A$ の**逆行列**という。

3-2.　2 つの未知数をもつ連立 1 次方程式は逆行列を用いて解を求めることができる。ただし、逆行列が存在する場合である。

3-3.　$3\times 3$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が $|A|\neq 0$ をみたすとき、

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & |A_{31}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & |A_{32}| \\ |A_{13}| & |A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$ は $AA^{-1}=A^{-1}A=E_3$ をみたす。ただし、$A_{ij}$ は、行列 $A$ の $(i,j)$ 成分は 1 とその他の $i$ 行および $j$ 列の成分はすべて 0 と置き直した行列である。$A^{-1}$ を $3\times 3$ 行列 $A$ の**逆行列**という。

3-4.　3 つの未知数をもつ連立 1 次方程式は逆行列を用いて解を求めることができる。ただし、逆行列が存在する場合である。

3-5.　$n\times n$ 行列 $A$ に対して、$n\times n$ 行列 $B$ が $BA=AB=E$ をみたすとき、$B$ は $A$ の**逆行列**という。$n\times n$ 行列 $A$ はその行列式の値 $|A|$ が 0 でないとき、**正則行列**という。$n\times n$ 行列 $A$ が逆行列を持つための必要十分条件は $A$ が正則行列であることである。

$$\text{正則行列}\,A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\ \text{の逆行列は}\ \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & \cdots & |A_{n1}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{1n}| & |A_{2n}| & \cdots & |A_{nn}| \end{pmatrix}$$

である。ここで、$A_{ij}$ は $n\times n$ 行列 $A$ の $(i,j)$ 成分を 1 と置き直し、第 $i$ 行と第 $j$ 列の他の成分はすべて 0 と置き直した $n\times n$ 行列であり、$A_{ij}$ の行列式の値 $|A_{ij}|$ を $A$ の $(i,j)$ **余因子**という。

4-1.　連立１次方程式を行列式を用いて解く方法および逆行列を用いて解く方法は、解がただ一つ存在する場合の解法である。ところが、解が存在しない連立１次方程式や解が無限に多く存在する連立１次方程式がある。そのようなものを含めた連立１次方程式の解法として**掃き出し法**と呼ばれるものがある。掃き出し法は単に連立１次方程式を解くためだけでなく、線型代数の理論において重要な役割を果たす。

連立１次方程式の係数を並べてつくった行列を**係数行列**という。定数項からできる列を右端にもつので**拡大係数行列**ということもある。係数行列の $0$ でない１つの成分に注目する。その注目成分が $(i,j)$ 成分だとするとき、$j$ 列の $i$ 行以外のすべての成分をそれぞれ $i$ 行の何倍かを加える（減じる）ことによって $0$ にする。これを $(i,j)$ 成分を**ピボット**とする $j$ 列の掃き出しという。このような列掃き出しをピボットを選ぶことができる限り次々に続ける。ただし、ピボットは定数項列からは選び出さない。これ以上ピボットを選び出せなくなったときの係数行列をみたとき、「定数項成分は $0$ でないが他の成分はすべて $0$ であるような」行があれば、もとの連立１次方程式には解が存在しない。そのような行がなければ解が存在する。その場合でも、ピボットに選ばれなかった定数項以外の列があれば、解は無限にたくさんあり、そうでなければ解は唯一通りである。

4-2.　定数項がすべて $0$ である連立１次方程式を**斉次連立１次方程式**という。斉次連立１次方程式はすべての未知数の値が $0$ という解をもつことは計算するまでもなく明らかである。この解を**自明な解**という。自明な解の他に解をもつ斉次連立１次方程式は、掃き出し法によって、ピボットに選ばれないような列がある場合である。したがって、 未知数の個数よりも等式の個数が少ない斉次連立１次方程式はピボットに選ばれない列ができるので、自明な解のほかに解をもつ。

5-1.　$n\times 1$ 実行列を $n$ **次元数ベクトル**、あるいは簡単に、**ベクトル**という。$\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{a}_k$ と表せるとき、ベクトル $\boldsymbol{b}$ は $k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ の**１次結合**で表せるという。１次結合で表せるかどうかは、表せたとしたときの連立１次方程式に解があるかどうかで判定できる。

5-2.　$k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ のうちのどれかのベクトルが他の $k-1$ 個のベクトルの１次結合で表せるとき、これら $k$ 個のベクトルは**１次従属系**であるという。 １次従属系でないとき、つまり、どのベクトルも他の $k-1$ 個のベクト

ルの１次結合で表せないとき、**１次独立系**であるという。$k=1$ のときは、１個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ のとき１次独立系といい、$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ のとき１次従属系という。$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ が１次独立系あるか、１次従属系であるかの判定をするには、$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ を未知数とする方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ が、自明な解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ のみであれば１次独立系であり、自明な解のほかに解を持てば１次従属系である。

１次独立系があるとき、そのなかからいくつかのベクトルを取り去って１次独立系である。１次従属系があるとき、それにどんなベクトルを加えても１次従属系である。$k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ が１次独立系であるとき、$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ の１次結合で表せないベクトル $\boldsymbol{a}_{k+1}$ を加えた $k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{a}_{k+1}$ は１次独立系となる。

6-1.　$n$ 次元数ベクトルの空でない集合 $V$ が (1) $\boldsymbol{a} \in V,\ \boldsymbol{b} \in V$ ならば、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ がなりたち、(2) $\boldsymbol{a} \in V$ で $c$ を実数とするならば、$c\boldsymbol{a} \in V$ がなりたつならば、**部分ベクトル空間**という。(1),(2) の代わりに、(3) $\boldsymbol{a} \in V,\ \boldsymbol{b} \in V$ で、$c$ と $d$ を実数とすれば、$c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b} \in V$ がなりたつ、としてもよい。。

$k$ 個の $n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ の１次結合の全体がつくるベクトルの集合を記号 $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k)$ で表す。$\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k)$ は部分ベクトル空間になるので、$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ が**張る部分ベクトル空間**と呼ぶ。

6-2.　部分ベクトル空間 $V$ に $k$ 個のベクトルからなる１次独立系は存在するが、$k+1$ 個のベクトルからなる１次独立系は存在しないとき、$V$ は $k$ **次元**であるといい、記号 $\dim V = k$ で表す。$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ が１次独立系であるとき、$\dim\ \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k) = k$ となる。つまり、$\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k)$ には $k+1$ 個の１次独立系は存在しない。

$n$ 次元数ベクトルの全体を記号 $\mathrm{R}^n$ で表す。$\dim \mathrm{R}^n = n$ である。部分ベクトル空間 $V$ の次元が $k$ であり、$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ が $V$ に属する１次独立系であれば、$V = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k)$ がなりたつ。つまり、部分ベクトル空間は張られる部分ベクトル空間である。

部分ベクトル空間 $V$ の $V = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k)$ をみたす１次独立系 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_k$ を $V$ の**基底**という。部分ベクトル空間の基底のとりかたはいろいろある。

6-3.　$\mathrm{R}^n$ の 2 つの部分ベクトル空間 $U, V$ に対して、$U$ と $V$ のどちらにも属するベクトルの全体の集合を記号 $U \cap V$ で表し、$U$ と $V$ の**共通部分**という。共通部分 $U \cap V$ は部分ベクトル空間である。$\mathrm{R}^n$ の 2 つの部分ベクトル空間 $U, V$ に対して、$U$ に属するベクトルと $V$ に属するベクトルの和のベクトルの全体の集合を記号 $U + V$ で表し、$U$ と $V$ の**和**という。和 $U + V$ は部分ベクトル空間である。

$\mathrm{R}^n$ の 2 つの部分ベクトル空間 $U, V$ は、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in V$ ならば、$\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ がなりたつとき、**互いに 1 次独立である**という。1 次元以上の 2 つの部分ベクトル空間 $U, V$ が互いに 1 次独立であるための必要十分条件は $U \cap V = \{\ \mathbf{0}\ \}$ がなりたつことである。

$U, V$ が互いに 1 次独立であるとき、$U + V$ を記号 $U \oplus V$ で表し、$U$ と $V$ の**直和**という。直和ベクトル空間 $U \oplus V$ においてはベクトルの和の表し方は一通りである。

7-1.　行列 $A$ のいくつかの行と列を選んでできる行列式を $A$ の**小行列式**という。行列 $A$ の小行列式で値が 0 でないものの最大の次数をこの行列の**ランク**または**階数**と呼び、記号 $\mathrm{rank}(A)$ で表す。

7-2.　$m \times n$ 行列の列から $m$ 個の $n$ 次元ベクトルが張る部分ベクトル空間の次元をその行列の**列ベクトル次元**と呼ぶことにする。

7-3.　行列のランクと列ベクトル次元が一致する。それは行列を列掃き出し操作を行なったときの選び得るピボットの個数に一致する。

$n \times n$ 行列 $A$ が正則行列であるための必要十分条件は $A$ の $n$ 個の列ベクトルが 1 次独立系であることである。これは $A$ のランクが $n$ に等しい場合である。

8-1.　$m \times n$ 実行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と $n$ 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して、

$$T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と置くと、$T$ は $\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への写像であり、$c, d$ を実数、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m$ とするとき、$T(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = cT\boldsymbol{x} + dT\boldsymbol{y}$　　がなりたつ。この性質を**線型性**といい、線型性をもつ写像を**線型写像**という。逆に、$\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への写像 $T$ が線形性をもてば、$T$ は $m \times n$ 実行列から定まる線形写像である。

8-2.　$\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への線形写像 $T$ に対して、$\mathrm{R}^m$ のベクトル $T\boldsymbol{x}$　$(\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n)$ 全体の集合を記号 $\mathrm{Im}(T)$ で表し、$T$ の**像** image と呼ぶ。行列 $A$ で定まる線形写像 $T$ の像 $\mathrm{Im}(T)$ は $A$ の列ベクトルが張る部分ベクトル空間に一致する。

$\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への線形写像 $T$ に対して、$T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ をみたす $\mathrm{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を記号 $\mathrm{Ker}(T)$ で表し、$T$ の**核** kernel と呼ぶ。核 $\mathrm{Ker}(T)$ は部分ベクトル空間である。

$T$ を $\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への線形写像とし、核 $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を $k$ とすれば、像 $\mathrm{Im}(T)$ の次元は $n - k$ である。すなわち、$\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = n$ がなりたつ。これを線形写像についての**次元定理**という。

8-3.　$n$ 個の未知数を持ち、$m$ 個の等式からなる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots + a_{1n}x_n = \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots + a_{2n}x_n = \quad b_2 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots + a_{mn}x_n = \quad b_m \end{cases}$$

は係数行列を用いることにより、行列についての方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表せる。さらに、係数行列の列で決まるベクトルと定数項から決まるベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とするとき、ベクトルについての方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ とも表せる。さらに、係数行列で定まる線形写像 $T$ についての方程式 $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とも表せる。このように、連立 1 次方程式は、行列についての方程式、ベクトルについての方程式、線形写像についての方程式で表すことができる。このことから、解が存在するのは、（定数項を外した）係数行列のランクと拡大係数行列のランクが一致するときである。また、解があるとして、解の一つを $\boldsymbol{x}_0$ とすれば、解の全体の集合は $\{\ \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(T)\ \}$ となる。したがって、解があるとするとき、解が唯一つであるための必要十分条件は $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$ である。

8-4.　$\mathrm{R}^n$ から $\mathrm{R}^m$ への線形写像 $T$ と $\mathrm{R}^n$ の部分ベクトル空間 $U$ に対して、$U$ に属するベクトル $\boldsymbol{x}$ の $T$ による像 $T\boldsymbol{x}$ の全体の集合を記号 $TU$ し、$U$ の $T$ による**像**という。また、$\mathrm{R}^m$ の部分ベクトル空間 $V$ に対して、$T\boldsymbol{x} \in V$ をみたす $\mathrm{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体の集合を記号 $T^{-1}V$ で表し、$V$ の $T$ による**逆像**という。像 $TU$ と逆像 $T^{-1}V$ はともに部分ベクトル空間である。

9-3.　$n \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して、ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ が $A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ をみたすとき、$\lambda$ を $A$ の**固有値**といい、$\boldsymbol{a}$ を $A$ の固有値 $\lambda$ に対応する**固有ベクトル**という。固有値を求めるためには $\lambda$ についての $n$ 次方程式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解を求めればよい。この方程式の左辺を $A$ の**特性多項式**、この方程式を $A$ の**特性方程式**という。固有値は必ずしも実数ではないし、固有ベクトルは必ずしも実ベク

トルではない。$\lambda$を正方行列$A$の固有値とするとき、固有ベクトルは核$\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$のベクトルだから、対応する斉次連立１次方程式の自明でない解を求めればよい。

9-4.　$2\times 2$行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について、

(1)　２つの異なる固有値$\lambda_1 \neq \lambda_2$がある場合は、固有ベクトルを$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$とすれば、$A(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$がなりたつ。

(2)　ただ一つの固有値$\lambda$しかないが、１次独立系となる固有ベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$が取れる場合は、$A(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$がなりたつ。

(3)　ただ１つの固有値$\lambda$しかなく、ただ１つの固有ベクトル$\boldsymbol{a}_1$しかとれない場合は、$\boldsymbol{a}_1=(A-\lambda E)\boldsymbol{a}_2$をみたすベクトル$\boldsymbol{a}_2$を取ることができるので、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$は１次独立系になり、$A(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$がなりたつ。これらを$2\times 2$行列の**ジョルダン標準形**という。$2\times 2$行列$A$のジョルダン標準形をつくれば、累乗$A^n$が計算できる。

9-5.　２次方程式は複素数の範囲で考えると、解の公式が使える。つまり、どんな２次方程式でも解を求めることができる。正方行列についても、たとえ、実正方行列であっても複素数の範囲で考えると、どんな正方行列についても固有値や固有ベクトルを考えることができる。したがって、行列についても、複素数の範囲で考えることが、かえって制約がなくなり、扱いやすくなる。$n\times 1$複素行列を**複素 数ベクトル**といい、その全体を記号$\mathrm{C}^n$で表す。$\mathrm{C}^n$においても複素 数ベクトルの和および複素数倍を考えることができるので、**複素 数ベクトル空間**という。複素 数ベクトル空間$\mathrm{C}^n$においては、$\mathrm{R}^n$と同様に、１次結合、１次独立系、１次従属系、部分ベクトル空間、次元などの議論ができる。

9-6.　$n\times n$行列$A$に対して、$p$個のベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p$が$A$の**高さ**$p$の**ジョルダン系列**であるとは、ある数$\lambda$について、

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{a}_p=\boldsymbol{a}_{p-1},\quad (A-\lambda E)\boldsymbol{a}_{p-1}=\boldsymbol{a}_{p-2},\quad \cdots,$$
$$(A-\lambda E)\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0},\quad (A-\lambda E)\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$$

をみたすことである。これを行列で表せば、

$$A(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_p) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_p)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となる。$\lambda$ をこの**ジョルダン系列の固有値**という。

9-7.　$n \times n$ 行列 $A$ の固有値 $\lambda$ に対して、$(A-\lambda E)^i \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ をみたす自然数 $i$ をもつベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体がつくる集合を、$A$ の固有値 $\lambda$ の**広い意味の固有空間**といい、記号 $W_\lambda(A)$ で表すことにする。広い意味の固有空間 $W_\lambda(A)$ は部分ベクトル空間である。また、相異なる固有値に対する広い意味の固有空間は互いに1次独立である。

$n \times n$ 行列 $A$ の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_q$ とするとき、

$$\mathrm{C}^n = W_{\lambda_1}(A) + W_{\lambda_2}(A) + \cdots + W_{\lambda_q}(A)$$

がなりたつ。これは、$n \times n$ 行列 $A$ の特性多項式 $\chi_A(t) = |A - tE|$ の変数 $t$ に行列 $A$ を代入してできる行列について、$\chi_A(A) = O$ がなりたつという**ハミルトン・ケーリーの定理**を用いて証明できる。ハミルトン・ケーリーの定理は「行列を成分とする行列」を用いることによって証明できる。

$n \times n$ 行列 $A$ について、部分ベクトル空間 $V$ の基底が有限個のジョルダン系列からできているとき、$V$ の**ジョルダン基底**という。広い意味の固有空間 $W_\lambda(A)$ にジョルダン基底が存在することを証明できるのでので、$n \times n$ 行列 $A$ について、$\mathrm{C}^n$ のジョルダン基底が存在する。特に実行列 $A$ の固有値がすべて実数ならば、$\mathrm{R}^n$ のジョルダン基底が存在する。これを**ジョルダン標準化可能定理**という。なお、ジョルダン基底の存在は数学的帰納法を用いても証明でき、さらにそれを用いて逆にハミルトン・ケーリーの定理を導くことができる。

9-8.　正方行列 $A$ のジョルダン基底を行列で書き表すことにより、累乗 $A^n$ が計算できる。

10-1.　2つの $n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ を**内積**という。また、$n$ 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**といい、記号 $\|\boldsymbol{x}\|$ で表す。$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ は**シュワルツの不等式**と呼ばれる内積とノルムの関係式である。シュワルツの不等式より、不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を得る。2つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が**直交する**とは、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ がなりたつことである。

10-2.　$k$ 個のノルム1のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ が互いに直交するとき、**正規直交系**であるという。正規直交系は1次独立系である。与えられた1次独立系から正規直交系をつくる方法（**シュミットの方法**）がある。

正方行列 $C$ が $C^TC = E$（$E$ は単位行列）をみたすとき、**直交行列**という。$n \times n$ 行列 $C$ の列から定まる $n$ 個のベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とするとき、$C$ が直交行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が正規直交系であることである。

10-3.　$\mathrm{C}^n$ の2つの複素数ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ に対して、$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \overline{w}_1z_1 + \overline{w}_2z_2 + \cdots \overline{w}_nz_n$ を**複素内積**という。

10-4.　$n \times n$ 実行列 $A$ が $A^T = A$ をみたすとき、$A$ は**実対称行列**であるという。$n \times n$ 実行列 $A$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}$ とするとき、$A$ が実対称行列になるのは、すべての $i, j = 1, 2, \cdots, n$ について、$a_{ji} = a_{ij}$ がなりたつ場合である。実対称行列 $A$ について、固有値は実数であり、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。さらに、$n \times n$ 実対称行列 $A$ に対して、$AC = C\Lambda$ をみたす直交行列 $C$ と実対角行列 $\Lambda$ が存在する。これを、**実対称行列の直交行列による実対角化定理**という。実対角行列 $\Lambda$ は $A$ の固有値を並べてつくり、直交行列 $C$ は固有値の順にノルム1の固有ベクトルを並べてつくればよい。

$n \times n$ 複素行列 $A$ は $A^* = A$ をみたすとき、**エルミート行列**という。また、$n \times n$ 複素行列 $C$ は $C^*C = E_n$（$E_n$ は $n \times n$ 単位行列）をみたすとき、**ユニタリ行列**という。エルーミート行列はユニタリ行列で実対角化できる。

10-5.　実数係数の $n$ 変数の 2 次式は、実対称行列を用いて書き表わすことができ、その実対称行列を実対角化すれば、2 次式は対角行列による変数変換で 2 乗の項だけからなる 2 次式に書き直すことができる。これを**実 2 次式の直交変換による標準化**という。実 2 次式の直交変換による標準化は、多変数関数の極値理論、2 次曲面の分類理論、多変量解析の主成分分析の理論などに応用される。

$n \times n$ 実対称行列 $A$ に対して、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が $A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \cdots, A\boldsymbol{u}_n = \lambda_n \boldsymbol{u}_n$ をみたす正規直交系であるとき、$A = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T$ がなりたつ。これは実対称行列 $A$ のランク 1 の行列への分解であり、**実対称行列のスペクトル分解**という。

11-1.　$n$ 個の自然数 $1, 2, \cdots, n$ のすべてを並べた配列を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の**順列**といい、順列において大小の順が逆になっている 2 つの数の組を**逆転**と呼ぶ。逆転の個数が偶数のとき、**偶順列**とよび、$sgn(i_1 i_2 \cdots i_n) = +1$ で表し、奇数のとき、**奇順列**と呼び、$sgn(i_1 i_2 \cdots i_n) = -1$ で表す。

11-2.　$n$ 次の**行列式の値**を

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} sgn(i_1 i_2 \cdots i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

で定める。

11-3.　$n$ 次の行列式についても 3 次の行列式と同様の性質がなりたつ。

12-1.　座標空間の原点 O 以外の点 $\mathrm{P} = (a_1, a_2, a_3)$ と点 $\mathrm{Q} = (b_1, b_2, b_3)$ について、線分 OP と線分 OQ を 2 辺とする平行四辺形の面積は
$\sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$ である。

12-2.　座標空間の点Pから点Qへの矢線を点Pを**始点**とし点Qを**終点**とする**矢線ベクトル**と呼び、記号$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$で表す。点Pの座標を$(p_1, p_2, p_3)$、点Qの座標を$(q_1, q_2, q_3)$とするとき、3次元数ベクトル$\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$を矢線ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$の**成分**という。成分が等しい矢線ベクトルは同じものとみる。つまり、始点は異なっても向きと長さが等しい矢線ベクトルは同じものとみなす。矢線ベクトルの和と定数倍は成分の和と定数倍に対応する矢線ベクトルを考える。

12-3.　2つの3次元数ベクトル$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$に対して、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

により、**外積ベクトル**を定める。外積ベクトルはベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}$の両方に直交し、大きさが$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$を2辺とする平行4辺形の面積に等しい3次元数ベクトルである。ただし、右手において$\boldsymbol{a}$を親指方向、 $\boldsymbol{b}$を人差し指方向とすれば、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$は中指方向になる。外積ベクトルは3次元特有のものであり、物理学、電気工学、流体工学などで用いられる。