新訂版 問・章末問題 正解・略解

Last update: 2019/7/23

第 1 章

1.3 [問] $|t\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2t^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})t + |\mathbf{b}|^2 \geqq 0$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) より、判別式 $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$ は $\leqq 0$ である。

1.4 [問] (i) 行列式の性質 $\begin{vmatrix} b_i & a_i \\ b_j & a_j \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。

(ii) $\begin{vmatrix} a_i+c_i & b_i \\ a_j+c_j & b_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_i & b_i \\ c_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。 (iii) (ii) と同様。

(iv) $\begin{vmatrix} \lambda a_i & b_i \\ \lambda a_j & b_j \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$ から直ちに従う。 (v) $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ の第 1 列に関する余因子展開で左辺の内積を得る。

[問] i) $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ は、平行六面体の底面積に等しい。また、θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ のなす角度とすると、$|\mathbf{a}|\cos\theta$ は $\mathbf{b},\mathbf{c}$ が張る底面に対する平行六面体の高さに等しいので、値 $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ は平行六面体の体積である。

ii) $(c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{21}\mathbf{b}_2)\times(c_{12}\mathbf{b}_1 + c_{22}\mathbf{b}_2) = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2$ であることは直ちに確かめられる。

iii) $\mathbf{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ とおくと、直接の計算で $\Omega\mathbf{x} = {}^t(\omega_2x_3 - \omega_3x_2, \omega_3x_1 - \omega_1x_3, \omega_1x_2 - \omega_2x_1) = \omega\times\mathbf{x}$ であることが分かる。

[章末問題] (1.1) (i) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, (ii) ${}^t(x,y,z) = t\,{}^t[1,1,1] + {}^t[1,2,3]$ または $x-1 = y-2 = z-3$, (iii) ${}^t(x,y,z) = t\,{}^t[1,0,1] + {}^t[1,2,1]$ または $x-1 = z-1, y=2$

(1.2) (i) $x+y+z=3$, (ii) $-x-2y+z=-2$, (iii) $x-y+z=5$

(1.3) $a+b-c=0$ ($(a,b,c)\neq(0,0,0)$) なる a,b,c について ${}^t[x,y,z] = {}^t[3,2,1] + t\,{}^t[a,b,c]$ と表示される直線すべて。

(1.4) この領域 (3 角錐) の体積は $1/(6abc)$。 (1.5) 3。

(1.6) (i) ${}^t[0,0,a_1b_2-a_2b_1]$, (ii) ${}^t[a_2b_3, -a_1b_3, a_1b_2]$, (iii) ${}^t[a_2-b_2, b_1-a_1, a_1b_2-a_2b_1]$

(1.7) グラスマンの恒等式の両辺の各成分を比較する。$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ を $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = \det(\mathbf{x},\mathbf{a},(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))$ $\mathbf{x}\cdot((\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(x\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{c})$ に代入すれば、各成分が得られる。$x = \mathbf{e}_1$ とすると、それぞれ $a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3gc_1 - b_1c_3)$, $b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$ を得て、両者は一致する。残りの場合も同様。

　ヤコビの恒等式は、グラスマンの恒等式を使えば直ちに示せる。

(1.8) (i) $\cos\theta = 1/3$, (ii) $\cos\theta = 6/\sqrt{42}$

(1.9) (i) $\sqrt{42}/7$ (直線に直交し、点 $(1,2,3)$ を通る平面 $x+2y+3z=14$ と直線の交点を求める), (ii) $5/\sqrt{3}$

(1.10) $x-1 = \dfrac{y-2}{-2} = z-3$ (直線の方向ベクトルの平面への射影を求める)

(1.11) 図は省略。定義方程式から z を消去すると、$(x-1)(y-1) = \dfrac{1}{2}$ を得る。パラメータ表示は、例えば ${}^t[x,y,z] = {}^t\big[1+s, 1+\dfrac{1}{2s}, -1-s-\dfrac{1}{2s}\big]$ $(s\neq 0)$。

第 2 章

2.1 [問] (1) (i) ${}^t[y,x,1]$, (ii) ${}^t[-\sin x\sin(yz), z\cos x\cos(yz), y\cos x\cos(yz)]$, (iii) ${}^t[y+z, x-z, x-y]e^{xy-yz+zx}$, (2) (i) は明らかで、(ii) はライプニッツの法則から直ちに得られる。

[問] (i)、(iii) は成分ごとに考えて、どれもライプニッツの法則から直ちに得られる。

2.2 [問] (i) $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$, (ii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

2.5 [問] (i) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[0,0,0]$, $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 3$, (ii) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[0,0,0]$, $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = -\sin x + \cos y + 2z$, (iii) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[-ye^{yz}, -ze^{zx}, -xe^{xy}]$, $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = ye^{xy} + ze^{yz} + xe^{zx}$

[問] $\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3], \mathbf{G} = {}^t[g_1, g_2, g_3], \partial_i = \partial/\partial x_i$ $(i = 1,2,3)$ とする。

1),4) はライプニッツの法則から直ちに得られる。2) の両辺 (の第 1 成分) はどちらも、${}^t(\partial_2\partial_1 f_2 + \partial_3\partial_1 f_3 - (\partial_2^2 f_1 + \partial_3^2 f_1), \partial_3\partial_2 f_3 + \partial_1\partial_2 f_1 - (\partial_1^2 f_2 + \partial_3^2 f_2), \partial_1\partial_3 f_2 1 + \partial_2\partial_3 f_2 - (\partial_1^2 f_3 + \partial_2^2 f_3))$ に等しい。

3) は次の等式から分かる:

$$\partial_2(f_1g_2 - f_2g_1) - \partial_3(f_3g_1 - f_1g_3) = (\mathrm{div}\,G)f_1 - (\partial_1 g_1)f_1 - ((\mathrm{div}\,\mathbf{G}) \cdot F - (\partial_1 g_1)f_1)$$

5) は $\partial_1(f_2g_3 - f_3g_2) + \partial_2(f_3g_1 - f_1g_3) + \partial_3(f_1g_2 - f_2g_1) = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)g_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)g_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)g_3 - (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2)f_1 + (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3)f_2 + (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)f_3$ より分かる。

また、6) は右辺の半分 $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\mathrm{rot}\,\mathbf{G})$ の第 1 成分が次のようになることから分かる:

$$(f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + f_3\partial_3)g_1 + f_2(\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) - f_3(\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) = f_1\partial_1 g_1 + f_2\partial_2 g_2 + f_3\partial_3 g_3$$

[章末問題]

(2.1) (i) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = (-2u+4)\dfrac{\partial f}{\partial x} = \pm 2\sqrt{4-x}\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

(2.2) $\dfrac{d}{dt}g(\mathbf{r}(t)) = e^{x-y}(\sin(xy) + y\cos(xy)) + 2te^{x-y}(-\sin(xy) + x\cos(xy))\big|_{x=t,y=t^2}$
$= e^{t-t^2}\left(3t^2\cos t^3 + (1-2t)\sin t^3\right)$

(2.3) $f(X,Y) = f(xy, \frac{1}{y})$ を微分して、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial X}y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial X}x + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\left(\dfrac{-1}{y^2}\right)$ となり、それぞれ x, y を掛けて示すべき式が得られる。

(2.4) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, \cos t, -\sin t),\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, -\sin t, -\cos t)$ ゆえ、$t = 0$ で速度 $(0,1,0)$、加速度 $(2,0,-1)$ となる。

(2.5) (i) $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ として $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$ を計算すると、$r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \ \Rightarrow\ 2r\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \ \Rightarrow\ \dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}$ となるから、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^n}\right) = \frac{-n}{r^{n+1}}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{-n}{r^{n+1}}\frac{x_i}{r} \ \Rightarrow\ \mathrm{grad}\,f = \frac{-n}{r^{n+2}}{}^t[x_1, x_2, x_3]$$

(ii) $\mathrm{grad}\,f = {}^t[y, x, 1]$ (iii) $\mathrm{grad}\,f = {}^t\left[\dfrac{1-x^2-y^2+2xz}{(1+x^2-y^2)^2}, \dfrac{2y(x-z)}{(1+x^2-y^2)^2}, \dfrac{-1}{1+x^2-y^2}\right]$

(2.6) (i) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = [0,0,0],\ \mathrm{div}\,\mathbf{F} = 2(x+y+z)$, (ii) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = [-1,-1,-1],\ \mathrm{div}\,\mathbf{F} = 3$

(iii) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = [0,0,0],\ \mathrm{div}\,\mathbf{F} = xye^z$

(2.7) (i) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}]$, (ii) $\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{F}} = 0$、すなわち、$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$) なら、定義域が平面 R^2 全体の C^1 級ベクトル場については、$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,f$ なる関数 f が存在する。

しかし、定義域が平面 R^2 全体でない場合は成り立たない。ベクトル場 $\mathbf{F} = [\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}]$ について、$\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{F}} = 0$、$\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ (C は単位円周) はすぐに確かめられる。しかし、もし $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,f$ なる関数 f が存在すれば、$\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(t_1)) - f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$ となるはずである。

(2.8) (i) $\mathrm{grad}(\phi(\mathbf{x}))$ の i 番目成分は $\frac{\partial}{\partial x_i}\left({}^t\mathbf{x}B\mathbf{x}\right) = {}^t\mathbf{e}_i B\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}B\mathbf{e}_i$ であり、${}^t({}^t\mathbf{x}B\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{y}{}^tB\mathbf{x}$ ゆえ ${}^t\mathbf{x}B\mathbf{e}_i = {}^t\mathbf{e}_i{}^tB\mathbf{x}$ となる。従って $\mathrm{grad}(\phi(\mathbf{x})) = B\mathbf{x} + {}^tB\mathbf{x} = (B + {}^tB)\mathbf{x}$ となる。

(ii) $A = (a_{ij})$ とおくと、仮定 ${}^tA = A$ より $a_{ji} = a_{ij}$ である。また $\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ として $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (f_i)_{x_j}$ などと略す。すると $f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$ で $(f_i)_{x_j} - (f_j)_{x_i} = a_{ij} - a_{ji} = 0$ となり、$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[(f_3)_{x_2} - (f_2)_{x_3}, (f_1)_{x_3} - (f_3)_{x_1}, (f_2)_{x_1} - (f_1)_{x_2}]$ ゆえ $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$ を得る。

(2.9)　$\mathbf{F} = {}^t[f_1, f_2, f_3]$ とおく。$\operatorname{grad} f = {}^t[\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f]$ ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) であるから、$\mathbf{F} \times \operatorname{grad} f = {}^t\big(f_2\partial_3 f - f_3\partial_2 f, f_3\partial_1 f - f_1\partial_3 f, f_1\partial_2 f - f_2\partial_1 f\big)$ となる。従って、

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \operatorname{grad} f) = \partial_1(f_2\partial_3 f - f_3\partial_2 f) + \partial_2(f_3\partial_1 f - f_1\partial_3 f) + \partial_3(f_1\partial_2 f - f_2\partial_1 f)$$
$$= (\partial_1 f_2)(\partial_3 f) - (\partial_1 f_3)(\partial_2 f) + (\partial_2 f_3)(\partial_1 f) - (\partial_2 f_1)(\partial_3 f) + (\partial_3 f_1)(\partial_2 f) - (\partial_3 f_2)(\partial_1 f)$$
$$+ f_2\partial_1\partial_3 f - f_3\partial_1\partial_2 f + f_3\partial_2\partial_1 f - f_1\partial_2\partial_3 f + f_1\partial_3\partial_2 f - f_2\partial_3\partial_1 f$$
$$= \big((\partial_2 f_3) - (\partial_3 f_2)\big)(\partial_1 f) + \big((\partial_3 f_1) - (\partial_1 f_3)\big)(\partial_2 f) + \big((\partial_1 f_2) - (\partial_2 f_1)\big)(\partial_3 f) = (\operatorname{rot}\mathbf{F}) \cdot (\operatorname{grad} f)$$

(2.10)　2.5 節の基本性質 3),5) により、$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \neq 0,\ \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot}\mathbf{G}) \neq 0$ なるベクトル場 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ を考えればよいが、3) では $\mathbf{F} = {}^t[x, y, z], \mathbf{G} = {}^t[1, 1, 1]$ と、5) では $\mathbf{F} = {}^t[1, 1, 1], \mathbf{G} = {}^t[z, x, y]$ とおけばよい。
(2.11)　2.6 節の例題で見たとおり、$\mathbf{F} = P\mathbf{G},\ \operatorname{grad} f = P \operatorname{grad} g$ である。これから関数を除けば $\nabla_x = P\nabla_y$ に他ならない。

第 3 章

3.2　[問]　1. の円周　$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t, \cos t, 0)$ ゆえ、$\displaystyle\int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

2. の螺旋　$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t, \cos t, 1)$ ゆえ、$\displaystyle\int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$

3. の放物線　章末問題 3.2, b) より、$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{4}\Big(2 \cdot 2\sqrt{1 + 4 \cdot 2^2} + \log(2 \cdot 2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2^2}\Big) = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\log(4 + \sqrt{17}).$

4. のサイクロイド　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} dt = 8.$

5. の心臓型　$\dot{\mathbf{r}} = (-\sin t - \sin 2t, \cos t + \cos 2t, 0)$ ゆえ、$\displaystyle L(s) = \int_C |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_0^s \sqrt{2(1 + \cos t)} dt = \int_0^s 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt$ である。$s \leqq \pi$ のとき、$\displaystyle L(s) = \int_0^s 2\cos\frac{t}{2} dt = 4\sin\frac{s}{2}$　$\pi \leqq s \leqq 2\pi$ のとき、$\displaystyle L(s) = L(\pi) + \int_\pi^s -2\cos\frac{t}{2} dt = 8 - 4\sin\frac{s}{2}.$ 特に $L(2\pi) = 8.$

3.4　[問]　(1)　被積分関数 ($\times$ 積分要素) を $\omega = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$ とおく。ω を積分路 C_1 上で考えた $\omega|_{C_1}$ は $\omega|_{C_1} = (\beta t + \gamma t)d(\alpha t) + (\gamma t + \alpha t)d(\beta t) + (\alpha t + \beta t)d(\gamma t) = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)t dt$ となるので、C_1 上の線積分は $\displaystyle\int_{C_1} \omega = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\int_0^1 t dt = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ となる。

ω を積分路 C_2 上で考えた $\omega|_{C_2}$ は $\omega|_{C_2} = (\beta t + 0)d(\alpha) + (0 + \alpha)d(\beta t) + (\alpha + \beta t)d(0) = \alpha\beta dt$ となるので、C_2 上の線積分は $\displaystyle\int_{C_2} \omega = \alpha\beta\int_0^1 dt = \alpha\beta$ となる。

(2)　$\displaystyle I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ とおく。

(i)　$\displaystyle I = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$　(ii)　この C 上で $dx = dy = 0$ ゆえ、$I = 0.$

(iii)　$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と分ける。ただし、$C_1 : (x, y) = (1 - t, t)\ (0 \leqq t \leqq 1),\ C_2 : (x, y) = (-t, 1 - t)\ (0 \leqq t \leqq 1),\ C_3 : (x, y) = (t - 1, -t)\ (0 \leqq t \leqq 1),\ C_4 : (x, y) = (t, t - 1)\ (0 \leqq t \leqq 1).$ すると、$\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ であり、よって $\displaystyle I = 4\int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t + 2t^2} = 4\int_0^1 \frac{2dt}{1 + (2t - 1)^2} = 8\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = 8\big[\arctan x\big]_0^1 = 2\pi.$

3.5　[問]　(1)　S を単位円盤とする。グリーンの公式により、$\displaystyle\int_C (x^2 + xy^2)dx + 2x^2 y dy = \int_S (-2xy + 4xy) dx dy$ となる。極座標に移行して $\displaystyle\int_S 2xy dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2 \cos\theta \sin\theta r dr d\theta = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\big[-\cos\theta\big]_0^{2\pi} = 0$ となる。

(2) (i) この曲線は $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とパラメータ表示できる。この曲線で囲まれた領域の面積は $\frac{1}{2}\int_C(-fdx + xdy) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\big(3\cos^2\theta\sin^4\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta\big)d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2$

(ii) この領域の x 軸に沿った部分を C_1、サイクロイドに沿った部分を C_2 とし、正の向きをつける。C_1 上 $y = 0$ ゆえ、$\int_{C_1} -ydx = 0$。一方、(正の向きの)C_2 に沿った積分は $\int_{C_2} -ydx = -\int_0^{2\pi} -(1-\cos t)d(t-\sin t) = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = 3\pi$。ゆえに、$C_1 + C_2$ で囲まれた領域の面積は、3π である。

[章末問題]

(3.1) i) の曲線は, ねじれ 3 次曲線と呼ばれる曲線. 図は略す. (ii) の曲線は, xy 平面上で $y = (e^x + e^{-x})/2$ で与えられる. 図は略す.

(3.2) a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ ゆえ、弧の長さは $\int_0^s \sqrt{2}dt = \sqrt{2}s$.

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 2)$ ゆえ、弧の長さは $\int_0^s \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left(2s\sqrt{1+4s^2} + \log(2s + \sqrt{1+4s^2}\right)$. ここで、$\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ を使った。

c) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1-\cos t, \sin t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)$ ゆえ、弧の長さは $\int_0^s \sqrt{2-2\cos t}dt = \int_0^s \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = \int_0^s 2\sin\frac{t}{2}dt = 4(1-\cos\frac{s}{2})$.

(3.3) (i) $\dot{\mathbf{r}}(t) = {}^t[1, 2t, \cos t - t\sin t]$ であり、$\dot{\mathbf{r}}(\pi) = {}^t[1, 2\pi, -1]$, $\mathbf{r}(\pi) = {}^t[\pi, \pi^2, -\pi]$ となる。$t = \pi$ での接線の式は、$(x, y, z) = {}^t[\pi, \pi^2, -\pi] + s\,{}^t[1, 2\pi, -1]$ あるいは $x - \pi = \frac{y-\pi^2}{2\pi}, \frac{z+\pi}{-1}$.

(ii) yz 平面 $x = 0$ と直線の交点で $s = -\pi$ ゆえ、その交点は $(0, -\pi^2, 0)$.

(3.4) (i) $\dot{\mathbf{r}}(t) = {}^t[-\sin t, \cos t, 1]$, $\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}(t) = -\cos^2 t\sin t + \sin^2 t\cos t + t^2$ であるから、$\int_0^{\pi/2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$.

(ii) $\dot{\mathbf{r}}(t) = {}^t[2t, 4t^3, 6t^5]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = {}^t[t^{26}, 2t^{24}, 3t^{22}]$ であるから、$\int_0^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 28t^{27}dt = 1$.

(3.5) 積分路に次のパラメータ表示をする： $OP : (x, y) = (t, 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $PQ : (x, y) = (1, 2t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $QR : (x, y) = (1-t, 2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ $RO : (x, y) = (0, 2-2t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

OP, PQ, QR, RO 上でそれぞれ $\dot{\mathbf{r}} = (1, 0), (0, 2), (-1, 0), (0, -2)$ となり、$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ はそれぞれ、$\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 2t\cdot 2dt = 2$, $\int_0^1 (1-t)e^2(-1)dt = -\frac{1}{2}e^2$, $\int_0^1 0dt = 0$ である。従って、$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^2$ となる。

(3.6) $\mathbf{F} = {}^t[-y, x, -z]$ とおくと、この積分は $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ と表せる。

C のパラメータ表示 ${}^t[x, y, z] = \mathbf{r}(\theta) = {}^t[\cos\theta, \sin\theta, 1 - \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)]$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考えると、$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}(0) = {}^t[0, 1, -1]$ であり、このパラメータ表示が使える。線積分を計算すると、

$$\int_C -ydx + xdy - zdz = \int_0^{2\pi}\left\{-\sin\theta d(\cos\theta) + \cos\theta d(\sin\theta) + (1-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right))d(1-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}d\theta = \left[\theta + \sqrt{2}\sin\left(\theta+\tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\cos\left(2\theta+\tfrac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

となる。

(別解) S を平面 $x + y + z = 1$ 内の曲線 C で囲まれた領域とする: S : $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x + y + z = 1$

$\partial S = C$ であり、S のパラメータ表示 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を使うと、$d\mathbf{A} = r\,{}^t[1, 1, 1]drd\theta$ となる。この S の向きから決まる ∂S の向きは、与えられた C の正の向きと一致する。

$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = {}^t[0,0,2]$ となるから、第 6 章のストークスの公式を使えば、$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = 2\int_0^1\int_0^{2\pi} r dr d\theta = 2\pi$ となる。

(3.7) 線積分はグリーンの公式により $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqq 1} (-2+1)dxdy = -\pi$ となる。

(3.8) 3.5 節、[例題] (勾配ベクトル場の線積分) の式 $\displaystyle\int_C (\mathrm{grad}\, f)\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(t))|_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ により、$\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (a+1)^2(b+1)(c+1) - a^2bc.$

(3.9) この領域の第 1 象限を S_1 として、$A(S_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial S_1} (xdy - ydx)$ を考える。境界を $\partial S_1 = C_x + C + C_y$ (C_x, C_y はそれぞれ x, y 軸に沿った部分) と分ける。C を $(x,y) = (a\cos^4\theta, a\sin^4\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とパラメータ表示する。

C_x 上では $y = 0$ ゆえ、$xdy - ydx = 0$ である。同様に、C_y 上で $xdy - ydx = 0$ である。従って、$A(S_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C [a\cos^4\theta\cdot 4a\sin^3\theta\cos\theta + (-a\sin^4\theta)\cdot 4a\cos^3\theta(-\sin\theta)]d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin^3\theta d\theta = \dfrac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta d\theta = \dfrac{a^2}{8}\int_0^{\pi}\sin^3 t dt = \dfrac{a^2}{8}\Big[-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^{\pi} = \dfrac{a^2}{6}$ となり、$A(S) = 4A(S_1) = \dfrac{2}{3}a^2$ となる。

(3.10) 面積を求める領域を S とすると、$A(S) = \displaystyle\int_{\partial S} xdy$ と計算できる。

すると $dy = (\cos t + \cos 2t)dt$ であり、

$$\begin{aligned} xdy &= (1+\cos t)\cos t(\cos t + \cos 2t)dt = (\frac{1}{2} + \cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)(\cos t + \cos 2t)dt \\ &= \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\cos t + \cos 2t + \frac{3}{4}\cos 3t + \frac{1}{4}\cos 4t =: h(t) \end{aligned}$$

となるので、$A(S) = \displaystyle\int_{\partial S} xdy = \int_0^{2\pi} h(t)dt = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$

第 4 章

4.1 [問] 1) $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-1}}{2}$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-1}}{2}$ を双曲線関数とする。

1. 楕円面 $(x,y,z) = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\sin\varphi, c\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2})$
2. 1 葉双曲面 $(x,y,z) = (a\cosh t\cos\varphi, b\cosh t\sin\varphi, c\sinh t)$ $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$
3. 2 葉双曲面 $(x,y,z) = (a\cosh t, b\sinh t\cos\varphi, c\sinh t\sin\varphi)$ $(-\infty < t < \infty,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$
4. 関数 $g(x,y)$ のグラフ $(x,y,z) = (x,y,g(x,y))$ $((x,y) \in$ g の定義域)

2) 図は略す。

4.3 [問] 1) 曲面の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面を考える。 1. 楕円面 $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} + \dfrac{z_0z}{c^2} = 0$

2. 1 葉双曲面 $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - \dfrac{z_0z}{c^2} = 0$ 3. 2 葉双曲面 $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} - \dfrac{z_0z}{c^2} = 0$

4. 関数 $g(x,y)$ のグラフ $z - z_0 = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

2) $f = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1$ として $\mathrm{grad}\, f = \big(\dfrac{x_1}{a^2}, -\dfrac{y_1}{b^2}, -\dfrac{z_1}{c^2}\big)$ だから、P_0P_1 と接平面の直交条件は、ある λ について $\lambda\,\mathrm{grad}\, f = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ となる。これを解いて $(x_1,y_1,z_1) = \big(x_0/(1+\frac{\lambda}{a^2}), y_0/(1-\frac{\lambda}{b^2}), z_0/(1-\frac{\lambda}{c^2})\big)$ 。ただし、λ は $\dfrac{x_0^2}{(a+\frac{\lambda}{a})^2} - \dfrac{y_0^2}{(b-\frac{\lambda}{b})^2} - \dfrac{z_0^2}{(c-\frac{\lambda}{c})^2} = 1$ の解である。

[章末問題]

(4.1) xz 平面内の 2 直線 $x - z = 0, x + z = 0$ を z 軸の周りに回転してできる円錐である。図は略す。

(4.2) 図は略す。パラメータ表示は、例えば $(x,y,z) = (az\cos\theta, bz\sin\theta, z)$ $(-\infty < z < \infty,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で与えられる。

(4.3) (i) $3x - y + z = 0$ (ii) $9x - 12y - z - 4 = 0$

(4.4) 曲面の法線ベクトル $(-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1) = (-2x, -6y, 1)$ が、$(4,3,-1)$ に並行になればよい。よって、$(2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{19}{4})$。

(4.5) 空間曲線についても曲線の長さは、$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|dt$ で与えられる。

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\dfrac{dv}{dt} = J(\mathbf{x})\mathbf{w},\ J(\mathbf{x}) = \Big(\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\Big) = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v),\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$ となるが、${}^tJ(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ であることに注意すると、$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = {}^t\mathbf{w}{}^tJ(\mathbf{x})J(\mathbf{x})\mathbf{w} = E\Big(\dfrac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\Big(\dfrac{du}{dt}\Big)\Big(\dfrac{dv}{dt}\Big) + G\Big(\dfrac{dv}{dt}\Big)^2$ から、$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{E\Big(\dfrac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\Big(\dfrac{du}{dt}\Big)\Big(\dfrac{dv}{dt}\Big) + G\Big(\dfrac{dv}{dt}\Big)^2}$ となるので求める式を得る。

(4.6) a) F の Jacobi 行列は

$J(F)_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(a,b,c) & f_y(a,b,c) & f_z(a,b,c) \end{pmatrix}$ となる。ここで、$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}, f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}, f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ 。

従って、$\det J(F)_{(a,b,c)} = \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ ゆえ、rank $J(F)_{(a,b,c)} = 3$ である。

b) $F^{-1}(u,v,w) := (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w))$ の両辺を F で写像すると、$F(F^{-1}(u,v,w)) = F(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) = (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)))$ となる。一方、逆写像の定義により $F(F^{-1}(u,v,w)) = (u,v,w)$ であるから、$g_1(u,v,w) = u,\quad g_2(u,v,w) = v,\quad f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) = w$ を得る。

c) b) の最後の式で、$w = 0$ とおくと、$f(u, v, g_3(u,v,0)) = 0$ となる。$x = u, y = v$ と書き換えれば、g_3 の定義に注意して、$f(x, y, g(x,y)) = 0$ を得る。

第 5 章

[章末問題]

(5.1) (i) $A(S) = \displaystyle\int_S dxdy = \int_{D^*} 4(u^2+v^2)dudv = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 4r^2 \cdot rdrd\theta = \frac{\pi}{2}$

(ii) 極座標で表すと、y 軸の右の部分が $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ $(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4})$ となるから、

$A(S) = 2\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Big(\int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} rdr\Big) d\theta = 2a^2.$

(5.2) $dxdy = d(4u)d(3v) = 12dudv$ ゆえ、$\displaystyle\int_D xydxdy = \int_D 4u(2u+3v)12dudv = 48\int_D (2u^2 + 3uv)dudv = 140.$

(5.3) $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = {}^t[-r^2\cos\theta, -r^2\sin\theta, r]$ であり、$dA = r\sqrt{1+r^2}drd\theta$ となる。よって、$A(S) = \displaystyle\int_S dA = \int_0^a r\sqrt{1+r^2}dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}((1+a^2)^{3/2} - 1).$

(5.4) (i) $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = {}^t[-z_x, -z_y, 1] = {}^t[-2x, -1, 1]$ であり、$dA = \sqrt{2+4x^2}dxdy$ となる。よって、$\displaystyle\int_S xdA = \frac{1}{6}(6^{3/2} - 2^{3/2}).$

(ii) 球の対称性により、$\displaystyle\int_S z^2 dA = \int_S y^2 dA = \int_S x^2 dA$ であり、$\displaystyle\int_S z^2 dA = \frac{1}{3}\int_S (x^2+y^2+z^2)dA = \frac{1}{3}\int_S dA$ となる。よって、(単位球面の表面積は 4π であるから) $\displaystyle\int_S z^2 dA = \frac{4}{3}\pi.$

(5.5) $d\mathbf{A} = \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta drd\theta = {}^t[\sin\theta, -\cos\theta, r]drd\theta$ となるから、面積は $A(S) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2}drd\theta = 2\pi\Big[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2}\log|r + \sqrt{1+r^2}|\Big]_0^1 = \big(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\big)\pi.$

(5.6) (i) S をグラフ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ($D:\ x^2+y^2 \leqq 1$) とみて、$d\mathbf{A} = {}^t[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1]$ となる。よって、$\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi.$

(ii) S をグラフ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ とみて、S の向きを xy 平面の向きで入れ、さらに、x,y を極座標 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ($1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$) に換える。$d\mathbf{A} = {}^t[-\cos\theta, -\sin\theta, 1]drd\theta$ となる。よって、$\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_1^2\int_0^{2\pi} r^3(1-\cos^3\theta-\sin^3\theta)drd\theta = \frac{15}{2}\pi.$

(iii) $(x,y,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ ($D:\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq z\leqq 1$) とパラメータ表示する。$d\mathbf{A} = {}^t[\cos\theta, \sin\theta, 0]d\theta dz$ となる。よって、$\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_D (\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta dz = 2\pi.$

(5.7) $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ とみて、$d\mathbf{A} = {}^t[\frac{cx}{a^2}/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \frac{cy}{b^2}/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, 1]dxdy$ となる。よって、$\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \frac{2\pi}{5}a^3bc.$

(5.8) S のパラメータ表示として $\mathbf{x}(x,y) = (x,y,z_0)$ ($(x,y)\in D$) と取れる。ここで、D は S の平面 $z=z_0$ への射影である。S の向きとして x,y の順番を取ることにする。すると、$\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial y} = {}^t[1,0,0]\times{}^t[0,1,0] = {}^t[0,0,1]$。

一方、この問では $\mathbf{F} = {}^t[f,0,0]$ と取れる。ゆえに、$\displaystyle\int_S f(x,y,z)dydz = \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_D \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial y}\right)dxdy = \int_D 0dxdy = 0$ となる。

第 6 章

[章末問題]

(6.1) 円柱を底面、上面、側面に分ける: $S = S_0+S_1+S_2$. パラメータ表示は、次の通り。

$S_0:\ (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ ($0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$), $S_1:\ (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ ($0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$), $S_2:\ (x,y,z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$ ($0\leqq z\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$)。

S_i 上の面積分を I_i とする。S_0, S_1 で $dz=0$ であるから、$\displaystyle -I_0 = \int_{S_0}(z-y)dxdy = \int_0^a\int_0^{2\pi}(-r\sin\theta)rdrd\theta = -\int_0^a r^2dr\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$, $\displaystyle I_1 = \int_{S_1}(z-y)dxdy = \int_0^a\int_0^{2\pi}(1-r\sin\theta)rdrd\theta = \int_0^a\int_0^{2\pi}rdrd\theta - \int_0^a\int_0^{2\pi}(-r\sin\theta)rdrd\theta = \pi a^2$. ($S_1$ の正の向きは、下向き：$-dxdy$ が正。)

S_2 の法線ベクトルは xy 平面に平行ゆえ、S_2 上 $dxdy=0$ である。また、$dydz = a\cos\theta d\theta dz,\ dzdx = a\sin\theta d\theta dz$ である。よって、

$\displaystyle I_2 = \int_0^1\int_0^{2\pi}\big[(a\cos\theta - z)a\cos\theta + a(\sin\theta-\cos\theta)\big]d\theta dz = (a^2 - az\cos\theta + a^2\sin\theta\cos\theta)d\theta dz = 2\pi a^2.$

以上より、$I = I_0+I_1+I_2 = 3\pi a^2$.

(6.2) (i) $f = x^2\cos y$ (ii) (i) の f を用いて、線積分は $\displaystyle\int_C \operatorname{grad} f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(t_1)) - f(\mathbf{r}(t_0)) = e^{2t_1-2}\cos\sin\frac{\pi}{t_1} - e^{2t_0-2}\cos\sin\frac{\pi}{t_0}.$

(6.3) ストークスの公式を使うと計算は比較的楽である。(i) -2π (ii) -16π

(6.4) S のベクトル版面積要素 $d\mathbf{A}$ として $d\mathbf{A} = {}^t[1,0,g_x]\times{}^t[0,1,g_y] = {}^t[-g_x, -g_y, 1]dxdy$
$= {}^t[-2x, 2y, 1]dxdy$ となり、$\mathbf{F} = {}^t[y+z, z+x, x^2+y^2]$ とするとき、

$\int_S (y+z)dydz + (z+x)dzdx + (x^2+y^2)dxdy = \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_D (2z(y-x)+(x^2+y^2))dxdy$

ただし、$D:\ -1\leqq x\leqq 1,\ -1\leqq y\leqq 1$ である。

$$\begin{aligned}\int_D (2z(y-x)+(x^2+y^2))dxdy &= \int_{-1}^1 dx\int_{-1}^1 dy(2x^2y+2xy^2-2x^3-2y^3+x^2+y^2)\\ &= \int_{-1}^1 dx\cdot 2\int_0^1 (2xy^2-2x^3+x^2+y^2)dy = \int_{-1}^1 dx\cdot 2\left[\frac{2}{3}xy^3 - 2x^3y + x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1\end{aligned}$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}x - 2x^3 + x^2 + \frac{1}{3}\right]dx = 2\cdot 2\int_0^1\left[x^2+\frac{1}{3}\right]dx = 4\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right]_0^1 = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$ を得る。

(6.5) (i) $\mathbf{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$ とおくと $\mathbf{a}\times\mathbf{F} = {}^t[a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x]$ だから、$\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{F}) = {}^t[2a_1, 2a_2, 2a_3] = 2\mathbf{a}$ となる。

(ii) ストークスの公式を $\mathbf{a}\times\mathbf{F}$ に適用する。(i) により面積分は、$\int_S \mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} = 2\int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dA$ となるので、関係式 $2\int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dA = \int_{\partial S}(\mathbf{a}\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{r}$ が示せた。

(6.6) 第 2 章の章末問題 (2.9) にある通り、$\nabla_x = P\nabla_y$ が成り立つ。$\det P = 1$ であるような直交変換は、空間内の回転に他ならないので、$P(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (P\mathbf{a})\times(P\mathbf{b})$ が成り立ち、$\nabla_x\times\mathbf{F} = (P\nabla_y)\times\mathbf{F} = P(\nabla_y\times P^{-1}\mathbf{F})$ となる。

(6.7) (i) rot $(f\nabla g)$ の x 成分は、$\partial_y(f\partial_z g) - \partial_z(f\partial_y g) = (\partial_y f)(\partial_z g) - (\partial_z f)(\partial_y g)$ であるが、これは $(\nabla f)\times(\nabla g)$ の x 成分に等しい。他の成分も同様。

(ii) $\mathrm{rot}(f\nabla g + g\nabla f) = (\nabla f)\times(\nabla g) + (\nabla g)\times(\nabla f) = 0$ とストークスの公式により明らか。

(6.8) グリーンの公式と f の条件により $\int_C(\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy) = \int_S(-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dxdy = 0$ となる。

第 7 章

7.4 [問] $\frac{\partial\phi}{\partial t} = -vf'(x-vt)$ (または $vf'(x+vt)$), $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = v^2 f''(x-vt)$ (または $v^2f''(x+vt)$) ゆえ、方程式 $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi(x,t) = 0$ は直ちに分かる。

[章末問題]

(7.1) Ω を単位球 (の内部) とする。$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV = \int_\Omega 2(1+y+z)dV = 2\int_\Omega dV = \frac{8\pi}{3}$ となる。ここで、対称性により、$\int_\Omega ydV = \int_\Omega zdV = 0$ であることを使った。

(7.2) $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = y^2+x^2$ である。円柱の内部 Ω で、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ -1\leqq z\leqq 1$ とパラメータをとれば $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV = \int_{-1}^1 dz\int_0^1 r^2\cdot rdr\int_0^{2\pi}d\theta = \pi$ を得る。

(7.3) $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = 3$ であり、ガウスの公式により $\int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dA = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{r}dV = 3\ \times Vol(\Omega)$.

(7.4) $\mathbf{F} = \mathbf{n}$ とすれば、$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1$ である。S の内部を Ω とすると、ガウスの公式により $\int_S 1dA = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV$ である。

$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{2}{r}$ となる。$(x,y,z) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ $(0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ とパラメータをとると、$dxdydz = r^2\cos\theta drd\varphi d\theta$ となり、$\int_S 1dA = \int_\Omega \frac{2}{r}r^2\cos\theta drd\varphi d\theta = 2\int_0^R rdr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 4\pi R^2$.

(7.5) $\mathbf{F} = {}^t(x,y,0)$ とおくと、$I = \int_S xdydz + ydzdx = \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$ である。ガウスの公式により求める積分は $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV$ となる。$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 2$ ゆえ $I = 2\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F}dV = 2\times(\Omega$ の体積$)$ である。

Ω の x 軸に垂直な平面での断面の円盤の面積 $A(x)$ は、$A(x) = \pi y^2 = \pi\Big(1-\frac{x^2}{4}\Big)$ である。ゆえに、求める積分 V は

$$V = \int_{-2}^2 A(x)dx = \pi\int_{-2}^2\Big(1-\frac{x^2}{4}\Big)dx = 2\pi\int_0^2\Big(1-\frac{x^2}{4}\Big)dx = 2\pi\Big[x-\frac{x^3}{12}\Big]_0^2 = 2\pi\big(2-\frac{2}{3}\big) = \frac{8}{3}\pi$$

となる。これから、求める積分は $I = \frac{16}{3}\pi$ となる。

(7.6) ガウスの公式により、$\int_S xdydz = \int_\Omega 1dV$ であり、他の積分も同じ Ω の体積となる。

(7.7) 電磁誘導の法則を S 上積分して、ストークスの公式を使えば、$\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$ となるから、後は積分と $\dfrac{\partial}{\partial t}$ との順序交換をすればよい。

(7.8) 静電場では $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ であるから、一般化されたアンペールの法則を S 上積分してストークスの公式を使えば、求める関係式を得る。

第 8 章

8.2 [問] $\omega_i = a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + a_{i3}dx_3$ $(i = 1, 2)$ とおいて計算する。

$\omega_1 \wedge \omega_2 = (a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3) \wedge (a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3) = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})dx_2 \wedge dx_3 + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})dx_3 \wedge dx_1 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})dx_1 \wedge dx_2$ となる。

同様に $\omega_2 \wedge \omega_1$ を計算して、$\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$ なる結果を得る。

8.6 [問] 例えば、$\mathbf{F} = {}^t(1,1,1) = \mathrm{grad}(x+y+z) = \mathrm{rot}\,{}^t(z,x,y)$ は $\mathrm{grad}\,\phi$ とも $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ とも表される。

[章末問題]

(8.1) $\omega_1 = \omega_{\mathbf{A}}, \omega_2 = \omega_{\mathbf{B}}$ とおけば、条件 $\omega_1 \wedge \omega_2 = \eta$ は、$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$ に他ならない。$\mathbf{G}$ に直交する平面の 2 つのベクトルで張る平行四辺形の面積が $|\mathbf{G}|$ であるものを ($\mathbf{G}$ について連続微分可能に) とればよい。

(8.2) (i) $d\omega = 2(dx \wedge dy + du \wedge dv)$ であり、$d\omega \wedge d\omega = 8dx \wedge dy \wedge du \wedge dv$ を得る。

(ii) $\omega = fdg$ とすると、$d\omega = df \wedge dg$ であり、$\omega \wedge d\omega = (fdg) \wedge (df \wedge dg) = -fdf \wedge (dg \wedge dg) = 0$ となる。ここで、1 次微分形式同士は反交換することを利用した。

(8.3) (i) $du \wedge dx + dv \wedge dy = \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \wedge dx + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx \wedge dy = \left(-\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy$

(ii) $dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (dp + du) \wedge dx + (dq + dv) \wedge dy = dp \wedge dx + dq \wedge dy + du \wedge dx + dv \wedge dy$ だから、求める条件は $du \wedge dx + dv \wedge dy = 0$ すなわち、$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ である。

(8.4) (i) $2s^2(1+t^2)ds \wedge dt$, (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial s}ds + \dfrac{\partial f}{\partial t}dt = df$

(8.5) $d(fdx \wedge dy + gdy \wedge dz) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ となるので、求める条件は $\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0.$

(8.6) (i) $f = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, (ii) $d(xydx + xydy) \neq 0$ ゆえ、ポテンシャル関数 f を持たない。 (iii) $f = \dfrac{1}{3}x^3 + xy^2$

(8.7) すべて $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$ を満たす。

(i) $\mathbf{G} = [0, xy, xy])$, (ii) $\mathbf{G} = [0, -\cos x, x\sin y]$, (iii) $\mathbf{G} = [\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2y]$,

(8.8) $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$ ゆえ、$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,f$ なる関数 f が存在する。すると、$0 = \mathrm{div}\,\mathbf{F} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f = \nabla^2 f$ ゆえ、f が求めるものである。

(8.9) (i) 直接計算して確かめられる。 (ii) $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とパラメータをとる。$\displaystyle\int_C \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$