練習問題および章末問題の解答例

練習問題 1.1 (1) $108 = 2 \times 54$ なので真．(2) $753 = 3 \times 251$ なので偽．(3) $4^6 = 4096$, $6^4 = 1296$ なので真．(4) $800 = 2^5 5^2$ なので 800 の約数は $(5+1) \times (2+1) = 18$ 個．よって偽．

練習問題 1.2 (1) $x = -7$. (2) $x = 0, 1$. (3) $x = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

練習問題 1.3 (1) 108 は偶数ではない（つまり，108 は奇数である）．(2) 753 は素数ではない（つまり，753 は合成数である）．(3) 4^6 は 6^4 より大きくない（つまり，4^6 は 6^4 以下である）．(4) 800 の正の約数は 20 個以上ではない（つまり，800 の正の約数は 20 個未満である）．

練習問題 1.4 前件の「9 は素数である」が偽なので，正しい．

練習問題 1.5 次のようになる．

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

練習問題 1.6 次のようになる．

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

練習問題 1.7 最後のものだけを確かめてみよう（他も同様である）．真理値表

P	Q	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

において $\neg(P \to Q)$ の列と $P \wedge (\neg Q)$ は確かに一致している．

練習問題 1.8　ひとつめだけを確かめてみよう（ふたつめも同様である）．真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

において $\neg(P \wedge Q)$ の列と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ は確かに一致している．

練習問題 1.9　ひとつめだけを確かめてみよう（ふたつめも同様である）．真理値表

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

において $P \wedge (Q \vee R)$ の列と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ は確かに一致している．

練習問題 1.10　(1) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$

練習問題 1.11　(1) $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n < n^2$，つまり「$2^n < n^2$ となるような自然数 n が存在する」

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$，つまり「任意の実数 x に対して $x^2 \neq -1$ である」

問題 1.1　P, Q の真偽で場合分けをして，どの場合にも両辺の値が等しいことをそれぞれにおいて示せば良い．

問題 1.2　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

問題 1.3　分配法則を 2 回使えば良い．

問題 1.4　(1) は「含意とその対偶の真偽は一致する」という事実を表す．(2) は「背理法」の原理である．

練習問題 2.1　(1) $A = \{1, -1\}$

(2) $B = \{1, i, -1, -i\}$

(3) $C = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

練習問題 2.2　$X \cup Y = \{a, b, c, d, x, y, z\}$, $X \cap Y = \{b, d, z\}$, $X \setminus Y = \{a, y\}$, $Y \setminus X = \{c, x\}$.

練習問題 2.3　ヴェン図を描けば明らかであろう．

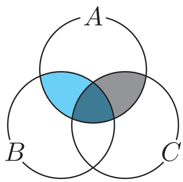
練習問題 2.4　「$x \in A$ または $x \in A$」も「$x \in A$ かつ $x \in A$」も単に「$x \in A$」と同じ条件なので $A \cup A = A \cap A = A$ である．また「$x \in A$ かつ $x \notin A$」を満たすような x はないので $A \setminus A = \varnothing$ である．

練習問題 2.5　任意の x に対し，$x \in A \cap \varnothing$ とすると $x \in A$ かつ $x \in \varnothing$ であるが，$x \notin \varnothing$ なので矛盾．つまり $x \notin A \cap \varnothing$ である．よって $A \cap \varnothing = \varnothing$ である．また $x \in A \cup \varnothing$ とすると $x \in A$ または $x \in \varnothing$ であるが，$x \notin \varnothing$ なので $x \in A$ となる，つまり $A \cup \varnothing \subset A$ である．逆の包含 $A \cup \varnothing \supset A$ は練習問題 2.3 により OK.

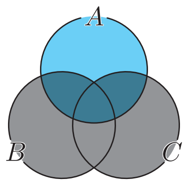
練習問題 2.6　$\bigcup_{i=1}^{4} X_i = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $\bigcap_{i=1}^{4} X_i = \{5,6\}$.

練習問題 2.7　ヴェン図を描けば明らかであろう．

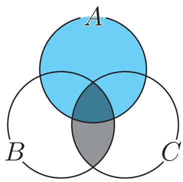
練習問題 2.8　分配法則の両辺の集合のヴェン図をそれぞれ描いてみると次のようになることから分かるだろう（ちょっと分かりにくいかもしれないが，左側は色が付いている部分，右側は 2 色が重なっている部分を見ること）.



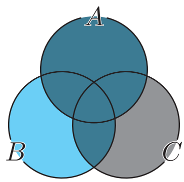
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



$A \cap (B \cup C)$

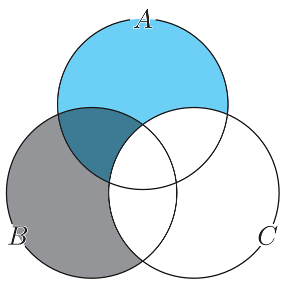


$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

練習問題 2.9　図



を眺めて納得して欲しい.

練習問題 2.10　略（本文中の図を眺めて納得して欲しい）.

練習問題 2.11　略.

練習問題 2.12　$A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ なので，包除原理より

$$|U| = \left|A \cup \overline{A}\right| = |A| + \left|\overline{A}\right| - |\varnothing| = |A| + \left|\overline{A}\right|$$

であることから分かる．

練習問題 2.13

$$\binom{X}{2} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},$$
$$\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}\}.$$

練習問題 2.14　$\binom{A}{n}$ の元を 1 つ決めることは，A の元から n 個を選ぶことと同じなので．

練習問題 2.15

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(\text{ハ}, \text{長調}), (\text{ハ}, \text{短調}), (\text{ニ}, \text{長調}), (\text{ニ}, \text{短調}),\\ &(\text{ホ}, \text{長調}), (\text{ホ}, \text{短調}), (\text{ヘ}, \text{長調}), (\text{ヘ}, \text{短調}),\\ &(\text{ト}, \text{長調}), (\text{ト}, \text{短調}), (\text{イ}, \text{長調}), (\text{イ}, \text{短調}),\\ &(\text{ロ}, \text{長調}), (\text{ロ}, \text{短調})\} \end{aligned}$$

練習問題 2.16　$\left\lfloor 1 - \sqrt{5} \right\rfloor = -1$, $\left\lceil 1 - \sqrt{5} \right\rceil = 0$.

問題 2.1　ヴェン図を描けば明らかであろう．

問題 2.2　ヴェン図を描けば明らかであろう．

問題 2.3　これもヴェン図を描いて考えても良いが，(2.1) を繰り返し使った計算によっても分かる．ちょっとやってみよう．

まず $B \cup C$ をひとまとめに考えて，A と $B \cup C$ に対して (2.1) を適用することで

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\ &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \end{aligned}$$

となる．B と C に対して (2.1) を適用すれば

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

である．また，分配法則を使うと

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

なので，$A \cap B$ と $A \cap C$ に対して (2.1) を適用すれば

$$\begin{aligned} |A \cap (B \cup C)| &= |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| \end{aligned}$$

となる．ここで落ち着いてよく見ると

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$$

であることが分かるだろう．よって結局

$$|A \cap (B \cup C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

ということになる．以上の計算を総合すれば (2.2) が導かれる．

問題 2.4　$n - 1 < x \leq n$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\lceil x \rceil = n$ と定めるのだった．このとき $-n \leq -x < -n + 1$ が成り立ち，$-n \in \mathbb{Z}$ なので，$\lfloor -x \rfloor = -n$ である．よって $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ が成り立つ．

問題 2.5　n が偶数のとき，$n = 2m$ $(m \in \mathbb{Z})$ とすると

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \lfloor m \rfloor + \lceil m \rceil = m + m = 2m = n$$

である．n が奇数のとき，$n = 2m + 1$ $(m \in \mathbb{Z})$ とすると

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor m + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil m + \frac{1}{2} \right\rceil = m + (m + 1) = 2m + 1 = n$$

である．

問題 2.6　$\lfloor x \rfloor$ は整数で $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ を満たすようなものである．このとき $n + \lfloor x \rfloor \leq n + x < n + \lfloor x \rfloor + 1$ が成り立つので $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ である．$\lceil n + x \rceil = n + \lceil x \rceil$ も同様．

問題 2.7　ヒントにあるように記号を設定すると

$$A \cap B = \left\{ n \in U \,\middle|\, n \text{ は } 6 \text{ の倍数} \right\}$$

なので

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor$$

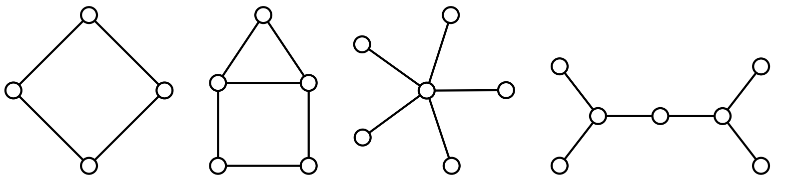
であるから，2 でも 3 でも割り切れないものの個数は（U を全体集合として）

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = \left|\overline{A \cup B}\right| = |U| - |A \cup B| = N - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor$$

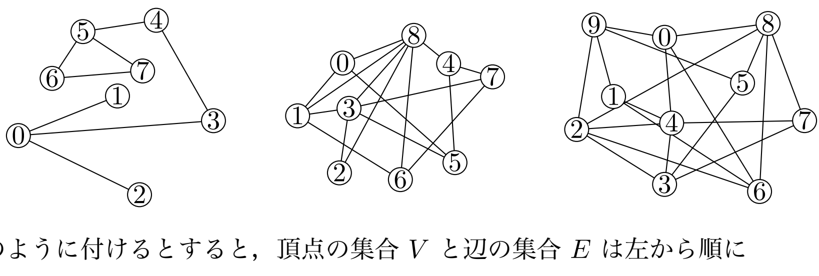
となる．

練習問題 3.1　$|G| = 7$, $\|G\| = 12$ である．

練習問題 3.2　それぞれ次のようになる．なお図示の仕方は無数にあるので，そのうちの一つを例示している．



練習問題 3.3　一例を挙げる．それぞれに対して，頂点の名前を



のように付けるとすると，頂点の集合 V と辺の集合 E は左から順に

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$E = \{01, 02, 03, 34, 45, 56, 57, 67\},$$

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$E = \{01, 05, 08, 13, 16, 18, 23, 28, 35, 37, 38, 45, 47, 48, 67, 68\},$$

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$E = \{04, 06, 08, 09, 14, 16, 19, 23, 24, 26, 28, 29, 34, 35, 37, 47, 58, 59, 68, 78\}$$

となる．

練習問題 3.4　多面体が伸縮自在な素材で出来ていると思おう．多面体のどれか一つの面を切り抜いて，そこに出来た穴をぐーっと広げて平らにすると，多面体グラフが平面グラフとして描かれたものが手に入る．

練習問題 3.5　$2, 3, 4$ の 3 つが 6 と独立な頂点である．また 12, 14, 16, 56 の 4 つが 37 と独立な辺である．

練習問題 3.6　$\mathcal{N}(3) = \{2, 5, 7\}$, $E(3) = \{23, 35, 37\}$ である．

練習問題 3.7　近傍は

$$\mathcal{N}(1) = \{3, 5\}, \quad \mathcal{N}(2) = \{4\}, \quad \mathcal{N}(3) = \{1, 5\},$$
$$\mathcal{N}(4) = \{2, 6\}, \quad \mathcal{N}(5) = \{1, 3\}, \quad \mathcal{N}(6) = \{4\}$$

である．よってそれぞれの次数は

$$\deg(1) = 2, \quad \deg(2) = 1, \quad \deg(3) = 2,$$
$$\deg(4) = 2, \quad \deg(5) = 2, \quad \deg(6) = 1$$

となる．

練習問題 3.8　v に接続する辺が d 本あるとすると，それらの辺の v 以外の端点の全体が $\mathcal{N}(v)$ で，これは d 個の頂点からなるので．

練習問題 3.9　（単純）グラフでは相異なる 2 頂点しか辺で結ばないので，v と辺を結べる頂点は v 以外の $(|G| - 1)$ 個の頂点である．

練習問題 3.10　$(\overbrace{4, 4, 4, 4}^{4}, \overbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3}^{6}, \overbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}^{10})$ である．

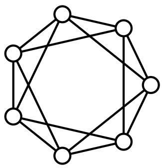
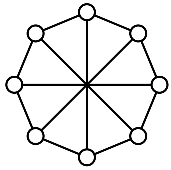
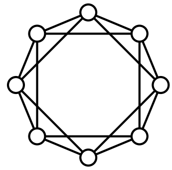
練習問題 3.11　$|G| = 10$, $\|G\| = 12$ であり，また G の次数列は $(4,3,3,2,2,2,2,2,2,2)$ である．よって

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 4+3+3+2+2+2+2+2+2+2 = 24 = 2 \times \|G\|$$

なので，握手補題が確かに成り立っている．

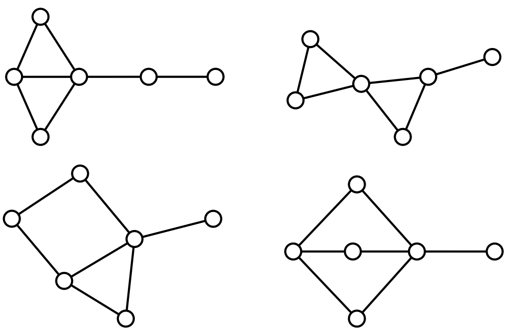
練習問題 3.12　正四面体グラフ，立方体グラフ，正十二面体グラフは 3-正則，正八面体グラフは 4-正則，正二十面体グラフは 5-正則である．

練習問題 3.13

(1)  (2)  (3) 

練習問題 3.14　握手補題により $12 \times 7/2 = 42$ 本の辺を持つ．

練習問題 3.15　次数列が $(4,3,2,2,2,1)$ のグラフで互いに同型でないものたちを列挙すると以下の 4 つである：



次数 4 の頂点を x，次数 3 の頂点を y，次数 1 の頂点を z としよう（これ以外の 3 つの頂点は次数 2）．$x \sim y$ か $x \not\sim y$ のいずれかだが，$x \not\sim y$ とすると y は x に隣接する 4 頂点のうちの 3 つと隣接し，残り 1 つの頂点が z となる．$x \sim y$ とすると，$z \not\sim x, y$ か $z \sim x$ か $z \sim y$ の 3 通りの場合があり，それぞ

れの場合においてそのようなグラフは 1 通りしかない.

練習問題 3.16　それぞれの次数列は順に

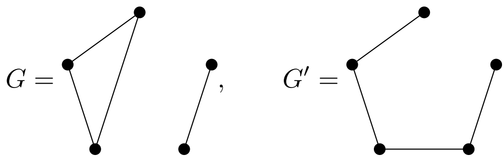
$$(0,0,0,0),\quad (1,1,0,0),\quad (2,1,1,0),\quad (1,1,1,1),$$
$$(2,2,1,1),\quad (3,1,1,1),\quad (2,2,2,0),\quad (2,2,2,2),$$
$$(3,2,2,1),\quad (3,3,2,2),\quad (3,3,3,3)$$

で，互いに異なるので，特に互いに同型ではない.

練習問題 3.17　略.

練習問題 3.18　k 本の辺を選ぶということは，辺で結びうる N 組の頂点対から k 組を選ぶということで，それは選ばれない $N-k$ 組を決めることと同じであるから.

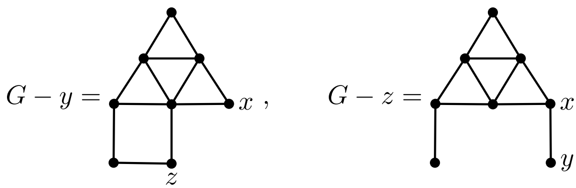
練習問題 3.19　(1) それぞれ次のようになる：



(2) どちらの次数列も $(2,2,2,1,1)$ である. (3) どちらのグラフにも次数 1 の頂点が 2 個ずつある. G では次数 1 の 2 頂点が辺で結ばれているが，G' では結ばれていない. 従って G と G' は同型ではない.

練習問題 3.20　略.

練習問題 3.21



練習問題 3.22　$x \in V(G)$ の次数が d のとき, $\overline{G}$ における x の次数は $n-1-d$

なので.

練習問題 3.23　G を位数 n の正則グラフとすると，その次数列は $(d, d, \ldots, d)$ である．前の練習問題により，$\overline{G}$ の次数列は $(n-1-d, n-1-d, \ldots, n-1-d)$ なので，$\overline{G}$ は $(n-1-d)$-正則グラフになる.

練習問題 3.24　たとえば

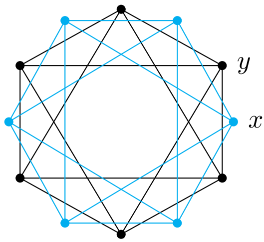
$$(v_1, v_6, v_2, v_{15}, v_5, v_{12}, v_7, v_3)$$

は v_1 と v_3 を結ぶ長さ 7 の歩道であり，

$$(v_9, v_{16}, v_{14}, v_{13}, v_{11}, v_7, v_3, v_5, v_{14}, v_{16}, v_9)$$

は v_9 を通る長さ 10 の閉歩道である.

練習問題 3.25　次のように色分けしてみると分かりやすいだろう：



どの青い頂点も黒い頂点とは隣接していない.

練習問題 3.26　(1) $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_n) = n$, (2) $\operatorname{diam}(\mathcal{C}_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ である.

練習問題 3.27　$f_i = x_{i-1}x_i$ であるから，$x_0, x_1, \ldots, x_l$ が相異なることから

$$f_i = f_j \implies \{x_{i-1}, x_i\} = \{x_{j-1}, x_j\} \implies x_i = x_j \implies i = j$$

となる（たとえば $x_{i-1} = x_j$, $x_i = x_{j-1}$ とすると $i-1 = j$, $i = j-1$ より $1 = -1$ となって矛盾する).

練習問題 3.28　絵を描いてみよ.

練習問題 3.29　$\mathcal{K}_{m,n}$ の頂点集合 V の 2 部分割を $V_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}$ と

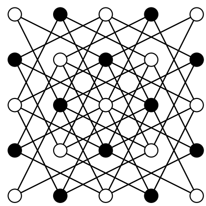
$V_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とすると，$\mathcal{K}_{m,n}$ においては x_i と y_j のあらゆるペアが辺で結ばれていて，V_1 の任意の 2 頂点や V_2 の任意の 2 頂点は隣接してない．従って補グラフ $\overline{\mathcal{K}_{m,n}}$ においては x_i と y_j の任意のペアは隣接しておらず，V_1 の任意の 2 頂点や V_2 の任意の 2 頂点は隣接している．よって $\overline{\mathcal{K}_{m,n}}$ は V_1 を頂点集合とする完全グラフ $\mathcal{K}_m$ と V_2 を頂点集合とする完全グラフ $\mathcal{K}_n$ をあわせたものである．

練習問題 3.30　次数 2 の頂点が 4 個，次数 3 の頂点が 8 個，次数 4 の頂点が 20 個，次数 6 の頂点が 16 個，次数 8 の頂点が 16 個あるので，握手補題により

$$2\,|E| = 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 20 + 6 \times 16 + 8 \times 16 = 336 = 2 \times 168$$

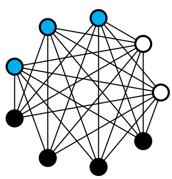
である．よって辺は 168 本ある．

練習問題 3.31　これは，例と同様に作った 2 部グラフ



が閉路を含むか？という問題と同じである．しかし 2 部グラフは長さが奇数の閉路を含まない．よって，そのような移動はできない．

練習問題 3.32　次のようになる．

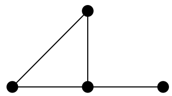


問題 3.1　もしすべての頂点で次数が異なるようなグラフ G があったと仮定すると，$n = |G|$ とすれば G の次数列は

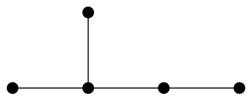
$$(n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0)$$

のはずである（位数 n のグラフでは，頂点の次数が取りうる最大値は $n-1$ なので）．すると G は孤立点を 1 つ含む．一方，次数 $n-1$ の頂点からは，自分以外の全ての頂点へと辺が結ばれているはずである．これは矛盾である．

問題 3.2　(1) グラフ的ではない．(2) グラフ的である．実際



は次数列 $(3,2,2,1)$ を持つ．(3) グラフ的である．実際



は次数列 $(3,2,1,1,1)$ を持つ．(4) グラフ的ではない．

問題 3.3　$(G \cup G')[V] = G$ を示す．$(G \cup G')[V] = (V, E'')$ として $E'' = E$ を示せば良いが，$E \subset E''$ は明らかなので $E'' \subset E$ だけ示せば十分である．

$e = xy \in E''$ とする．$e \in E \cup E'$, $x, y \in V$ である．$e \in E'$ とすると $x, y \in V'$ のはずなので $x, y \in V \cap V'$ である．つまり e は $G'[V \cap V']$ の辺でもあるが，仮定より $G'[V \cap V'] = G \cap G'$ なので $e \in E \cap E' \subset E$ である．よって $E'' \subset E$ が言えた．$(G \cup G')[V'] = G'$ も同様．

問題 3.4　$G = (V, E)$ は位数 n の連結な 2-正則グラフであるとする．握手補題により

$$2\,\|G\| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2n$$

なので $\|G\| = n$ である．任意に $v_1 \in V$ を選び，v_1 を始点とする最長の道を

$$P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{l-1}, e_{l-1}, v_l)$$

とする．$v_1, v_2, \ldots, v_l$ は相異なり，また $e_1, e_2, \ldots, e_{l-1}$ も相異なる．これ以上長い道がないということは，v_l に隣接する点は $v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$ 以外にはないということになるが，$i = 2, \ldots, l-1$ に対して $\mathcal{N}(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\} \not\ni v_l$ であるから，$v_2, \ldots, v_{l-1}$ は v_l と隣接しない．つまり v_1 と v_l は隣接する．

$e_l = v_l v_1$ とおけば

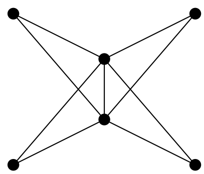
$$E(v_i) = \{e_{i-1}, e_i\} \quad (i = 2, \ldots, l), \quad E(v_1) = \{e_l, e_1\}$$

となるので，$v_2, \ldots, v_l$ 以外の頂点は v_1 と道で結ばれない．G は連結なので $V = \{v_1, \ldots, v_l\}$ となるはずで，これは $l = n$ および $G \cong \mathcal{C}_n$ を意味する．

問題 3.5　参加者を頂点とし，名刺交換した二人に対応する頂点を辺で結んでグラフ G を作る．もし全員が 5 人と名刺交換できたとすると，G は位数 45 の 5-正則グラフになるが，次数が奇数の頂点数は偶数なので，これはありえない．

問題 3.6　正四面体グラフ，立方体グラフ，正八面体グラフ，正十二面体グラフ，正二十面体グラフの順に直径は $1, 3, 2, 5, 3$ である．

練習問題 4.1

$\mathcal{K}_2 * \overline{\mathcal{K}_4} =$ 

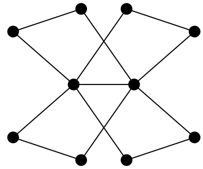
練習問題 4.2

$$\mathcal{N}_{G_1 \square G_2}((x, y)) = \{(x', y) \,|\, x' \in \mathcal{N}_{G_1}(x)\} \cup \{(x, y') \,|\, y' \in \mathcal{N}_{G_2}(y)\}$$

なので（ただし区別を付けるために，グラフ G_1 における x の近傍を $\mathcal{N}_{G_1}(x)$ と表すなどとした），両辺の元の個数を比較すれば良い（右辺の 2 つの集合は共通部分を持たないことに注意する）．

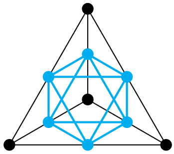
練習問題 4.3　サイクルは 2-正則グラフなので，$\mathcal{C}_m \square \mathcal{C}_n$ の任意の頂点 (x, y) の次数は $\deg(x) + \deg(y) = 2 + 2 = 4$ となる．

練習問題 4.4

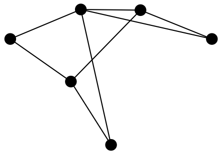
$\mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_{1,4} =$ 

こちらのほうが $\mathcal{K}_2 * \overline{\mathcal{K}_n}$ よりも「本」らしく見えるかもしれない．

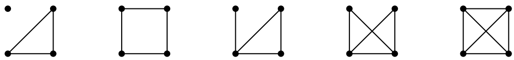
練習問題 4.5　$\mathcal{K}_4$ を黒で，$L(\mathcal{K}_4)$ を青で描くと次のようになることから分かる．



練習問題 4.6

$G/e =$ 

練習問題 4.7　次の 5 つである：



練習問題 4.8　ピーターセングラフにおいて外側の五角形と内側の星型を結ぶ 5 つの辺を縮約すると $\mathcal{K}_5$ になることから，ピーターセングラフは平面グラフではないことが分かる．

練習問題 4.9　辺の縮約を適当に繰り返すことで，$\mathcal{C}_3 \square \mathcal{C}_3$ は $\mathcal{K}_5$ をマイナーに持つことが分かる．

問題 4.1　任意の $x \in V(G_1), y \in V(G_2)$ は辺で結ばれている．$x, y \in V(G_1)$ ならば，任意に $z \in V(G_2)$ を選べば $x \sim z \sim y$ であり，同様に $x, y \in V(G_2)$ ならば，任意に $z \in V(G_1)$ を選べば $x \sim z \sim y$ である．

問題 4.2　$(x, y), (x', y')$ を $G_1 \square G_2$ の 2 頂点とする．G_1 は連結なので，x と x' を結ぶ G_1 の道

$$P = (x, x_1, \ldots, x_r, x')$$

がある（辺を省略して頂点の列で道を表す流儀で書いた，以下同様）．また G_2 は連結なので，y と y' を結ぶ G_1 の道

$$P' = (y, y_1, \ldots, y_s, y')$$

がある．このとき

$$\widetilde{P} = ((x,y),(x_1,y),\ldots,(x_r,y),(x',y),(x',y_1),\ldots,(x',y_s),(x',y'))$$

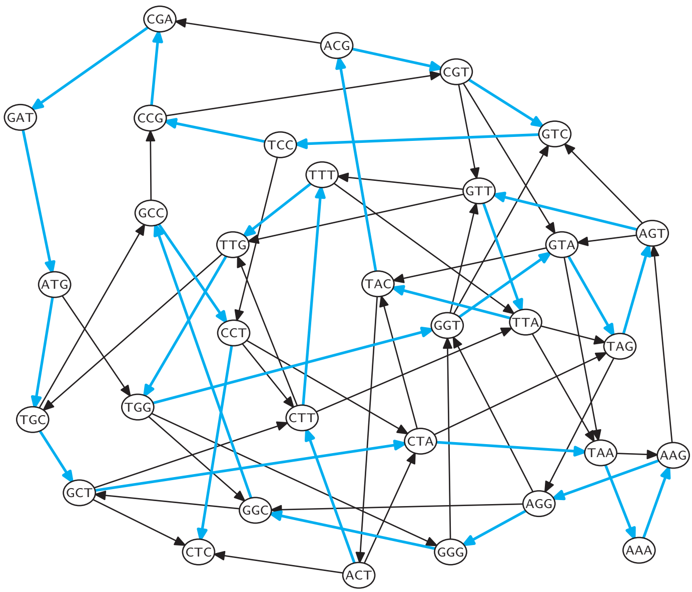
は (x,y) と (x',y') とを結ぶ $G_1 \square G_2$ の道である．よって $G_1 \square G_2$ も連結である．

問題 4.3　握手補題を使えば良い．

練習問題 5.1　できない．

問題 5.1　辺の縮約をすると頂点が 1 つ減る．また辺の縮約によってグラフの連結成分の個数は保たれる．従って，連結成分が k 個のグラフから始めて，可能な限り辺の縮約を続けると，k 個のブーケの合わせたものが得られるはずである．元のグラフが連結であるための必要十分条件は，この縮約の結果が単独のブーケであることと言える．

問題 5.2　たとえば



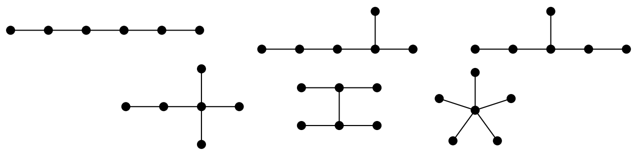
のようにたどれば良い．これは，短く刻まれた DNA の断片情報から

ACTTTGGTAGTTACGTCCGATGCTAAAGGGCCTC

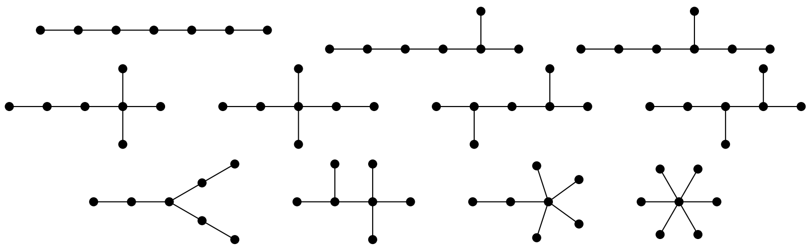
という長い DNA の列が復元された，というような状況を表している．

練習問題 6.1　例の絵で言うと，右手で触る壁は黒で描かれた連結成分に，左手で触る壁は青で描かれた連結成分に，それぞれ相当する．たとえば右手で壁をずっと触りながら歩くのは，黒で描かれた連結成分の木に対する深さ優先探索（章の後半を参照）をすることに相当するので，目的となる出口直近の頂点に必ずたどり着く．

練習問題 6.2　次の 6 個である．



練習問題 6.3　次の 11 個である．



練習問題 6.4　道である．

練習問題 6.5　頂点は変わらないので $|G'| = |G|$ であるが，辺は 1 本追加したので $\|G'\| = \|G\| + 1$ である．よって

$$|G'| = |G| = \|G\| + 1 = \|G'\|$$

なので，命題 6.6 により G' は木ではありえない．

練習問題 6.6　$G = (V, E)$ はすべての頂点が葉であるような木とする．握手

補題により

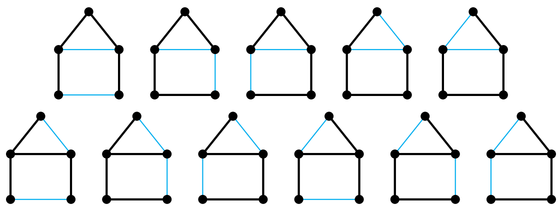
$$2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = |V|$$

である．また G が木であることから $|V| = |E| + 1$ である．よって

$$2\,|E| = |E| + 1 \implies |E| = 1$$

である，つまり G はサイズが 1，位数が 2 の木であるが，位数 2 の木は $\mathcal{P}_2$ だけである．

練習問題 6.7



の 11 個．

問題 6.1　葉をむしっていくと k 個の頂点が残るから．

問題 6.2　星グラフ $\mathcal{K}_{1,n}$ である（葉が n 個）．

問題 6.3　木において辺の縮約を行うと頂点が 1 つ，辺が 1 つ減り，連結性は保たれるので，その結果も木になる．

問題 6.4　G は連結であり，かつ $|V| > 1$ なので，G には孤立点はない，つまり頂点の次数はすべて 1 以上である．握手補題により

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E| = 2\,|V| - 2$$

である．もしすべての頂点の次数が 2 以上であると仮定すると

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2\,|V| > 2\,|E|$$

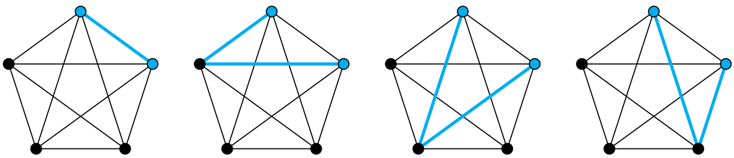
となり，握手補題に矛盾する．よって次数 1 の頂点が少なくとも 1 つある．

問題 6.5　$\mathcal{C}_n$ の n 個の辺のうちのどれか 1 本を取り除くと全域木になる．

よって $\mathcal{C}_n$ の全域木は全部で n 個ある．

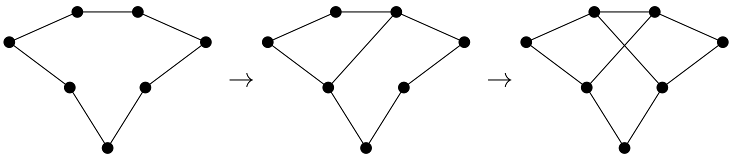
練習問題 7.1　v から踏み出す「最初の一歩」が，異なる方向に k 通りあるはずだから．

練習問題 7.2　たとえば次のようになるだろう．



練習問題 7.3　実際，G のどの 2 頂点を選んでも，それらを結ぶ独立な歩道が 2 つあることが分かる．

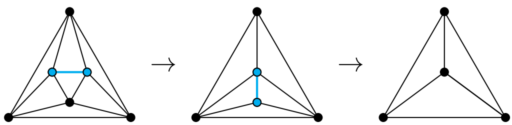
練習問題 7.4　たとえば $\mathcal{C}_7$ から始めて



のようにして得られる．

練習問題 7.5　実際，上述のような処方に従ってピーターセングラフを構成することができる．

練習問題 7.6　次のように（青で描かれた）辺を縮約していくと

$G =$  $= \mathcal{K}_4$

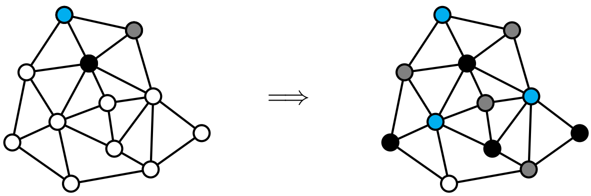
と $\mathcal{K}_4$ に出来るので，G は 3-連結である．

問題 7.1　多面体グラフにおいて，任意の頂点は，ある面の縁をなす多角形の頂点のうちの 1 つである．つまり，その頂点を含むサイクルがある．よって多面体グラフは 2-連結である．

問題 7.2　$\mathcal{K}_4 = \mathcal{K}_1 * \mathcal{C}_3$ は 3-連結であり，$n \geq 4$ のとき $\mathcal{K}_1 * \mathcal{C}_{n+1}$ の「外周」にある辺を 1 つ縮約すると $\mathcal{K}_1 * \mathcal{C}_n$ になることから分かる．

問題 7.3　$\mathcal{K}_4$ は 3-連結平面グラフであり，(A1), (A2), (A3) といった操作によって 3-連結性と平面性を保ったまま頂点をいくらでも増やすことができるから．

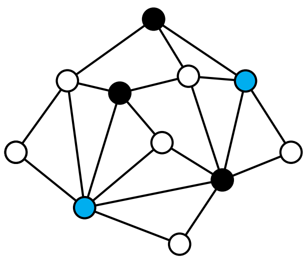
練習問題 8.1　3-彩色可能ではない．三角形の頂点は互いに異なる色で塗らねばならないので，図の左側のようにまず 3 色塗ったとし，その 3 色だけを使って残りの頂点を塗り分けようとすると，そこから順次，頂点の色が決まり，右側のようになる．



しかし，残された白い頂点は異なる 3 色の頂点と隣接しているので，どの色にも塗れない．

練習問題 8.2　サイズが 0，つまり辺がまったくないグラフである．

練習問題 8.3　$\mathcal{K}_3$ を含むので少なくとも 3 色は必要であるが，実際に次のように 3 色で彩色できる．

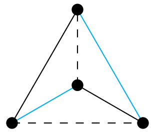


よって彩色数は 3 である．

練習問題 8.4　$\mathcal{K}_{1,n}$ は n 個の辺を持ち，それらは全て共通の頂点で隣接して

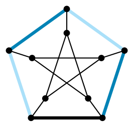
いるので，すべて異なる色で塗るしかない．つまり $\chi'(\mathcal{K}_{1,n}) = n$ である．

練習問題 8.5　$\mathcal{K}_4$ は 3-正則グラフなので，ヴィジングの定理より $\chi'(\mathcal{K}_4) = 3$ or 4 である．ところが

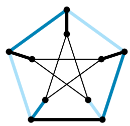


のように 3 色で辺彩色できるので，$\chi'(\mathcal{K}_4) = 3$ である．

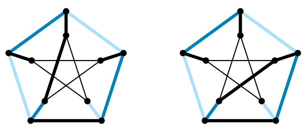
練習問題 8.6　3-辺彩色できると仮定する．まず，外側の五角形をなす 5 つの辺は



のように彩色されると仮定して良い．すると次に内側の五芒星と結ぶ辺たちの色が

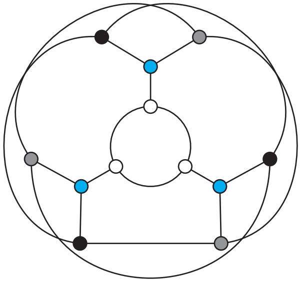


のように決まる．内側の五芒星をなす頂点のうち左下のものに着目すると，未着色の 2 辺のうちの 1 つは黒で塗らねばならないが，どちらを黒で塗っても辺彩色の条件に反する：



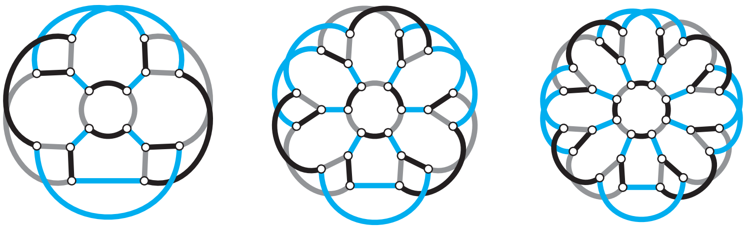
よってピーターセングラフは 3-辺彩色できない．

練習問題 8.7　連結であること，橋を持たないこと，3-正則であることの確認は簡単に見て取れるだろう．彩色指数が 4 であること（3 色では辺彩色できないこと）は，3-辺彩色を試みると必ず破綻が生じることを確かめることで分かる．これはそう大変ではないので，

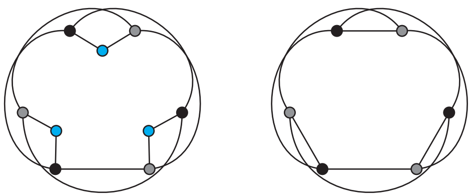


に適当に書き込みながら試行錯誤してみると良いだろう：まず内側の 6 つの辺の塗り分けを定める．次に右上の灰色の頂点から左右に伸びる辺の色をどう決めるかで 2 通りの場合分けをして辺彩色を続けると，いずれの場合においてもほどなく破綻する．

練習問題 8.8　たとえば次のような 3 色による辺彩色が可能である：



練習問題 8.9　$\mathcal{J}_3$ において，まず白い頂点を削除し（下図の左），それから青い頂点と灰色の頂点を結ぶ辺を縮約する（下図の右）．



こうして得られるグラフはちょうど $\mathcal{K}_{3,3}$ である．よって $\mathcal{J}_3$ は平面グラフではない．

問題 8.1　$\mathcal{K}_{m,n}$ の二部分割を $V_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $V_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とする

と，$\deg(x_i) = n$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\deg(y_i) = m$ $(i = 1, \ldots, n)$ なので，$\mathcal{K}_{m,n}$ の頂点の最大次数は n である．よってヴィジングの定理より $\chi'(\mathcal{K}_{m,n}) = n$ or $n+1$ であるが，$0, 1, \ldots, n-1$ という名前の n 色を用意しておいて，辺 $x_i y_j$ を色 $(i+j) \mod n$（$i+j$ を n で割った余り）で塗ることにすれば，これは n 色による辺彩色となる．よって $\chi'(\mathcal{K}_{m,n}) = n$ である．

問題 8.2　正四面体グラフ，立方体グラフ，正八面体グラフ，正十二面体グラフ，正二十面体グラフを順に $G_4, G_6, G_8, G_{12}, G_{20}$ とすると

$$\chi(G_4) = 4, \quad \chi(G_6) = 2, \quad \chi(G_8) = 3, \quad \chi(G_{12}) = 3, \quad \chi(G_{20}) = 4$$

$$\chi'(G_4) = 3, \quad \chi'(G_6) = 3, \quad \chi'(G_8) = 4, \quad \chi'(G_{12}) = 3, \quad \chi'(G_{20}) = 5$$

である．

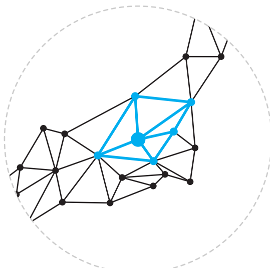
問題 8.3　まず $b_1, \ldots, b_n$ を頂点とするサイクルから始めて，まず

$$(b_1, a_1, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_n, b_n)$$

という道を付け加える．次に，$i = 2, \ldots, n-1$ に対して (b_i, a_i, c_i) という道を加え，次いで (a_i, d_i) という道を加える．最後に (a_1, d_1) と (a_n, c_n) という道を加えると位数 $4n$ の花型スナークとなる．よって花型スナークは 2-連結である．

問題 8.4　略．

問題 8.5　グラフの中央付近の，下図において青で描かれた部分グラフに着目する：

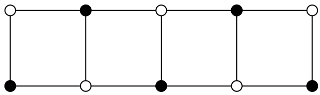


この部分グラフの彩色数は 4 である．よって例 3.38 のグラフの彩色数は 4 以

上であるが，これは平面グラフなので，四色定理により 4 色で彩色可能である (実際に 4-彩色を与えても良い)．よって彩色数は 4 である．

練習問題 9.1　直観的には明らかであろう．G が完全マッチング $M \subset E$ を持ったとすると $G' = (V, M)$ は全域部分グラフで，全ての頂点にはただ 1 本だけ辺が接続しているので，頂点の次数は全て 1 である．よって握手補題により $|G'| = 2\,\|G'\|$ であり，また $|G| = |G'|$ なので，$|G|$ は偶数．

練習問題 9.2　たとえば



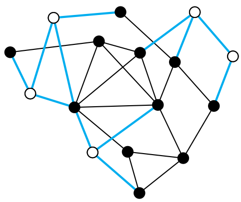
のように黒く塗られた頂点を選べば被覆となる．

練習問題 9.3　(1) G_1 の完全マッチングは 5 個ある，(2) G_2 の完全マッチングは 8 個ある．

問題 9.1　a_n は $n+1$ 番目のフィボナッチ数になる．

問題 9.2　左が 8 通り，右が 64 通り．

練習問題 10.1　下図の青で描かれた辺の全体が ∂F である：



練習問題 10.2　∂F は，v を端点に持つような辺の集合となる，つまり $\partial F = E(v)$ である．よって $|\partial F| = \deg(v)$ である．

練習問題 10.3　$V - (V - F) = F$ だからである．

練習問題 10.4　$n = 2m+1$ とする．F の選び方の総数は

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k}$$

であるが，二項定理より

$$
\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m}\binom{n}{k} + \sum_{k=m+1}^{n-1}\binom{n}{k} + 1 \\
&= 2 + 2\sum_{k=1}^{m}\binom{n}{k} \quad (\because \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k})
\end{aligned}
$$

なので．

練習問題 10.5　連続する m 個の頂点を F として選べば，$|\partial F| \leq 2$ なので．

問題 10.1　G の連結成分を $G_1, \ldots, G_r$ $(r \geq 2)$ とし，$G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ とすると，$|V_k| \leq |V|/2$ を満たす k が必ずある．このとき $\partial V_k = \varnothing$ なので，$\frac{|\partial V_k|}{|V_k|} = 0$．よって $\mathrm{h}(G) = 0$ である．

問題 10.2　$\mathcal{C}_n$ の連続する m 頂点を F として選んだ場合に $|\partial F| / |F|$ の最小値を達成することが分かる．このとき F の両端点からは 2 本ずつ，それ以外の $m-2$ 個の頂点からは 1 本ずつ，F の外に向けて辺が出ているので，$|\partial F| = 2 \times 2 + m - 2 = m + 2$ である．

問題 10.3　$|X_1| = m, |X_2| = n$ なる $\mathcal{K}_{m,n}$ の 2 部分割 (X_1, X_2) をとる．$F \subset V(\mathcal{K}_{m,n})$ に対して $p = |F \cap X_1|$, $q = |F \cap X_2|$ とすると

$$
\frac{|\partial F|}{|F|} = \frac{np + mq}{p + q}
$$

なので，$p + q$ が一定ならば $p = 0$ のときが最小．そのとき上の商の値は m である．よって $\mathrm{h}(\mathcal{K}_{m,n}) = m$ である．

問題 10.4　グラフの頂点集合のうちの「ひとつながりの半分」を F として選べば良い．

練習問題 11.1

$$
\gcd(4897, 3599) = \gcd(3599, 1298) = \gcd(1298, 1003) = \gcd(1003, 295)
$$

$$= \gcd(295, 118) = \gcd(118, 59) = \gcd(59, 0) = 59$$

より 59 である．

練習問題 11.2　a を b で割ったときの商を q とすれば $a = qb + r$ である．(1) d が a, b の公約数ならば，$a = a'd$, $b = b'd$ となる整数 a', b' がある．このとき $r = a - qb = (a' - qb')d$ なので，r も d で割り切れる．(2) d が b, r の公約数ならば，$b = b'd$, $r = r'd$ となる整数 b', r' がある．このとき $a = qb + r = (qb' + r')d$ なので，a も d で割り切れる．

練習問題 11.3　$\lfloor\sqrt{179}\rfloor = \lfloor 13.3\cdots\rfloor = 13$ なので，$2, 3, \ldots, 13$ で割り切れるかどうかを確かめれば良い．179 は $2, 3, \ldots, 13$ のいずれでも割り切れないので素数である．

練習問題 11.4

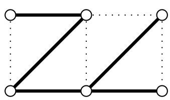
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$
$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

の 25 個である．

練習問題 11.5　例と同様に書いてみると次のようになる．

$$\begin{aligned}
(m=5)\quad & 4\;2\;\;6\;3\;1\;5 \overset{\bigstar}{\to} 2\;\;4\;6\;\;3\;1\;5 \to 2\;4\;\;6\;3\;\;1\;5 \overset{\bigstar}{\to} 2\;4\;3\;\;6\;1\;\;5 \\
& \overset{\bigstar}{\to} 2\;4\;3\;1\;\;6\;5 \overset{\bigstar}{\to} 2\;4\;3\;1\;5\;6 \\
(m=4)\quad & 2\;4\;\;3\;1\;5\;6 \to 2\;\;4\;3\;\;1\;5\;6 \overset{\bigstar}{\to} 2\;3\;\;4\;1\;\;5\;6 \\
& \overset{\bigstar}{\to} 2\;3\;1\;\;4\;5\;\;6 \to 2\;3\;1\;4\;5\;6 \\
(m=3)\quad & 2\;3\;\;1\;4\;5\;6 \to 2\;\;3\;1\;\;4\;5\;6 \overset{\bigstar}{\to} 2\;1\;\;3\;4\;\;5\;6 \to 2\;1\;3\;4\;5\;6 \\
(m=2)\quad & 2\;1\;\;3\;4\;5\;6 \overset{\bigstar}{\to} 1\;\;2\;3\;\;4\;5\;6 \to 1\;2\;3\;4\;5\;6 \\
(m=1)\quad & 1\;2\;\;3\;4\;5\;6 \to 1\;2\;3\;4\;5\;6
\end{aligned}$$

練習問題 11.6　結果だけを示すと



となる．

練習問題 11.7　結果は同じになるはずである．

練習問題 11.8　結果は練習問題 11.6 の場合と同じになるはずである．

問題 11.1　略．

問題 11.2　略．

練習問題 12.1　単なる計算なので略．

練習問題 12.2　2 つめだけやってみる．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} p' & q' \\ r' & s' \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)(A' \otimes B') &= \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'B' & b'B' \\ c'B' & d'B' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aB \cdot a'B' + bB \cdot c'B' & aB \cdot b'B' + bB \cdot d'B' \\ cB \cdot a'B' + dB \cdot c'B' & cB \cdot b'B' + dB \cdot d'B' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (aa' + bc')BB' & (ab' + bd')BB' \\ (ca' + dc')BB' & (cb' + dd')BB' \end{pmatrix} \\
&= (AA') \otimes (BB')
\end{aligned}$$

となる．他も同様である．

練習問題 12.3　実際，

$$I_m \otimes I_n = \begin{pmatrix} I_n & O & \dots & O \\ O & I_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & I_n \end{pmatrix} = I_{mn}$$

である（真ん中のブロック行列は対角ブロックに I_n が m 個並んでいる）．

練習問題 12.4　$G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ とすると，G は $V = V_1 \times V_2$ を頂点集合とし，

$$E = \{\{(x, y), (x', y')\} \mid xx' \in E_1,\ yy' \in E_2\}$$

を辺集合とするグラフ (V, E) である．

練習問題 12.5　接続行列の列は辺に対応していて，その辺の両端点に対応する成分が 1 となるから．

練習問題 12.6　単なる計算なので略．

練習問題 12.7　単なる計算なので略．

練習問題 12.8　単なる計算なので略．

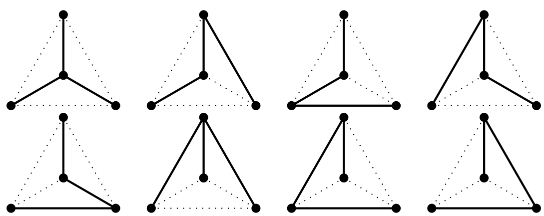
練習問題 12.9

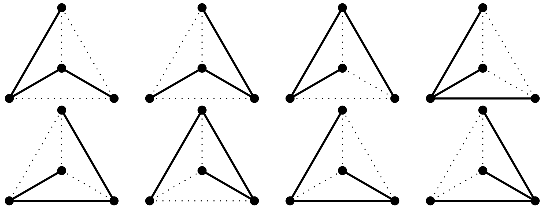
$$\mathcal{L} \text{ の } (2,2) \text{ 余因子} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\mathcal{L} \text{ の } (3,3) \text{ 余因子} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\mathcal{L} \text{ の } (4,4) \text{ 余因子} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

練習問題 12.10　(1) $\mathcal{K}_4$ の全域木を具体的に列挙すると次の通り．





よって $\mathcal{K}_4$ の全域木は 16 個ある．(2) $\mathcal{K}_4$ の隣接行列 $\mathcal{A}$ と次数行列 $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D} = 3I$$

なので，$\mathcal{K}_4$ のラプラシアン行列 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4 \text{ の全域木の総数} &= \mathcal{L} \text{ の } (1,1) \text{ 余因子} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる．

練習問題 12.11　単なる計算なので略.

問題 12.1　G_1, G_2 の頂点集合を $V_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}, V_2 = \{v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}\}$ と名付けておく．$G_1 * G_2$ の隣接行列を $\mathcal{A} = (a_{ij})$ とすると，

(1) $1 \leq i, j \leq m$ に対して $a_{ij} = 1 \iff v_i \sim v_j$

(2) $1 \leq i, j \leq n$ に対して $a_{m+i,m+j} = 1 \iff v_{m+i} \sim v_{m+j}$

(3) $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対して ($v_i \sim v_{m+j}$ なので) $a_{i,m+j} = a_{m+j,i} = 1$

であることから．

問題 12.2　(1) a_{ij} は $v_i \sim v_j$ のとき 1，そうでなければ 0 なので，総和 $a_{i1} + \cdots + a_{in}$ は v_i と隣接している頂点の個数を数えていることになる，つまり $\deg(v_i)$ に等しい．(2) $\mathcal{A}^2$ の (i,i)-成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

である（$\mathcal{A}$ は対称行列なので $a_{ik} = a_{ki}$ である）．a_{ik} の取る値は 0 か 1 なので，いずれにせよ $a_{ik}^2 = a_{ik}$ が成り立つ．よって $\mathcal{A}^2$ の (i,i)-成分は $a_{i1} + \cdots + a_{in} = \deg(v_i)$ に等しい．

問題 12.3　$\mathcal{A}$ の第 i 行の成分の総和が $\deg(v_i)$ に等しいので，$\mathcal{A}$ の成分の総和は

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$$

である（握手補題）．

問題 12.4　コーシー-ビネの公式を使うと

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + \cdots + x_n^2 & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \\ x_1y_1 + \cdots + x_ny_n & y_1^2 + \cdots + y_n^2 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

が得られる．両辺を計算すると

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) - (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2$$

であり，この右辺は（平方数の和なので）≥ 0 である．

問題 12.5　$\mathcal{K}_n$ の隣接行列は，対角成分がすべて 0，それ以外の成分はすべて 1 であるような n 次正方行列である．また $\mathcal{K}_n$ の頂点の次数はすべて $n-1$ である．よって

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

問題 12.6

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} nI_m & -\mathbf{1}_{m,n} \\ -\mathbf{1}_{n,m} & mI_n \end{pmatrix}$$

である．

練習問題 13.1　単なる計算なので略.

練習問題 13.2　単なる計算なので略.

練習問題 13.3　単なる計算なので略.

練習問題 13.4　G は d-正則グラフだから $\lambda_1 = d$ であり，また $\lambda(G)$ の定義より $|\lambda_2| \leq \lambda(G)$ だから $-\lambda_2 \geq -\lambda(G)$ である．よって $\lambda_1 - \lambda_2 \geq d - \lambda(G)$ が得られる．

練習問題 13.5

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} tI_p & -B \\ -B^\top & tI_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & \frac{1}{t}B \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} tI_p & O_{p,q} \\ -B^\top & tI_q - \frac{1}{t}B^\top B \end{pmatrix} \\ &= t^p \det\Bigl(tI_q - \frac{1}{t}B^\top B\Bigr) \\ &= t^{p-q}\det(t^2 I_q - B^\top B) \end{aligned}$$

である．

練習問題 13.6　実際，計算すると

$$\boldsymbol{p}_1^\top \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{e}_s^\top \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

である．そして，このことから

$$\boldsymbol{e}_i^\top P_1 \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i^\top (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_1^\top) \boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{p}_1^\top \boldsymbol{e}_i)^\top (\boldsymbol{p}_1^\top \boldsymbol{e}_j) = \frac{1}{n}$$

である．

練習問題 13.7　絶対値の定義から

$$-|a| \le a \le |a|, \quad -|b| \le b \le |b|$$

なので，これらを辺々加えれば

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

である．よって

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

を得る．

問題 13.1

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{P}_1) = \{-1, 1\}, \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{P}_2) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\},$$
$$\mathrm{Spec}(\mathcal{P}_3) = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\},$$
$$\mathrm{Spec}(\mathcal{P}_4) = \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$$

である（いずれの場合も，すべての固有値が重複度 1）．

問題 13.2　複素数 a, b に対しても三角不等式

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

が成り立ち，等号が成立するのは $ab = 0$ または a と b の偏角が等しいときである（$ab \neq 0$ のとき，$R > 0, r > 0$ として $a = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ $(0 \le \alpha, \beta < 2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 = (R + r)^2 &- (R\cos\alpha + r\cos\beta)^2 \\ &- (R\sin\alpha + r\sin\beta)^2\end{aligned}$$

$$= 2Rr(1 - \cos(\alpha - \beta)) \geq 0$$

であり，等号成立は $\alpha = \beta$ のときである)．この三角不等式を繰り返し使うことで

$$\begin{aligned} k|z| = |kz| = |z_1 + \cdots + z_k| \leq |z_1| + |z_2 + \cdots + z_k| \\ \leq \cdots \leq |z_1| + \cdots + |z_k| = k|z| \end{aligned}$$

を得る．最左辺と最右辺が等しいので，途中の不等式はすべて等号が成立する．したがって $z_1, \ldots, z_k$ はすべて偏角も等しい．よって $z_1 = \cdots = z_k = z$ である．

問題 13.3　これは計算機を援用するのが良いだろう．

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{C}_m \square \mathcal{C}_n) = \left\{ 2\cos\frac{2s\pi}{m} + 2\cos\frac{2t\pi}{n} \;\middle|\; 0 \leq s < m,\ 0 \leq t < n \right\}$$

なので，$2 + 2\cos\frac{2\pi}{n} \leq 2\sqrt{3}$ が成り立つことがラマヌジャングラフとなるための必要条件であるが，これは $n \geq 9$ では成り立たない．つまり $3 \leq m \leq n \leq 8$ の範囲で調べれば良い．ラマヌジャングラフとなるような (m, n) を列挙すると

$$\begin{aligned} (m, n) = (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,4), \\ (4,6), (4,8), (5,5), (5,7), (6,6), (6,8), (8,8) \end{aligned}$$

である．

練習問題 14.1

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

練習問題 14.2　(1) $3 + 6 = 9 = 2$，$3 \cdot 6 = 18 = 4$，$-3 = 4$，$-6 = 1$．(2) $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8 = 1$ なので，これ以降は $2, 4, 1$ の繰り返し．

練習問題 14.3　(1) $6 + 8 = 14 = 2$，$6 \cdot 8 = 48 = 0$．(2) $5^1 = 5$, $5^2 = 1$ なので，これ以降は $5, 1$ の繰り返し．

練習問題 14.4　略．

練習問題 14.5　$v, w \in \mathsf{U}_n$ ならば $v^n = w^n = 1$ である．よって $(vw)^n = v^n w^n = 1$ なので $vw \in \mathsf{U}_n$ となる．

練習問題 14.6

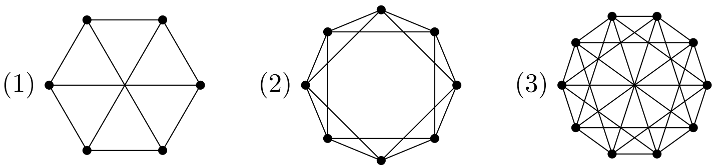
$$\begin{aligned}
&(1)\ e\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\\
&(2)\ e\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\\
&(3)\ e\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}
\end{aligned}$$

練習問題 14.7　$k-l$ が n の倍数のとき $e(\frac{2k\pi}{n}) = e(\frac{2l\pi}{n})$ だから．

練習問題 14.8　(1) P_4 との積が I_4 となることを確かめれば良い．(2) $P_4^{-1}C_4P_4 = \mathrm{diag}(1, i, -1, -i)$ となる．

練習問題 14.9　一番左が $S = \{1, -1\}$，その右が $S = \{2, -2, 5, -5\}$，右から 2 つ目が $S = \{5, -5, 6\}$，一番右が $S = \{1, -1, 4, -4\}$．

練習問題 14.10



問題 14.1　(1) $x = 2$．(2) $x = 3, 4$．(3) $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のどれを x^2 に代入しても 3 にならない．

問題 14.2　まず $m \in \mathbb{N}$ のときに m に関する数学的帰納法で示す．$m = 1$ のときは明らかである．$m = k$ のときに

$$e(\theta)^k = e(k\theta)$$

が成り立つと仮定して $m = k+1$ のときを考えると

$$e(\theta)^{k+1} = e(\theta)^k e(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= e(k\theta)e(\theta) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= e((k+1)\theta) \quad (\because (14.1))
\end{aligned}
$$

となり，$m = k+1$ のときも成り立つ．よって任意の自然数 m に対してド・モアブルの定理が示された．また (14.1) により

$$
e(\alpha)e(-\alpha) = e(0) = 1 \implies e(-\alpha) = e(\alpha)^{-1}
$$

であることに注意すれば，自然数 k に対して

$$
e(-k\theta) = e(k\theta)^{-1} = e(\theta)^{-k}
$$

が成り立つので，m が負の整数のときもド・モアブルの定理は成り立つ．

問題 14.3　$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{1, -1\})$ は位数 n の連結な 2-正則グラフなので $\mathcal{C}_n$ である．

問題 14.4　任意の $x, y \in \mathbb{Z}_n$ に対して $x \neq y \iff x - y \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ なので，$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})$ は任意の異なる 2 頂点間に辺が結ばれているような位数 n のグラフ，すなわち $\mathcal{K}_n$ である．

問題 14.5　実際，$V_1 = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, $V_2 = \{0, 2, \ldots, 2n-2\}$ とおけば (V_1, V_2) は 2 部分割で，$x \in V_1$, $y \in V_2$ ならば $x - y \in S$ であり，$x, y \in V_1$ または $x, y \in V_2$ のとき $x - y \neq S$ である．よって $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ は V_1 の任意の頂点と V_2 の任意の頂点の間に辺が結ばれ，それ以外に辺を持たないグラフ，つまり $\mathcal{K}_{n,n}$ である．

問題 14.6　$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, S)$ の固有値は

$$
\alpha_r = \sum_{s \in S} \zeta_n^{rs} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)
$$

で与えられるのであった．よって，$\mathcal{C}_n = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{1, -1\})$ の固有値は

$$
\alpha_r = \zeta_n^r + \zeta_n^{-r} = 2\cos\frac{2\pi r}{n} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)
$$

であり，$\mathcal{K}_n = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})$ の固有値は

$$\alpha_r = \sum_{s=1}^{n-1} \zeta_n^{rs} = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{rs} - 1 = \begin{cases} n-1 & r=0 \\ -1 & r=1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

であり，$\mathcal{K}_{n,n} = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, S)$, $S = \{1,3,\ldots,2n-1\}$ の固有値は $r = 0,1,\ldots,2n-1$ に対して

$$\alpha_r = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_{2n}^{r(2j+1)} = \zeta_{2n}^{r} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_n^{rj} = \begin{cases} n & r=0 \\ -n & r=n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である．

問題 14.7　(1) $\zeta = \zeta_{4n+2} = e(\frac{\pi}{2n+1})$ として

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \zeta^{(2n+1)r} + \zeta^r + \zeta^{-r} \\ &= (-1)^r + 2\cos\frac{r\pi}{2n+1} \qquad (r = 0,1,\ldots,4n+1) \end{aligned}$$

が G の固有値である．

(2) $\alpha_0 = 3$ であり，$\alpha_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + 2\cos\pi = -3$ なので，G は二部グラフである．

(3) $\lambda_2(G) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}$ であることが分かるので，

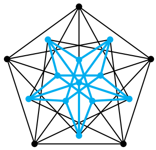
$$\begin{aligned} G\text{ がラマヌジャングラフ} &\iff \lambda_2(G) \le 2\sqrt{2} \\ &\iff \cos\frac{2\pi}{2n+1} \le \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ &\iff n \le 7 \end{aligned}$$

となる（最後の部分は

$$\cos\frac{2\pi}{15} \risingdotseq 0.9135, \quad \cos\frac{2\pi}{17} \risingdotseq 0.9325, \quad \sqrt{2} - \frac{1}{2} \risingdotseq 0.9142$$

という数値計算による）．

練習問題 A.1　下図で青い線で示した部分がグレッチグラフになっている．



練習問題 A.2　実行結果として `true` が返るはずである.

練習問題 A.3　自由に色々とやってみてください.

練習問題 A.4　`number_of_spanning_trees(petersen_graph());` を実行すると，2000 個と分かる.

練習問題 A.5　自由に色々とやってみてください.