

# レクチャー 物理学の学び方 ～ 高校物理から大学の物理学へ ～ 章末演習問題解答

原田恒司 小島健太郎  
(2023 年 7 月 31 日)

## 第 1 章

### 演習 1.1

- (1) 誤り. 必ずしもそうとは限らない. 直線上に  $x$  軸をとって説明しよう. 物体が  $x$  軸の負の向きに進みながら, その速さがだんだん小さくなる場合, 速度ベクトル  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_x$  の成分  $v(t)$  は負で, その絶対値がだんだん小さくなる. つまり  $v(t)$  は増加している. それゆえ, 加速度ベクトル  $\vec{a}(t) = a(t)\vec{e}_x$  の成分  $a(t)$  は正である.

- (2) 誤り. 加速度ベクトルが一定である場合 (加速度の大きさが一定でゼロでない場合の特別な場合), それを  $\vec{a}$  と置くと, 速度ベクトル  $\vec{v}(t)$  は

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}$$

を満足する. これを積分すると,

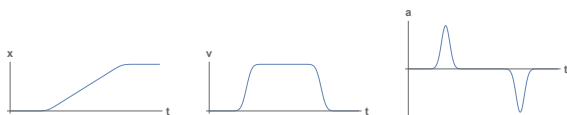
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

を得る. ただし,  $\vec{v}_0$  は積分定数で,  $t=0$  における速度を表す. もし  $\vec{v}_0$  が  $\vec{a}$  と逆向きであるならば,  $\vec{v}(\bar{t}) = 0$  となる時刻  $\bar{t} (> 0)$  が存在する.

- (3) 正しい. 加速度はベクトルなので, それぞれの成分ごとに考えることができる. 加速度ベクトルの方向に  $x$  軸をとり, それに垂直な方向に  $y$  軸をとると, 加速度ベクトルは  $x$  成分のみを持ち,  $y$  成分は常にゼロである. それゆえ, 速度ベクトルの  $y$  成分は時間的に変化しない.

- (4) 誤り. 物体が直線上を運動する場合, その直線上に  $x$  軸をとると, もし加速度ベクトルの成分が正であり, 運動を始めたときの速度ベクトルの成分も正であるならば, 物体の速度は進行方向を変えずに常に  $x$  軸の正方向に運動する.

### 演習 1.2 以下のグラフのようになる.



**演習 1.3** 一定の加速度  $\vec{a}$  で運動する物体の速度ベクトル  $\vec{v}(t)$  は,

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}$$

を満足する. これを積分して,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

を得る. ただし,  $\vec{v}_0$  は積分定数で, 時刻  $t=0$  での速度である. 位置ベクトル  $\vec{r}(t)$  は

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

を満足するので, これを積分して

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

を得る.

時刻  $t_1$  で速度が  $\vec{v}_1$ , 時刻  $t_2$  で速度が  $\vec{v}_2$  であったとすると,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}t_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{a}t_2$$

から, 変位ベクトル  $\vec{s}$  は

$$\vec{s} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{v}_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_2^2 - t_1^2)$$

を満たす. それゆえ,

$$\begin{aligned} |\vec{v}_2|^2 - |\vec{v}_1|^2 &= 2\vec{v}_0 \cdot \vec{a}(t_2 - t_1) + |\vec{a}|^2(t_2^2 - t_1^2) \\ &= 2\vec{a} \cdot \vec{s} \end{aligned}$$

を得る.

**演習 1.4** 速度ベクトルを  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_x$ , 加速度ベクトルを  $\vec{a}(t) = a(t)\vec{e}_x$  とする. それらの成分  $v(t)$  と  $a(t)$  は, 位置ベクトルの成分  $x(t)$  を,  $t$  についてそれぞれ 1 回, 2 回微分して求まる.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \Omega A \cos(\Omega t) - \Omega B \sin(\Omega t)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = -\Omega^2 A \sin(\Omega t) - \Omega^2 B \cos(\Omega t)$$

特に,

$$a(t) = -\Omega^2(A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)) = -\Omega^2 x(t)$$

であることがわかる。また、

$$x^2(t) = A^2 \sin^2(\Omega t) + 2AB \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + B^2 \cos^2(\Omega t)$$

$$v^2(t) = \Omega^2(A^2 \cos^2(\Omega t) - 2AB \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) + B^2 \sin^2(\Omega t))$$

であるので、

$$v^2(t) + \Omega^2 x^2(t) = \Omega^2(A^2 + B^2)$$

は  $t$  に依存しない。つまり、 $C = \Omega^2$  とすれば  $t$  に依存しないことがわかる。

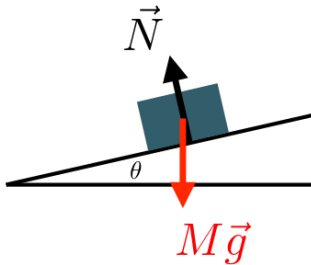
## 第2章

**演習 2.1** 坂道の角度を  $\theta$ 、トラックの質量を  $m$  とし、重力加速度を  $g$  とすると、トラックにはたらく重力の坂道方向（下向き）の成分は  $mg \sin \theta$  である。トラックを静止させるためには、この大きさで、坂道に沿って上向きの力を加えなくてはならない。

$$mg \sin \theta = 4 \times 10^3 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.017 \approx 6.7 \times 10^2 \text{ N}$$

を得る。これはおよそ 70 kg のバーベルを保持しているのと同じ力である。多分無理なので、やめたほうがよい。

**演習 2.2** 車が一定の速さでカーブを切るためには、カーブを円の一部分とみなしたとき、その円の中心に向かう向心力が必要である。カーブの道が平坦な場合には、その向心力はタイヤと路面の間の摩擦によって与えられる。（凍ってツルツルの路面上ではカーブを切れない。）片勾配をつけるのは、傾きによって、車にはたらく垂直抗力の一部を向心力とするためである。



図のように、質量  $M$  の車には重力  $M\vec{g}$  と路面からの垂直抗力  $\vec{N}$  がはたらく。この他に摩擦力ははたらくが、いまは「理想的」な状況として、向心力が重力と垂直抗力の合力によってすべて賄われているとしよう。このとき、 $\vec{N}$  の鉛直方向の成分は  $Mg$  に等しく、 $\vec{N}$  の水平方向の成分が向心力に等しい。半径を  $r$ 、速さを  $v$  とすると、

$$N \cos \theta = Mg$$

$$N \sin \theta = M \frac{v^2}{r}$$

である。これより、

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr}$$

を得る。与えられた数値を代入して、 $63 \text{ km/h} = 17.5 \text{ m/s}$  を用いると

$$\tan \theta = \frac{(17.5 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \times 100 \text{ m}} \approx 0.31$$

を得る。これは  $\theta = 0.31 \text{ rad}$ 、およそ  $17^\circ$  に対応している。

**演習 2.3** 水平方向の移動距離を  $L = 18 \text{ m}$  とする。ボールの運動方程式は式 (2.6) で与えられ、その一般解は式 (2.10) で与えられる。ピッチャーの位置からキャッチャーミットまでの水平方向に  $x$  軸をとり、鉛直上向きに  $y$  軸をとる。ボールの位置ベクトルを  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  と書く。重力加速度は  $\vec{g} = (0, -g)$  であることに注意せよ。ピッチャーの手からボールが離れたところを原点  $(0, 0)$  とする ( $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ) と、キャッチャーミットの位置ベクトルは  $(L, 0)$  で与えられる。仰角を  $\theta$  とおくと、初速度ベクトルは  $\vec{v}_0 = (V \cos \theta, V \sin \theta)$  と表される。ただし、 $V$  はボールの初速度の大きさを表す。

$$V = \frac{144 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{144 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 40 \text{ m/s}$$

時刻  $t = 0$  にボールがピッチャーの手を離れたとして、一般解 (2.10) を成分で表すと、

$$x(t) = V \cos \theta t$$

$$y(t) = V \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

となる。キャッチャーミットにボールが到達したときの時刻を  $t = \bar{t}$  とすると、

$$L = V \cos \theta \bar{t}$$

$$0 = V \sin \theta \bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

が成り立つ。第 2 の式の解の 1 つ  $\bar{t} = 0$  はボールを投げる瞬間に対応し、これは求めるものではない。もう 1 つの解を第 1 の式に代入して  $\bar{t}$  を消去し、整理すると

$$\sin(2\theta) = \frac{gL}{V^2}$$

を得る。数値を代入すると、

$$\sin(2\theta) = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \times 18 \text{ m}}{(40 \text{ m/s})^2} = 0.11$$

を得る。これより  $\theta = 5.5 \times 10^{-2} \text{ rad}$  を得る。これはおよそ  $3.2^\circ$  である。（実はもう 1 つ解がある。それは  $\theta = 1.5 \text{ rad}$  で、およそ  $87^\circ$  である。これはほとんど真上に向

かってボールを投げるのに対応している。(こういうボールを投げるピッチャーはいないだろう。)

ピッチャーの投げるボールに対して空気の影響を無視するのはあまり良い近似ではない。実際は空気抵抗は無視できないし、空気がボールの回転に影響することで変化球を投げることができる。しかし、空気の影響を無視した計算は、より詳細な記述の出発点になる。

また、この問題のように数値を求める問題では、数値の代入は最後に行い、途中の計算は式のまま行うほうが見通しが良く、間違いもしにくいことも覚えておこう。

### 第3章

**演習 3.1** 地球の質量を  $M_{\oplus}$ 、月の質量を  $M_{\text{D}}$ 、地球と月との間の距離を  $R$  とする。地球の質量に比べて、月の質量は十分小さいとして、月は地球を中心とする円軌道を描くと近似する。(実際、月の質量は地球のおよそ 81 分の 1 である。) 万有引力が向心力であることから、

$$M_{\text{D}}R\omega^2 = G\frac{M_{\oplus}M_{\text{D}}}{R^2}$$

が成り立つ。それゆえ

$$R^3 = \frac{GM_{\oplus}}{\omega^2}$$

を得る。問題では地球の質量が与えられておらず、そのかわりに地球の半径  $R_{\oplus}$  が与えられている。そこで、式 (3.38) を用いれば、

$$R^3 = \frac{gR_{\oplus}^2}{\omega^2}$$

と書くことができる。ただし、 $R_{\oplus}$  は地球の半径である。これに数値を代入して、

$$R = \left[ \frac{9.8 \times (6.37 \times 10^6)^2}{\left(\frac{2\pi}{27.3 \times 24 \times 3600}\right)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{m} = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$$

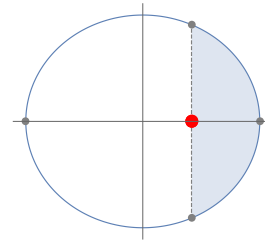
を得る。月の平均公転半径は  $3.844 \times 10^8 \text{ m}$  なので、これはかなり良い結果である。

**演習 3.2** ケプラーの第 2 法則から、下の図の色のついた部分の面積が秋分から春分までの日数に対応する。楕円全体の面積は  $\pi ab$  である。色のついた部分は  $c/a$  が十分小さいとすると、楕円の面積の半分  $\pi ab/2$  から、幅  $c$  長さ  $2b$  の長方形の面積  $2bc$  を差し引いたもので近似できる。それゆえ

$$\frac{\frac{\pi ab}{2} - 2bc}{\pi ab} = \frac{179}{365}$$

を得る。これを解いて

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{179}{365} \right] = 1.5 \times 10^{-2}$$



を得る。地球の離心率は理科年表によると 0.0167 であるので、上の近似計算はかなり良い結果を与えている。

ちなみに、色のついた部分の面積は、近似を用いなくても厳密に計算することができる。

$$S(\epsilon) = 2 \int_c^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab \left[ \cos^{-1}(\epsilon) - \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \right]$$

### 第4章

**演習 4.1** 質量  $m$  の物体が、高さ  $h$  から高さ 0 まで落下するとき開放されるポテンシャルエネルギーは  $mgh$  である。華厳の滝の場合、毎秒  $m = 1 \times 10^3 \text{ kg}$  の水が  $h = 97 \text{ m}$  落下するのであるから、

$$mgh = 1 \times 10^3 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 97 \text{ m} = 1 \times 10^6 \text{ J}$$

のポテンシャルエネルギーを毎秒放出する。仕事率で言えば  $1 \times 10^6 \text{ W} = 1 \times 10^3 \text{ kW}$  である。ちなみに乗用車のエンジンの最高出力はだいたい 50 kW から 500 kW の間にある。

水力発電は、水の持つポテンシャルエネルギーの開放によって得られるエネルギーを利用して発電している。

**演習 4.2** 自動車の質量を  $m$  とすると、速さ  $v$  で走っている自動車の持つ運動エネルギーは  $\frac{1}{2}mv^2$  である。急ブレーキをかけて自動車のタイヤが固定されると、自動車には速度によらず、一定の摩擦力  $f$  が、自動車の進行方向とは逆向きにはたらくと考えられる。ブレーキが利きながら自動車が距離  $d$  だけ進んで停止したとすると、この間に摩擦力のする仕事は、 $-fd$  である。停止したとき、自動車の持つ運動エネルギーはゼロになる。もともと持っていた運動エネルギーに対して、摩擦力がした負の仕事を加えてゼロになったと考えられるので、

$$\frac{1}{2}mv^2 - fd = 0$$

が成り立つ。それゆえ、

$$d = \frac{m}{2f}v^2$$

となり、制動距離  $d$  は速さの 2 乗に比例する<sup>1</sup>。摩擦力として動摩擦力の式 (4.84)

$$f = \mu' mg$$

を用いると、

$$d = \frac{v^2}{2\mu'g}$$

となり、制動距離は自動車の質量に依らない。

自動車の速さを km/h の単位で与える時は、単位の換算が必要である。自動車の速さを  $V$  km/h とすると、これは  $(V/3.6)$  m/s である。これを  $v$  に代入すると

$$d = \frac{V^2}{2 \times (3.6)^2 \times 9.8 \times \mu'} \text{ m} = \frac{V^2}{254 \times \mu'} \text{ m}$$

を得る。この式はよく引用される。乾いたアスファルトとタイヤとの間の摩擦係数は  $\mu' = 0.7$  なので、時速 60 km の自動車の制動距離は

$$d = \frac{60^2}{254 \times 0.7} \text{ m} \approx 20 \text{ m}$$

となる。

危険を察知してから停止するまでに自動車の走行する距離 (停止距離) は、危険を察知してから、それに反応してブレーキを踏み、ブレーキが利き始めるまでの空走距離も加えなくてはならない (停止距離 = 空走距離 + 制動距離)。空走時間は (反応時間) × (速さ) であるから、速さに比例する。

**演習 4.3** 保存力  $\vec{F}$  は対応するポテンシャルエネルギー  $U$  の等ポテンシャル面に垂直である。 $\vec{F}$  が動径成分しか持たないのであれば、等ポテンシャル面は球面をなす。等ポテンシャル面が球面であるというのは、ポテンシャルエネルギー  $U$  が角度に依存せず、原点からの距離  $r$  のみの関数であることを意味する： $U = U(r)$ 。 $\vec{F} = -\nabla U$  であるから、ポテンシャルエネルギー  $U$  が  $r$  のみの関数であるなら、 $\vec{F}$  も  $r$  のみの関数である： $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$ 。すなわち、 $\vec{F}$  は中心力である。

## 第 5 章

### 演習 5.1

- (1) 圧力の定義より、正しくは「単位面積にはたらく力の大きさ」となる。
- (2) 掃除機が物を吸い込むのは、掃除機の中の気体の引力によるものではない。掃除機がものを吸うのは、掃除機の中の気体が排気されることで掃除機の内部の圧力が大気圧よりも低くなり、外側の大気が掃除機の吸い口に向かって物を押し込むためである。
- (3) 水と水蒸気はともに  $\text{H}_2\text{O}$  分子からなるため、1 mol であればどちらも質量は等しく、およそ 18 g である。
- (4) 質量は 10 g よりも大きい。1 mol のヘリウムガスは He の分子量が 4 のため 4 g である。簡単のため室温を 273 K で近似すると、1 気圧、273 K では 1 mol の気体は式 (5.12) のように 22.4 L の体積を持つことから、100 L のヘリウムガスの質量は  $4 \times 100/22.4 \text{ g} \approx 18 \text{ g}$  程度と見積もられる。
- (5) 湿った大気の方が密度が低い。密度は質量を体積を割ったものであるため、同じ体積に含まれる気体の質量を比較すれば良い。圧力や温度が等しければ、同じ体積に含まれる乾燥大気と湿った大気のもル数は等しいため、気体の分子量が大きいほど、密度も高くなる。混合気体としての空気の分子量はおよそ 29 であった。湿った空気とは、空気に水蒸気が混じるということを意味する。水蒸気の分子量は 18 で、29 よりも小さい。よって水蒸気が混じった空気の方が分子量は小さくなり、密度も小さくなる。
- (6) 常に比例するとは言えない。例えば、 $0^\circ\text{C}$  の氷に熱を加えると、加えられた熱は氷から水への状態変化に使われ、氷が全て溶けるまでは  $0^\circ\text{C}$  のままである。また、状態変化に関わる潜熱がない場合でも、例えば体積を一定に保ったときと圧力を一定に保ったときでは、同じ熱量を与えても温度の変化の仕方は異なる。
- (7) 理想気体の質量は物質質量とモル質量の積である。質量が小さい必要は全くない。
- (8) 理想気体は常に熱平衡状態を保つわけではない。例えば、温度が異なる 2 つの理想気体を混ぜることを

<sup>1</sup> あるいは運動方程式  $ma = -f$  を用いて解くこともできる。各自試みよう。

考えることができる。このとき、十分時間が経つまでは、混合気体は熱平衡状態にはない。

**演習 5.2** 90°C のコーヒー 100 g が 5°C になるときに失う熱を  $Q_1$  とすると

$$Q_1 = 4.2 \times 85 \times 100 \text{ J} \approx 3.6 \times 10^4 \text{ J}$$

である。また、0°C の氷  $x$  g が 5°C になるために必要な熱を  $Q_2$  とすると、5.2.2 節で述べた 1 g の氷の融解熱が 334 J であることをふまえて

$$Q_2 = (334 + 4.2 \times 5)x \text{ J} \approx 3.6x \times 10^2 \text{ J}$$

である。コーヒーが失う熱量と氷が受け取る熱量は等しく、 $Q_1 = Q_2$  が成り立つので、

$$x = \frac{3.6 \times 10^4}{3.6 \times 10^2} \approx 1.0 \times 10^2$$

を得る。よって、氷 100 g を加えれば良い。コーヒーと氷の質量が同じなので、アイスコーヒーは 2 倍に薄まっている。

**演習 5.3** ストロー内部の気体の圧力が  $p_0$  の状態では、ストローの内側でも外側でも水面は大気による等しい大きさの圧力を受けており、ストローの外と中で水面の高さは等しくなっている。ストローの上部を指で押さえたまま持ち上げると、ストロー内部の気体の体積が増加し、気体の圧力が  $p_0$  よりも減少する。その結果、ストローの外側の水面に比べ、内側の水面が大気から受ける圧力は小さくなり、ストロー内部の水面は下から上に押し上げられる。水面の高さが  $h$  上昇したとき、この水柱にはたらく重力によって生じる圧力の大きさは  $\rho gh$  である。この圧力とストロー内部の気体の圧力  $p_1$  の和が  $p_0$  と等しくなることで、つり合いが生じる。よって  $p_0 = p_1 + \rho gh$  が成り立つ。

**演習 5.4** 気球内の空気にはたらく重力は、気体の体積を  $V$ 、密度を  $\rho(T)$  とすると  $\rho(T)Vg$  で与えられる。ここで大気圧  $p_0$  のもとの温度  $T$ 、モル質量  $\bar{M}$  の大気の密度  $\rho(T)$  は、式 (5.11) から  $\rho(T) = \bar{M}p/(RT)$  と表される。気球内の気体が外気の温度  $T_{\text{外}} = 273 \text{ K}$  と等しいとき、気体は静水圧平衡にあり、重力と大気圧はつり合っている。気球内の気体の温度が  $T > 273 \text{ K}$  に上昇すると、気体にはたらく重力が減少し、圧力による浮力が生じる。よって浮力の大きさ  $F$  は温度  $T$  の関数として

$$F(T) = (\rho(T_{\text{外}}) - \rho(T))Vg = \frac{\bar{M}p_0Vg}{RT_{\text{外}}} \left(1 - \frac{T_{\text{外}}}{T}\right)$$

と表される。浮力が気球全体の質量  $m$  に生じる重力と等しいとき

$$\frac{\bar{M}p_0Vg}{RT_{\text{外}}} \left(1 - \frac{T_{\text{外}}}{T}\right) = mg$$

が成り立つ。これを  $T$  について解くと

$$T = T_{\text{外}} \left(1 - \frac{mRT_{\text{外}}}{\bar{M}p_0V}\right)^{-1}$$

となる。これに、気球の体積  $V = 2000 \text{ m}^3$  と質量  $m = 500 \text{ kg}$ 、大気モル質量  $\bar{M} \approx 29 \text{ g mol}^{-1} = 2.9 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ 、大気圧  $p_0 \approx 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  を代入すると  $T \approx 340 \text{ K} \approx 67^\circ\text{C}$  を得る。

## 第 6 章

### 演習 6.1

- (1) 理想気体は準静的ではない過程で変化することもある。例えば 6.2 節で考えたゲイリュサックとジュールの実験のように、真空への理想気体の放出は準静的ではない。
- (2) 定圧過程における仕事は式 (6.14) で与えられる。1 気圧 = 101325 Pa であり、体積変化が  $1 \text{ m}^3$  であるとき、気体がする仕事は  $W = 101325 \times 1 \text{ J} \approx 1 \times 10^5 \text{ J}$  となる。
- (3) 準静的ではなく気体が膨張するときにも、気体は外部に対して正の仕事をするすることができる。
- (4) 気体の体積が変化しないとき、気体のする仕事はゼロである。
- (5) 6.3.1 節で述べたように、理想気体の内部エネルギーは温度のみで決まる。理想気体の等温過程では、温度が一定であるため、変化の前後で内部エネルギーは変化しない。よって熱力学第 1 法則 (6.4) の左辺はゼロであり、系が外部に対してする仕事と系が外部から受け取る熱は等しくなる。
- (6) 理想気体が膨張するとき、系は外部に正の仕事をする。これが漸熱的に行われると、熱力学第 1 法則 (6.4) から  $\langle E \rangle_{\text{終}} - \langle E \rangle_{\text{始}} = -W$  であり、内部エネルギーは必ず減少する。
- (7) 圧力が一定の理想気体は、状態方程式から温度と体積が比例する。よって、理想気体が定圧過程によって熱を受け取ると膨張し、外部に正の仕事をする。このとき熱力学第 1 法則 (6.4) の右辺について  $Q - W < Q$  が成り立つため、 $\langle E \rangle_{\text{終}} - \langle E \rangle_{\text{始}} < Q$  であり内部エネルギーの増加量は系が外部から受け取る熱よりも小さい。

### 演習 6.2

- (1) まず、密度  $\rho$  を温度  $T$  の関数として表そう。式 (5.11) より、気体の密度は  $\rho = \frac{\bar{M}p}{RT}$  と表される。ここで  $\bar{M}$  は空気のモル質量、 $R$  は気体定数、 $p$  は圧力、 $T$  は温度である。いま、大気の温度の高度依存性は断熱

過程であり、式 (6.47) より、地上での圧力  $p_{\text{地上}}$  と温度  $T_{\text{温度}}$  を用いて

$$pT^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = p_{\text{地上}}T_{\text{地上}}^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

が成り立つ。ここで  $\gamma$  は比熱比である。上式によって密度の式から  $p$  を消去すると

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\bar{M}p_{\text{地上}}}{RT} \left( \frac{T_{\text{地上}}}{T} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\bar{M}p_{\text{地上}}}{RT_{\text{地上}}} \left( \frac{T_{\text{地上}}}{T} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \\ &= \rho_{\text{地上}} \left( \frac{T}{T_{\text{地上}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

を得る。最後の等式では、地上での密度  $\rho_{\text{地上}} = \frac{\bar{M}p_{\text{地上}}}{RT_{\text{地上}}}$  を用いた。この右辺の  $T$  に式 (6.54) を代入することで、密度を  $z$  の関数  $\rho(z)$  として表すことができる。すなわち

$$\rho(z) = \rho_{\text{地上}} \left( 1 - \frac{\Gamma}{T_{\text{地上}}} z \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{A.1})$$

である。

- (2) 式 (6.54) の  $\Gamma \approx 9.8 \times 10^{-3}$  K/m, 地上での温度  $T_{\text{地上}} \approx 2.9 \times 10^2$  K, 2 原子分子の比熱比  $\gamma = 7/5$ ,  $z = 1.0 \times 10^4$  m を式 (A.1) に代入することで

$$\rho(10^4 \text{ m}) = \rho_{\text{地上}} \left( 1 - \frac{9.8 \times 10}{2.9 \times 10^2} \right)^{5/2} \approx 0.36\rho_{\text{地上}}$$

を得る。すなわち、高度 1 万 m の空気の密度は地上のおよそ 36% である。これは実測値の良い近似になっている。なお、6.4 節の最後に述べたように、実際の気は湿っており凝縮熱の影響で温度変化の測定値は 6.5 K/km となる。この値を計算に用いる場合、比熱比  $\gamma$  を式 (6.54) によって得られる有効的な値  $\gamma = \left( 1 - \frac{RT}{Mg} \right)^{-1}$  に置き換えた上で、式 (A.1) に  $\Gamma \approx 6.5 \times 10^{-3}$  K/m を代入すれば良い。このとき  $\rho(10^4 \text{ m}) \approx 0.34\rho_{\text{地上}}$  という値が得られる。

旅客機の運行にとって、空気の密度が小さいほど空気抵抗が小さいというメリットがあるが、一方でエンジンでの燃料の燃焼には空気が必要である。実際に飛行機が運行する高度 1 万 m は、この両方のバランスを取るために適した高度になっている。

## 第7章

### 演習 7.1

- (1) 準静的ではない過程で変化しても、始状態と終状態が等しければサイクルと呼ぶ。現実には存在する熱機関サイクルは有限の時間で稼働するため、準静的ではないサイクルである。
- (2) カルノーサイクルは断熱過程と等温過程からなるサイクルである。
- (3) 第 2 種永久機関は熱力学第 1 法則を満たす。7.1 節を参照せよ。
- (4) 7.3 節の逆向きに稼働させたカルノーサイクルのように、サイクルに外部から正の仕事を与えれば、低温熱源から高温熱源に熱を移動させることができる。こうした機関は 7.1 節で述べたようにヒートポンプと呼ばれる。エアコンもヒートポンプの一種であり、エアコンを動かすためには外部から仕事(電力)を供給する必要がある。それゆえ、クラウジウスの原理における「他に何の変化も残さないようにする」という状況には当てはまらず、反例にはならない。
- (5) 受け取った熱をすべて仕事に変換する熱機関の効率  $\eta$  は 1 である。7.5 節で見たように、温度  $T_H$  と  $T_L$  の高温熱源と低温熱源の間で稼働する任意の 2 温度サイクルの効率は、カルノーサイクルの効率  $\eta_C = 1 - T_L/T_H$  を超えることはない。また、カルノーサイクルの効率を 1 にするには、低温熱源の温度を  $T_L = 0$  にするか、高温熱源の温度を無限に大きくする必要があるが、これはいずれも実現できない。よって、任意の 2 温度サイクルの効率は 1 未満であり、どのような 2 温度サイクルであっても、受け取った熱をすべて仕事に変換することはできない。このことは、第 2 種永久機関が実現できないことから明らかである。

### 演習 7.2

- (1) 系に含まれる理想気体では状態方程式  $p_I V_I = nRT_I$  が成り立つため、温度は  $T_I(p_I, V_I)$  のように  $p_I$  と  $V_I$  の関数として表される。また、 $A \rightarrow B$  および  $C \rightarrow D$  は理想気体の準静的な断熱過程であり、ポアソンの法則 (6.47) より  $p_A = p_B (V_B/V_A)^\gamma$  および  $p_D = p_C (V_C/V_D)^\gamma$  のように、 $p_A$  と  $p_B$  は  $V_I$  および  $p_B$  と  $p_C$  で表される。最後に、 $B \rightarrow C$  および  $D \rightarrow A$  は定積過程であるため、 $V_D = V_A$  および  $V_C = V_B$  が成り立つ。以上より

$$\begin{aligned}V_C &= V_B & V_D &= V_A \\ p_A &= p_B \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma & p_D &= p_C \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma \\ T_A &= \frac{p_B V_A}{nR} \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma & T_B &= \frac{p_B V_B}{nR} \\ T_C &= \frac{p_C V_B}{nR} & T_D &= \frac{p_C V_A}{nR} \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma\end{aligned}$$



が成り立つことがわかる。

- (2) B→C および D→A は定積過程であり、定積モル比熱  $C_V$  を用いて

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_C - T_B)$$

$$Q_{\text{out}} = nC_V(T_D - T_A)$$

が成り立つ。右辺の温度の因子に (1) の結果を用いて整理すると

$$T_C - T_B = T_A \left( \frac{T_C}{T_A} - \frac{T_B}{T_A} \right)$$

$$= T_A \left\{ \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \frac{p_C}{p_B} - \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \right\}$$

$$= T_A(\alpha - 1)\beta^{\gamma-1}$$

$$T_D - T_A = T_A \left( \frac{T_D}{T_A} - 1 \right) = T_A \left( \frac{p_C}{p_B} - 1 \right)$$

$$= T_A(\alpha - 1)$$

と表される。よって

$$Q_{\text{in}} = nC_V T_A(\alpha - 1)\beta^{\gamma-1}$$

$$Q_{\text{out}} = nC_V T_A(\alpha - 1)$$

が得られる。サイクルを1周する前後で系の内部エネルギーは変化せず、熱力学第1法則からその間に系がする正味の仕事は  $Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}$  と等しい。それゆえ

$$W_{\text{out}} - W_{\text{in}} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} = nC_V T_A(\beta^{\gamma-1} - 1)(\alpha - 1)$$

である。いま、 $C_V > 0$ ,  $T_A > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ ,  $\gamma - 1 > 0$  が成り立つので、上式の右辺は正となる。

- (3) 熱機関サイクルの効率の定義式 (7.2) と (2) の結果を用いると、オットーサイクルの効率は

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}}$$

であり、 $\beta$  のみで決まることがわかる。 $\beta > 1$  かつ  $\gamma - 1 > 0$  なので、 $\beta$  が大きいほどサイクルの効率は上昇することがわかる。ただし、 $\beta$  はいくらでも大きく取れるわけではない。サイクル中の最大温度は  $T_{\text{max}} = T_C$ 、最低温度は  $T_{\text{min}} = T_A$  であるため、(1) の結果から

$$\frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = \frac{T_A}{T_C} = \frac{p_B V_A}{p_C V_B} \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^\gamma = \frac{1}{\alpha \beta^{\gamma-1}}$$

が成り立つ。よって

$$\beta = \left( \frac{1}{\alpha} \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} < \left( \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

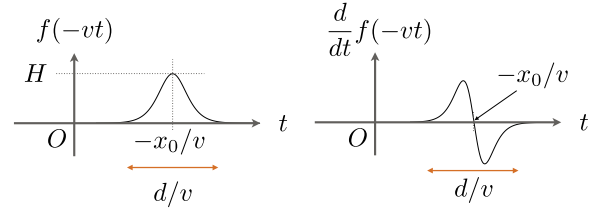
である。ここで  $\alpha > 1$  を用いた。以上を用いると、オットーサイクルの効率は

$$\eta = 1 - \alpha \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} < 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}$$

と表すこともできる。

## 第8章

**演習 8.1** この波は  $x$  の正の方向に速さ  $v$  で進行するため、位置  $x$ 、時刻  $t$  での変位は  $f(x - vt)$  と表される。よって、時刻  $t$  における  $x = 0$  の位置での変位は  $f(-vt)$  となる。これより、(1) のグラフは下図の左側のように、 $t = -x_0/v$  で最大値  $H$  を取り、変位がゼロでない範囲がおよそ  $d/v$  となる。また、時刻  $t$  における  $x = 0$  の位置での弦の  $y$  方向の速度は、 $f(-vt)$  の傾き  $\frac{d}{dt}f(-vt)$  である。(1) のグラフから傾きを読み取ると、(2) のグラフは下図の右側のような形を取ることがわかる。変位が最大となる時刻  $t = -x_0/v$  では、 $y$  方向の速度はゼロとなることに注意せよ。



**演習 8.2** 三角関数の加法定理 (8.40) から

$$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{2} = \sin \alpha \sin \beta$$

が成り立つ。これを用いると、式 (8.26) の左辺は

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \cos \frac{2\pi(m-n)x}{L} - \cos \frac{2\pi(m+n)x}{L} \right\} dx$$

となる。 $m, n$  は自然数である。右辺の積分は、 $m \neq n$  と  $m = n$  の場合に分けて評価する必要がある。 $m \neq n$  のときは、正弦関数の微分の公式 (1.36) および合成関数の微分の公式 (1.19) から得られる  $\cos(Ax) = \frac{1}{A} \frac{d}{dx} \sin(Ax)$  を用いて積分を実行すると

$$(\text{左辺}) = \frac{L}{4\pi(m-n)} \left[ \sin \frac{2\pi(m-n)x}{L} \right]_0^L$$

$$- \frac{L}{4\pi(m+n)} \left[ \sin \frac{2\pi(m+n)x}{L} \right]_0^L = 0$$

を得る。 $m = n$  のときは、 $\cos 0 = 1$  に注意して積分を実行すると

$$(\text{左辺}) = \frac{L}{2} - \frac{L}{4\pi(m+n)} \left[ \sin \frac{2\pi(m+n)x}{L} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

を得る。以上より、式 (8.26) が成り立つ。

**演習 8.3** 式 (8.46) の矩形波は周期  $L$  の奇関数であるため、式 (8.24) のように表すことができる。フーリエ係数  $b_n$  は式 (8.25) の  $F_{\text{奇}}(x)$  に式 (8.46) の  $f(x)$  を代入して

$$b_n = \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \sin \frac{2\pi n x}{L} dx - \int_{L/2}^L \sin \frac{2\pi n x}{L} dx \right)$$

となる. 式 (1.37) および式 (1.19) から得られる  $\sin(Ax) = -\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \cos(Ax)$  を用いて積分を実行すると

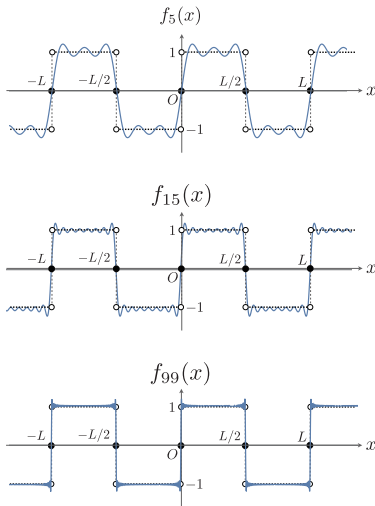
$$b_n = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{\pi n}, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

を得る. ここで  $k$  は自然数である.

下の図は, このフーリエ級数 (実線) が矩形波 (点線) を近似するようすを表している. ここで,

$$f_{2k-1}(x) = \sum_{m=1}^k \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin \frac{2\pi m x}{L}$$

である. フーリエ級数の高次の項を含めていくことで, フーリエ級数が矩形波に近づいていくことが見て取れる.



**演習 8.4** 1次元の波動方程式 (8.21) は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

である. これを式 (8.2) で定義された変数  $X, Y$  および  $\tilde{u}(X, Y) = u(x, y)$  によって書き換えよう. まず,  $x$  による偏微分を  $X$  と  $Y$  の微分で表す.  $x \rightarrow x + \Delta x$  の微小変化のもとで,  $X = x + vt$  と  $Y = x - vt$  はともに  $\Delta X = \Delta Y = \Delta x$  だけ変化する. それゆえ, この微小変化のもとでの  $u(x, t) = \tilde{u}(X, Y)$  の変化量は

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \tilde{u}(X + \Delta x, Y + \Delta x) - \tilde{u}(X, Y)$$

と表される. 偏微分の定義に上を用いることで

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(X + \Delta x, Y + \Delta x) - \tilde{u}(X, Y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\tilde{u}(X + \Delta x, Y + \Delta x) - \tilde{u}(X, Y + \Delta x)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{u}(X, Y + \Delta x) - \tilde{u}(X, Y)}{\Delta x} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right) \tilde{u}(X, Y) \end{aligned}$$

を得る. 同様に  $t \rightarrow t + \Delta t$  の微小変化のもとでは,  $X$  と  $Y$  はそれぞれ  $\Delta X = v\Delta t$ ,  $\Delta Y = -v\Delta t$  だけ変化するため,

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \tilde{u}(X + v\Delta t, Y - v\Delta t) - \tilde{u}(X, Y)$$

が成り立つ. よって

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right) \tilde{u}(X, Y)$$

を得る. これらより, 式 (A.2) は

$$\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \tilde{u}(X, Y) = 0 \quad (\text{A.3})$$

と書き換えられる.

式 (A.3) の一般解を求めていこう. まず  $\frac{\partial \tilde{u}(X, Y)}{\partial X} = U$  と置くと, 式 (A.3) は  $\frac{\partial U}{\partial Y} = 0$  を意味する. これを満たす  $U$  は  $Y$  に依存しない  $X$  の任意関数  $U(X)$  となる.  $\frac{\partial \tilde{u}(X, Y)}{\partial X} = U(X)$  の両辺を  $X$  で積分すると

$$\tilde{u}(X, Y) = \int U(X) dX + C(Y)$$

を得る. ここで1項目は  $X$  の任意関数となる. また, 2項目  $C(Y)$  は積分定数であり,  $Y$  だけに依存する任意関数である. よって,  $\tilde{u}(X, Y)$  はそれぞれ  $X$  と  $Y$  だけに依存する2つの任意関数の和であることがわかる. これらをそれぞれ  $f(x - vt)$ ,  $g(x + vt)$  と置くと

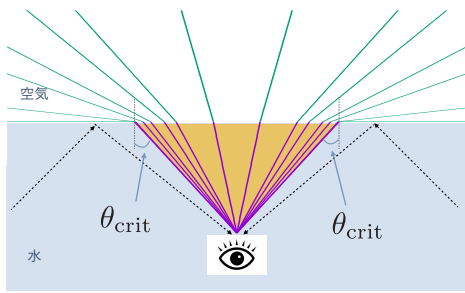
$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

を得る. この解を得る過程では, 解の形を制限するような仮定や条件は用いていない. それゆえ, 上記は一般解だと言える.

## 第9章

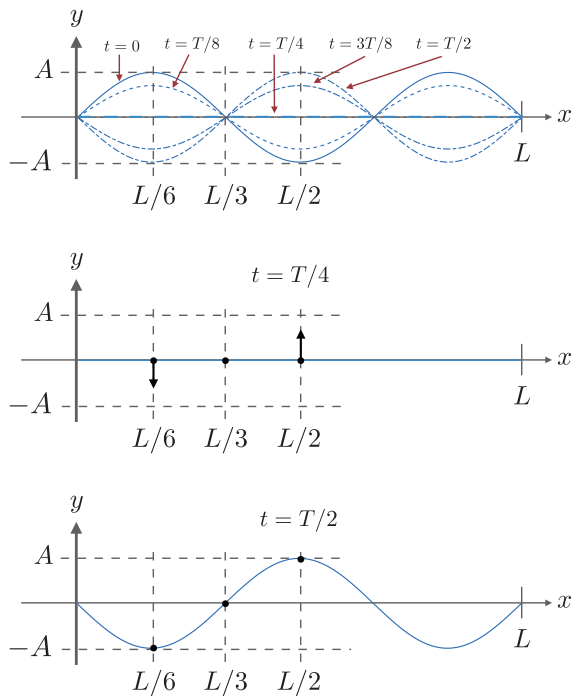
**演習 9.1** 下の図には, 水中にいる観測者に空気中から届く光の経路を実線, 水中から届く光の経路を点線で示している. 空気と水の境界で光は屈折し, その臨界角  $\theta_{\text{crit}}$  は式 (9.28) で与えられる. 図の実線で示すように, 空気中から屈折して観測者に到達する光は, 観測者の視線方向が鉛





直上向きから  $\theta_{\text{crit}}$  以内の角度に存在する。一方、水中の観測者に対して  $\theta_{\text{crit}}$  より大きな視線方向の角度で届く全ての光は、図の点線で示すような、水中から水面に向かった光が水面で反射したものになる。その結果、水中にいる観測者は、鉛直上向きから  $\theta_{\text{crit}}$  以内の視線方向が相対的に明るく見える。これがスネルの窓である。暗い領域は、式 (9.28) により  $\theta_{\text{crit}} \approx 48.8^\circ$  以上の角度の場所に生じる。

**演習 9.2** 下の図に、 $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2$  での弦の変位を線種を変えて示している。また、 $t = T/4$  および  $t = T/2$  での弦の変位をそれぞれ実線で書いたグラフも示している。



$t = T/4$  では、弦上の全ての位置で変位はゼロである。 $t = T/4$  の前後の時刻で、 $x = L/6$  の点は変位が正から負に、 $x = L/2$  の点は変位が負から正に変化する。よってこれらの点の  $t = T/4$  での速度は図に示す矢印の向きである。 $x = L/3$  の点の変位はゼロのまま一定のため、速度もゼロである。

$t = T/2$  では、弦上の全ての位置で、変位が最大値または最小値を取る。 $t = T/2$  の前後の時刻で、 $x = L/6$  の点

は変位が減少から増加に転じ、 $x = L/2$  の点は変位が増加から減少に転じる。よってこれらの点でも  $t = T/2$  の速度はゼロである。

以上より、 $x = L/6, L/3, L/2$  のそれぞれの位置で、以下が成り立つ。

位置	$x = L/6$	$x = L/3$	$x = L/2$
$t = T/4$ での弦の変位	0	0	0
$t = T/4$ での弦の $y$ 方向の速度	負	0	正
$t = T/2$ での弦の変位	$-A$	0	$A$
$t = T/2$ での弦の $y$ 方向の速度	0	0	0

### 演習 9.3

- (1) 式 (1.36) および (1.19) を用いて微分すると  $f'(x) = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos(2\pi x/\lambda)$  を得る。これを単位長さあたりの力学的エネルギー密度を表す式 (9.5) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \frac{4\pi^2 A^2 \sigma v^2}{\lambda^2} \cos^2 \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right\} \\ &= A^2 (2\pi f)^2 \frac{M_\lambda}{\lambda} \cos^2 \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right\} \end{aligned}$$

を得る。ここで  $v = f\lambda$  を用いた。正弦波 1 周期分のエネルギーは、 $\mathcal{E}(x, t)$  を  $x$  について距離  $\lambda$  だけ足し合わせたものである。これは時刻  $t$  によらず等しい結果を与えるはずである。 $t = 0$  の時のエネルギー密度を使って、 $x = 0$  から  $x = \lambda$  まで足し合わせて

$$E_\lambda = \int_0^\lambda \mathcal{E}(x, 0) dx = A^2 (2\pi f)^2 \frac{M_\lambda}{\lambda} \int_0^\lambda \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} dx$$

と書ける。公式  $\cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$  を用いることで、**演習 8.2**で行ったのと同様に積分が実行できて

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \left( \cos \frac{4\pi x}{\lambda} + 1 \right) dx \\ &= \frac{\lambda}{8\pi} \left[ \sin \frac{4\pi x}{\lambda} \right]_0^\lambda + \frac{1}{2} [x]_0^\lambda = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

である。以上より

$$E_\lambda = \frac{1}{2} M_\lambda A^2 (2\pi f)^2$$

を得る。正弦波の 1 波長分のエネルギーは、1 波長分の長さの弦の質量、振幅の 2 乗、振動数の 2 乗に比例する。

- (2) 式 (1.37) および (1.19) を用いて波形の式 (8.38) を微分すると

$$f'(x) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \left( -a_m m \sin \frac{2\pi m x}{L} + b_m m \cos \frac{2\pi m x}{L} \right)$$

を得る。これを式 (9.5) に代入することで

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{4\pi^2\sigma v^2}{L^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left( -a_m m \sin \frac{2\pi m(x-vt)}{L} + b_m m \cos \frac{2\pi m(x-vt)}{L} \right) \right]^2$$

が得られる。これは  $x$  に関して  $L$  ごとに繰り返す周期性を持つ。(1) と同様に  $t=0$  でのエネルギー密度を  $x=0$  から  $x=L$  まで足し合わせると  $E_L$  が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} E_L &= \int_0^L \mathcal{E}(x, 0) dx \\ &= \frac{4\pi^2\sigma v^2}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L dx \left( a_m a_n m n \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{2\pi n x}{L} \right. \\ &\quad \left. + b_m b_n m n \cos \frac{2\pi m x}{L} \cos \frac{2\pi n x}{L} - 2a_m b_n m n \sin \frac{2\pi m x}{L} \cos \frac{2\pi n x}{L} \right) \end{aligned}$$

である。右辺の積分は、**演習 8.2**の公式を用いて実行できる。右辺1項目と2項目は、 $m=n$  のときだけゼロでない値を与えるため、積分を実行したのちに  $m$  に関する和を取ると

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{4\pi^2\sigma v^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^2 n^2 \frac{L}{2} + b_n^2 n^2 \frac{L}{2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (L\sigma) (a_n^2 + b_n^2) \left( 2\pi \frac{nv}{L} \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} M_L A_n^2 (2\pi f_n)^2 \end{aligned}$$

が得られる。これを (1) の結果と見比べると、最後の表式の和の各項は、長さ  $L$  の範囲における振動数  $f_n$ 、振幅  $A_n$  の正弦波のエネルギーであることがわかる。

## 第10章

**演習 10.1** 式 (10.18) より  $50 = 10 \log_{10} \frac{P^2}{2(2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa})^2}$  である。これを  $P$  について解くと、

$$P = \sqrt{2} \cdot 10^{2.5} \cdot 2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa} = 8.9 \times 10^{-3} \text{ Pa}$$

を得る。 $P$  と大気圧  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  の比は  $8.9 \times 10^{-8} \approx 10^{-7}$  で極めて小さい。このように微小な圧力の変動を人間の耳が感知できるのは、驚くべきことである。

**演習 10.2** 笛が鳴るとき、笛の中の気柱には定常波が生じている。10.1.5 節で見たように、長さ  $L$  のフルートなどの笛に生じる定常波の  $m$  番目のモードの振動数は  $f_m = vm/(2L)$  ( $m=1, 2, \dots$ ) であり、音速  $v$  に比例し、気柱の長さ  $L$  に反比例する。よって、気柱の長さ  $L$  が大きいと定常波の振動数が小さくなり、音程が低くなる。

**演習 10.3** 9.4.2 節の議論を思い出すと、定常波の波長を  $\lambda_m$  としたとき、 $\lambda_m/4$  おきに定常波の節と腹が交互に生じる。よって、気柱の長さ  $L$  と  $\lambda_m/4$  の奇数倍が等しいとき、気柱の両端がそれぞれ節と腹になる。以上より、一方が固定端でもう一方が自由端になる気柱に許される振動モードの波長は  $L = (2m-1)\lambda_m/4$  ( $m=1, 2, \dots$ ) を満たす。すなわち

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1}, \quad f_m = (2m-1) \frac{v}{4L} = (2m-1)f_1$$

を得る。基本振動数  $f_1$  は  $v \approx 340 \text{ m/s}$  および  $L = 0.7 \text{ m}$  を用いて

$$f_1 = \frac{v}{4L} \approx 120 \text{ Hz}$$

となる。同じ長さを持つ両端が開いた筒に生じる定常波の場合、10.1.5 節で見たように基本振動の振動数は  $f_1 = v/(2L)$  であるため、上の値の2倍の240 Hz となる。なお、10.1.5 節で触れたように、筒の開口端に現れる節の位置には、開口端補正によるずれが生じる。開口端補正の効果を含めると、筒の長さ  $L$  は実効的に大きくなるため、上記の値よりも振動数は小さくなる。

**演習 10.4** 人が声を発するときには、体の中の空気が振動している。この振動は近似的に気柱の定常波と考えることができる。演習 10.2 でも見たように、気柱に生じる定常波の振動数は音速  $v$  に比例していた。式 (10.15) の上で詳しく見たように、大気圧下での気体中の音速は、比熱比、温度、気体のモル質量に依存する。ヘリウムのモル質量はおよそ  $4 \text{ g/mol}$  であり、ヘリウムガスを一定量吸って体内の気体が通常の空気とヘリウムの混合気体となると、体内の気体のモル質量が空気の場合よりも小さくなり、音速  $v$  が上昇する。よって、体内の気体に生じる定常波の振動数が大きくなり、普段よりも高い声を発することになる。

### 演習 10.5

(1) 式 (10.27) より

$$\tau^2 = \frac{|\vec{R}|^2}{v^2} = \frac{(V_L t - V_S(t - \tau))^2 + L^2}{v^2}$$

が成り立つ。これを整理すると

$$\tau^2 = \hat{V}_S^2 \tau^2 + 2\hat{V}_{\text{rel}}\hat{V}_S t \tau + (\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + \hat{L}^2),$$

$$\hat{V}_{\text{rel}} = (V_L - V_S)/v, \quad \hat{V}_S = V_S/v, \quad \hat{L} = L/v$$

が得られる。二次方程式の解の公式から

$$\tau = \frac{\hat{V}_{\text{rel}}\hat{V}_S t \pm \sqrt{\hat{V}_{\text{rel}}^2 \hat{V}_S^2 t^2 + (1 - \hat{V}_S^2)(\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + \hat{L}^2)}}{1 - \hat{V}_S^2}$$

$$= \frac{\hat{V}_{\text{rel}}\hat{V}_S t \pm \sqrt{\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{L}^2}}{1 - \hat{V}_S^2}$$

が求まる。音源の速さが音速を超えない ( $|\hat{V}_S| < 1$ ) ときルートの中は正でかつ  $(\hat{V}_{\text{rel}}\hat{V}_S t)^2$  よりも常に大きいので、 $\tau > 0$  の解は

$$\tau = \frac{\hat{V}_{\text{rel}}\hat{V}_S t + \sqrt{\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{L}^2}}{1 - \hat{V}_S^2} \quad (\text{A.4})$$

である。

(2) 式 (A.4) を時間で微分することで

$$\dot{\tau}(t) = \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S + \frac{\hat{V}_{\text{rel}} t}{\sqrt{\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{L}^2}} \right\}$$

を得る。よって式 (10.28) より

$$f(t) = \left[ 1 - \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S + \frac{\hat{V}_{\text{rel}} t}{\sqrt{\hat{V}_{\text{rel}}^2 t^2 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{L}^2}} \right\} \right] f_0 \quad (\text{A.5})$$

が得られる。音源と観測者の速度が等しい場合は  $\hat{V}_{\text{rel}} = 0$  であり、このとき式 (A.5) から明らかに  $f(t) = f_0$  である。 $\hat{V}_{\text{rel}} t > 0$  のとき、式 (A.5) は

$$f(t) = \left[ 1 - \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S + \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{V}_{\text{rel}}^{-2}\hat{L}^2/t^2}} \right\} \right] f_0$$

と書ける。よってこのとき  $\hat{L}/t \rightarrow 0$  の極限で

$$f(t) \rightarrow \left[ 1 - \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S + 1 \right\} \right] f_0 = \frac{v - V_L}{v - V_S} f_0$$

が得られる。これは音源と観測者が同一の直線を運動する場合の式 (10.22) に等しい。また、 $\hat{V}_{\text{rel}} t < 0$  の場合、式 (A.5) は

$$f(t) = \left[ 1 - \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S - \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \hat{V}_S^2)\hat{V}_{\text{rel}}^{-2}\hat{L}^2/t^2}} \right\} \right] f_0$$

と書ける。よってこのとき  $\hat{L}/t \rightarrow 0$  の極限で

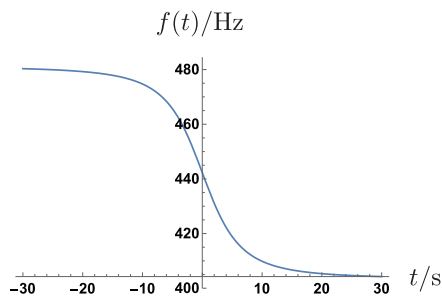
$$f(t) \rightarrow \left[ 1 - \frac{\hat{V}_{\text{rel}}}{1 - \hat{V}_S^2} \left\{ \hat{V}_S - 1 \right\} \right] f_0 = \frac{v + V_L}{v + V_S} f_0$$

となり、 $f(t)$  は式 (10.23) に一致する。

(3) 結果は以下のグラフになる。 $t < 0$  では、音源は  $x > 0$ 、観測者は  $x < 0$  の領域に存在し、だんだんと近づいてくる。このとき、ドップラー効果によって振動数は  $440 \text{ Hz}$  よりも大きくなる。 $t = 0$  で両者は  $y$  軸上ですれ違い、 $t > 0$  になると両者はどんどんと離れていく。このとき、ドップラー効果によって振動数は  $440 \text{ Hz}$  よりも小さくなる。グラフから、 $|t| \rightarrow \infty$  で  $f(t)$  は一定値に近づくことが見て取れるが、これは (2) で考えた  $\hat{L}/t \rightarrow 0$  の極限に対応している。

### 演習 10.6

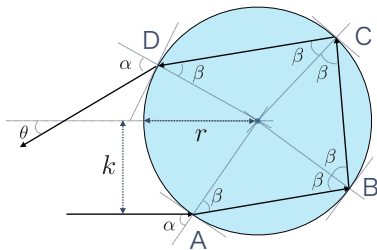
(1) 図のように、水滴の下半球に入射角  $\alpha$  で入射した光が、水滴内で2回反射して上半球から出てくる場



合を考えよう。あとは 10.2.3 節と同様の考え方をすれば良い。屈折も反射もせずに直進する場合、散乱角  $\theta = \pi$  に相当する。光線は点 A と D でそれぞれ  $\alpha - \beta$ 、点 B と C でそれぞれ  $\pi - 2\beta$  だけ方向を変える。各点で、散乱角を増加する向きに角度を変えるため

$$\begin{aligned}\theta(\alpha) &= \pi + 2(\alpha - \beta) + 2(\pi - 2\beta) - 2\pi \\ &= \pi + 2\alpha - 6\beta\end{aligned}$$

を得る。ここで  $0 \leq \theta(\alpha) \leq 2\pi$  になるよう、 $2\pi$  をあらかじめ差し引いた。



- (2) 入射光線の位置が水滴の中心 (図中の  $k = 0$ ) のとき  $\theta = \pi$  であり、小さい  $k$  では  $\theta$  は  $k$  の減少関数となるが、ある  $k$  の値で  $\theta$  は最小値を取り、その後  $k$  の増加関数となる。虹角は  $\theta$  の最小値に対応し、ここでは  $\frac{d\theta}{d\alpha} = 0$  が成り立つ。式 (10.35) より

$$\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = 2 - 6\sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

である。これより、虹角  $\theta_{\min} = \theta(\tilde{\alpha})$  が入射角  $\tilde{\alpha}$  で与えられるとすると

$$\sin \tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$$

を得る。

屈折率  $n$  が与えられると、関数電卓や計算機を用いて数値的に  $\tilde{\alpha} = \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$  および  $\beta(\tilde{\alpha}) = \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8n^2}}$  を求めることができる。これを用いて  $\theta_{\min} = \pi + 2\tilde{\alpha} - 6\beta(\tilde{\alpha})$  となる。赤、緑、紫の光に対する結果を以下の表に示す。

色	波長	屈折率	$\tilde{\alpha}$	$\theta_{\min}$
赤	656.3 nm	1.3311	71.90°	50.39°
緑	546.1 nm	1.3345	71.79°	51.28°
紫	404.7 nm	1.3428	71.53°	53.43°

主虹の虹角は赤が大きく紫が小さかったが、副虹では虹角は紫が大きく赤が小さくなる。そのため、副虹の色の順番は主虹と逆になる。

## 第 11 章

**演習 11.1** 水 1 mol は 18 g なので、1 トン ( $10^3$  kg) の水は

$$10^3 \text{ kg} / (1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}) = 5.6 \times 10^4 \text{ mol}$$

である。それゆえ、その中には

$$(5.6 \times 10^4 \text{ mol}) \times (6.0 \times 10^{23} \text{ 個/mol}) = 3.4 \times 10^{27} \text{ 個}$$

の水分子がある。1 分子あたり 18 個の陽子と電子があるので、陽子が電子に比べて  $10^{-10}e$  だけ電荷が大きいと仮定すると、

$$(10^{-10}e/\text{陽子}) \times 18 \text{ 陽子/個} = 2.9 \times 10^{-28} \text{ C/個}$$

の電荷を持っていることになる。それゆえ、水 1 トンでは

$$(2.9 \times 10^{-28} \text{ C/個}) \times 3.4 \times 10^{27} \text{ 個} = 1.0 \text{ C}$$

の電荷がある。これはかなり大きな電荷である。12 章で示すように、電荷の間には万有引力に比べてずっと大きな力がはたらくので、これだけ帯電していると容易に検出されてしまう。

現在、電子と陽子の電荷の違いは  $10^{-21}$  程度以下であることがさまざまな方法で実験的に確かめられている。

**演習 11.2** 5 C の電荷を  $10^{-3}$  秒で移動させるので、

$$5 \text{ C} / 10^{-3} \text{ s} = 5 \times 10^3 \text{ A}$$

から、平均して 5 キアンペアの電流が流れる。また、電子は 1 個あたり  $-e$  の電荷を持っているので、

$$5 \text{ C} / e = 3 \times 10^{19} \text{ 個}$$

の電子が流れたことになる。

**演習 11.3** (規格が同じならば) 電球の明るさは電球に流れる電流の大きさに比例する。電池から導線を通して、電球 A に流れた電流は、2 つに分かれてそれぞれ電球 B と C に流れ込む。問題の対称性 (B と C とを取り替えても変わらない) から、それぞれに流れる電流は、A に流れた電流の半分になる。それらの電流は合流して、電球 D に流れる。定常電流に対する電荷の保存則から、電球 D に流れる電流は、電球 A に流れる電流と同じ大きさである。それゆえ、 $A = D > B = C$  であることがわかる。

## 第12章

**演習 12.1** 頂点の立体角が微小である円錐によって切り取られた、閉曲面  $S$  の微小な断面を通過する電気力線を考える。2つの断面を  $\Delta S_1, \Delta S_2$  とする。これらを通る電気力線の本数は変わらない。ただし、2つの断面の向きは、閉曲面の内側から外側に向かってを正の向きとしているので、一方は正の向き（外向き）であるが、他方は負の向きになっている。よって、 $\vec{E}(r_1) \cdot \vec{n}_1 \Delta S_1$  と  $\vec{E}(r_2) \cdot \vec{n}_2 \Delta S_2$  は大きさが等しく、符号が逆である。それゆえ、電場の面積分で2つの面の寄与は互いに打ち消し合う。以上より、電荷を含まない閉曲面に対して、電場の面積分はゼロになる。

**演習 12.2** 電荷が与えられている面を  $z = 0$  面としよう。図の円筒面に対してガウスの法則を適用する。問題の対称性から、帯電した平面によって作られる電場は、 $x$  および  $y$  座標には依存せず、平面に垂直で面に対して対称である。 $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$  それゆえ、円筒面の側面の法線ベクトルは電場に垂直であり、面積分に寄与しない。円筒の上面 ( $z = +d$ ) と下面 ( $z = -d$ ) では電場は逆向き ( $E_z(-d) = -E_z(d)$ ) であり、面積分に同じ寄与を与える。それゆえ

$$2SE_z(d) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

より  $E_z(d) = \sigma/2\epsilon_0$  を得る。 $d$  は任意であったので、電場は面からの距離によらない。この結果は例題 12.3 で得たものを再現する。

**演習 12.3**  $r$  の円と、 $r + \Delta r$  の円の間の狭い帯状の輪の部分（アニュラスと呼ぶ）からの寄与を考えよう。 $\Delta r$  が十分小さければ、この部分から電位を考える点までの距離は輪のどこの部分でも同じで  $\sqrt{r^2 + z^2}$  である。この輪の微小な弧  $\Delta s$  の部分は、電荷  $\sigma \Delta s \Delta r$  を持つ点電荷とみなしてよく、その寄与は式 (12.33) より  $k(\sigma \Delta s \Delta r)/\sqrt{r^2 + z^2}$  で与えられる。これらの寄与を弧全体にわたって足すと、アニュラスの部分の寄与が

$$\Delta V_r(z) = k \frac{\sigma(2\pi r)\Delta r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

と求まる。これを半径  $r$  がゼロから  $a$  まで足し上げれば、円板に対する電位が求まる。

$$V_{\text{円板}}(z) = 2\pi\sigma k \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

積分は

$$\frac{d}{dr} \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

に気がつけば容易に実行することができ、

$$V_{\text{円板}}(z) = 2\pi\sigma k \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right]$$

を得る。いま、 $z$  を円板の面からの距離としているので  $z > 0$  であるが、今までの計算では  $z$  を座標値と考えてもよい（負の場合は面の下側）。 $V_{\text{円板}}(z)$  は  $z \rightarrow -z$  としても値を変えないことに注意しよう。つまり、電位は面に対して対称である。

式 (12.39) より、電位の位置座標についての偏微分は電場を与える。電位  $V_{\text{面}}$  は  $z$  にしか依存しないので、電場は面に垂直な成分しか持たない。電位をこの座標  $z$  で微分して

$$E_z(z) = -\frac{dV_{\text{面}}(z)}{dz} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right] & (z > 0) \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + 1 \right] & (z < 0) \end{cases}$$

を得る。これが円板面の上面と下側での、面に垂直な電場の成分である。大きさは同じだが、逆向きであることに注意しよう。 $\sigma > 0$  であれば、面から外側に、 $\sigma < 0$  であれば面に向かう向きである。

$a \rightarrow \infty$  の極限をとると、無限に広い平面に、一様な電荷分布  $\sigma$  が与えられている場合になる。このとき、電場は

$$E_z(z) \rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & (z > 0) \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & (z < 0) \end{cases} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$$

という極限值を持つ。これは例題 12.3 の結果を再現している。

## 第13章

**演習 13.1** 車の中にいたほうが良い。車は金属でできていたため、車の中は導体で覆われた状態になっている。落雷は雲から地面に瞬間的に電流が流れる現象である。導体に覆われていると、静電遮蔽のため、その外部に電場があっても、電流が流れても、内部はその影響を受けない。雷が車に落ちて、中にいる人は安全である。

車の外に出ると、大人の人が立った高さは車の車高よりも大抵は高くなるので、かえって直接雷が落ちやすい状況になり、危険である。

**演習 13.2** ガウスの法則を、導体球と同心の半径  $r$  の球面に対して適用する。問題の対称性より、電場  $\vec{E}$  は  $r$  だけの関数であり、また、動径方向の成分しか持たない。 $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$ 。

- $0 \leq r < a$  のとき、導体中には電荷が存在しないので、 $E(r) = 0$  である。
- $a \leq r < b$  のとき、導体球に電荷  $Q$  が与えられているので、ガウスの法則より  $4\pi r^2 E(r) = Q/\epsilon_0$  であり、

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

を得る.

- $b \leq r < c$  のとき, 導体内には電場が存在しないので,  $E(r) = 0$  である.
- $c \leq r$  のとき, この球面内に与えられている電荷の総和は 0 であるから, ガウスの法則より  $4\pi r^2 E(r) = 0$  より  $E(r) = 0$  である.

導体球と導体球殻の間の電位差は  $E(r)$  を  $r = b$  から  $r = a$  まで積分して

$$V = \int_b^a dr E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

である. それゆえ

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

を得る.

$b \rightarrow \infty$  とすると,  $C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 a$  を得る. これは本文中で求めた半径  $a$  の導体球の静電容量である. また,  $d \equiv b - a$  と置いて  $d$  を小さくしていくと,  $C \rightarrow \epsilon_0(4\pi a^2)/d$  と近似できる.  $4\pi a^2$  が導体球の表面積であることを思い出すと, この式は平行板コンデンサの電気容量の式 (13.20) に一致する.

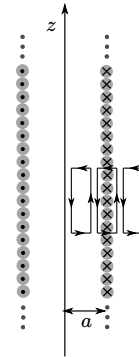
## 第 14 章

**演習 14.1** 例えば, 電流を囲む閉曲線  $C$  を問題にあったように 2 つの経路  $C_1$  と  $C_2$  に分割することを考えよう. ただし,  $C_1$  は電流を囲み,  $C_2$  は電流を囲まないとする. 問題にあるように, この分割によって線積分の値は変わらない. また, アンペールの法則は任意の閉曲線に対して成り立つので,  $C_1$  に対する線積分は,  $C$  に対する線積分と等しい. このことは, 電流を囲まない  $C_2$  に対する線積分はゼロであることを意味する.

**演習 14.2** ソレノイドの中心軸を  $z$  軸としよう. 問題の対称性より, ソレノイドによって作られる磁場  $\vec{B}$  は  $z$  に依存しない. なぜなら, ソレノイドは無限に長いので,  $z$  軸方向に移動しても系は変わらないからである. また, 軸対称性から,  $\vec{B}$  は  $z$  軸回りの回転角  $\phi$  によらない. それゆえ,  $\vec{B}$  は  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  のみの関数である. ソレノイドの単位長さあたりの巻数  $n$  が十分大きければ,  $z$  軸に垂直な平面内で  $z$  軸の周りに流れる電流の量が,  $z$  軸方向に流れる量に対してずっと大きいと考えることができる. それゆえ,  $z$  軸方向に流れる電流を無視して, 無限に多くの円電流と考えてよい. このとき,  $x-y$  平面に平行で,  $z$  軸上に中心を持つ半径  $r$  の円を考え, その円に対してアンペールの法則を適用すると, その円によって囲まれる電流は ( $r$  によらず) ゼロなので, 磁場  $\vec{B}$  は回転方向の成分を持たないことがわかる. 以上より  $\vec{B}(r) = B_r(r)\vec{e}_r + B_z(r)\vec{e}_z$  の形であることがわかる.

次に,  $z$  軸を対称軸とする半径  $r$ , 高さ  $h$  の円筒面を考える. この円筒面に対して, 磁場の面積分を行うと, 上面と下

面の寄与は打ち消し合い, 側面からの寄与は  $(2\pi r h)B_r(r)$  となる. 15 章で学ぶ磁気に関するガウスの法則 (15.6) を適用すると, これはゼロでなければならない. それゆえ,  $B_r(r) = 0$  が得られる. よって, ソレノイドによって作られる磁場は  $z$  方向の成分しか持たない. つまり  $\vec{B} = B_z(r)\vec{e}_z$  である.



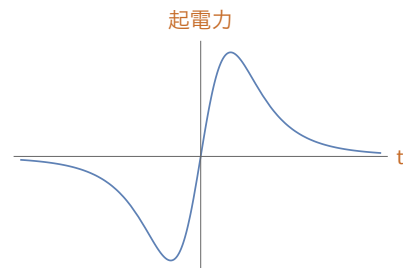
さらに,  $A(r_1, 0, z_1)$ ,  $B(r_2, 0, z_1)$ ,  $C(r_2, 0, z_2)$ ,  $D(r_1, 0, z_2)$  (ただし  $r_2 > r_1$ ,  $z_2 > z_1$ ) を頂点とする矩形の閉曲線に対して, アンペールの法則を適用する. (図を見よ. 電流の向きと閉曲線の向きに注意.  $\odot$  は紙面の裏から表に向かう向き,  $\otimes$  は紙面の表から裏に向かう向きを表す.)  $r_1 < r_2 < a$  および  $a < r_1 < r_2$  のとき, この矩形によって囲まれる電流はないので,  $(z_2 - z_1)(B_z(r_2) - B_z(r_1)) = 0$  から  $B_z(r_1) = B_z(r_2)$  を得る. つまり, ソレノイドの内側, 外側で  $B_z$  は  $r$  によらず一定である. 特に,  $r_2 \rightarrow \infty$  とすると, 遠方で磁場はゼロになると考えられるので, ソレノイドの外側では  $\vec{B} = \vec{0}$  であることがわかる.  $r_1 < a < r_2$  のとき, 矩形によって囲まれる電流は  $-(z_2 - z_1)nI$  であるから, アンペールの法則から

$$(z_2 - z_1)(B_z(r_2) - B_z(r_1)) = -\mu_0(z_2 - z_1)nI$$

を得る.  $B_z(r_2) = 0$  を用いると,  $B_z(r_1) = \mu_0 nI$  を得る. つまり, ソレノイドの内側では, 磁場は対称軸からの距離によらず  $B_z(r) = \mu_0 nI$  であることがわかる.

## 第 15 章

**演習 15.1** 起電力の時間変化は図のとおり.



$z$  軸の負方向から円形回路が近づいてくるに従って, この回路を貫く磁束はだんだん増大する. それゆえ, この回路には磁束の増大を打ち消すように電流を流すような誘導



起電力が生じる。それが、 $t < 0$  の領域で起電力  $\mathcal{E}$  が負でその絶対値が増大していく理由である。ところが、回路が磁石のすぐ近くになると、磁束の変化は小さくなり、ちょうど  $z = 0$  では磁束の変化はゼロになる。そして磁石から遠ざかるに従って、回路を貫く磁束は減少するので、誘導起電力は正になる。起電力が最小、最大となるのは、回路が  $z = -a/2$ ,  $z = +a/2$  となるときである。

**演習 15.2** 円形回路を貫く磁束を計算するためには、 $z = l$ ,  $0 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$  における磁場の  $z$  成分を計算すればよい。  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  と置いて  $\vec{m} = (m \sin \omega t, 0, m \cos \omega t)$  を式 (15.7) に代入して

$$B_z(r, \phi, z = l) = \frac{m}{4\pi} \left[ \frac{3r \cos \phi \sin \omega t + 3l \cos \omega t}{[r^2 + l^2]^{\frac{5}{2}}} l - \frac{\cos \omega t}{[r^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

を得る。それゆえ、円形回路を貫く磁束  $\Phi$  は

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\phi B_z(r, \phi, z = l) \\ &= \frac{m}{2} \cos \omega t \int_0^a r dr \left[ \frac{3l^2}{[r^2 + l^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{[r^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

で与えられる。積分は式 (15.17) を用いて計算することができる。その結果、

$$\Phi = \frac{m}{2} \frac{a^2}{[a^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} \cos \omega t$$

を得る。誘導起電力は、この磁束の時間変化率によって与えられ、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{m\omega}{2} \frac{a^2}{[a^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} \sin \omega t$$

となる。このような回路を  $120^\circ$  ずつずらして3つ配置すれば、三相交流の発電機となる。

**演習 15.3** この回路に電流  $I(t)$  が流れるとき、キルヒホッフの第2法則より、

$$V(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = I(t)R$$

が成り立つ。左辺第2項は自己インダクタンスによる誘導起電力を表す。  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  なので、電流  $I(t)$  は

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V_0 \sin \omega t$$

という微分方程式の解である。一般に、この方程式の一般解は(右辺がゼロの)齊次方程式

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$$

の一般解と(右辺がある)非齊次方程式の特解(なにかある一つの解)の和で与えられるが、齊次解は時間が経つと急速にゼロになるので、特解のみを考えればよい。HINTにあるように、特解として  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  の形を考え、これが解となるように、定数  $I_0$  と  $\phi$  を決める。

$$\omega LI_0 \cos(\omega t + \phi) + RI_0 \sin(\omega t + \phi) = V_0 \sin \omega t$$

左辺を

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$$

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$$

を用いて  $\sin \omega t$  と  $\cos \omega t$  に分けて整理し、その係数を右辺と等しいと置いて

$$-\omega LI_0 \sin \phi + RI_0 \cos \phi = V_0 \quad (\text{A.6})$$

$$\omega LI_0 \cos \phi + RI_0 \sin \phi = 0 \quad (\text{A.7})$$

を得る。式 (A.7) より

$$\tan \phi = -\frac{\omega L}{R}$$

を得る。このとき、

$$\sin \phi = -\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

であるから、これらを式 (A.6) に代入して

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

を得る。

## 第16章

**演習 16.1** (省略) 本文を読み返すこと。そして実際に友達に向かって説明を試みること。そうすることによって、単に本を読むよりも、単に授業を聞くよりも、数段深く理解することができる。

**演習 16.2** 題意より  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ ,  $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$  と置くことができる。式 (16.17) を導いた議論を電場と磁場の両方に対して行くと、 $E_x$  も  $B_x$  も  $x$  に依存しないことが導かれる。また、式 (16.19) を導いた議論を電場と磁場の両方に対して行くと、 $E_x$  も  $B_x$  も  $y$  に依存しないことが導かれる。さらに、式 (16.22) を導いた議論から、 $E_x$  は  $z$  にも依存しない。同様に、式 (16.24) を導いた議論を、 $C$  として  $x$ - $y$  平面に平行な矩形閉曲線をとって考えれば、 $B_x$  も  $z$  に依存しないことがわかる。

以上より、 $E_x$  も  $B_x$  も  $t$  のみの関数であることが示されたが、 $C$  として  $x$ - $y$  平面に平行な矩形閉曲線をとって電磁誘導の法則、アンペール=マクスウェルの法則を適用すると、 $E_x$  の時間微分、 $B_x$  の時間微分はともにゼロでなければならぬことが示される。それゆえ、 $E_x$  も  $B_x$  もともに定数でなければならぬ。

**演習 16.3** 式 (16.22) に  $E_x(z, t) = A \sin(kz - \omega t)$  を代入して,

$$\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t} = -kA \cos(kz - \omega t)$$

を得る. これを  $t$  について積分すると,

$$B_y(z, t) = \frac{k}{\omega} A \sin(kz - \omega t) + f(z)$$

を得る. ここで  $f(z)$  は  $z$  のみの関数である. これを式 (16.24) に代入すると,

$$\frac{k^2}{\omega} A \cos(kz - \omega t) + f'(z) = \frac{\omega}{c^2} A \cos(kz - \omega t)$$

を得る.  $k^2/\omega = \omega/c^2$  であるから,  $f'(z) = 0$  を得る. つまり  $f(z)$  は定数である. 定数は電磁波ではないので, これを除くと,

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} A \sin(kz - \omega t) = \frac{1}{c} E_x(z, t)$$

であることがわかる.