

第 G 章

剛体の運動

今までは物体が「小さい」として、物体の大きさの効果を考えずにいた。この章では物体の大きさが物体の運動に与える影響を考えるため、**剛体**という変形しない仮想的な物体を考える。大きさのある物体では、物体の回転運動が重要である。物体の回転のしにくさを表す**慣性モーメント**という量を導入する。固定軸まわりの剛体の回転運動について学ぶ。

G.1 剛体とは何か

物体の大きさがあまり重要でない「小さな」物体の運動を記述するには、その物体の位置ベクトル $\vec{r}(t)$ を時刻 t の関数として決定すれば十分であった。しかし、物体の大きさも考慮に入れるなら、単に物体の位置がわかっただけではその物体の運動を記述したことにはならない。物体は移動するだけではなく、向きを変えたり、変形したりするだろう。

一般にどのような物体でも、程度の差こそあれ、必ず変形する。しかし、その変形が極めて小さく無視できるような「硬い」物体もたくさんある。この章で扱う**剛体**とは、全く変形しない理想化された仮想的な物体のことである。大きさのある物体を剛体とみなすのは、多くの場合良い近似になる。また、物体の変形は多種多様であり、それを取り扱うのは一般に難しいので、剛体は変形する物体に比べて扱いが格段に簡単である。

剛体の配置を表すためには、物体がどこにあるかという情報だけでは不十分で、物体がどの向きを向いているか（どれほど回転しているか）という情報も必要になってくる。「小さな」物体では、運動とはその位置を移動するということだった。剛体の運動は、その位置を移動するという運動（並進運動という）の他に、物体が（位置を変えずに）回転するという運動もある。一般の剛体の運動は、並進運動と回転運動の組み合わせである。

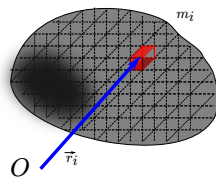
剛体の位置を表すのに、**剛体の重心**を考えると便利である．まず、重心について復習しよう．

2つの物体からなる系の重心については、第 2.5 節 (式 (2.28)) で学んだ．多数個の物体よりなる系に対しては、これを拡張すればよい．位置ベクトルが $\vec{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$) である位置に、質量 m_i の「小さな」物体があるとき、この n 個の物体からなる系の重心は

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (\text{G.1})$$

で与えられる．ただし、 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ は物体系全体の質量である．

剛体を小さな物体の多数の集まりであると考えよう．物体の大きさを小さくし、その数を増やしていけば、どのような剛体もこのように表すことができる．位置ベクトルが $\vec{r}_i$ である位置における剛体の微小な体積 ΔV_i を考えると、その質量は $m_i = \rho_i \Delta V_i$ と表される．ただし ρ_i はその微小体積の密度である．連続的な剛体全体に対しては、式 (G.1) における分割数 n を無限大にとった極限



$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V dV \rho(\vec{r}) \vec{r} \quad (\text{G.2})$$

で重心の位置ベクトルが与えられる．ただし $\rho(\vec{r})$ は位置ベクトルが $\vec{r}$ である位置における剛体の密度、 V は剛体のある空間的領域、 dV は体積要素を表し、積分は V にわたる体積積分である．

対称な剛体に対しては、計算に依らなくても重心を見つけることは比較的簡単である．例えば軸対称な剛体の重心は、対称軸上にある．

例題 G - 1

底面が半径 a の円、高さが h の一様な直円錐の重心を求めよ．

解答

頂点の位置を原点とし、対称軸を z 軸にとって考えよう。 z 軸に垂直で、 z 座標が z と $z + \Delta z$ の間にある薄い円板状の部分を考えよう。この円板の半径は za/h で与えられる。この円板上に極座標 (r, θ) を導入すると、軸からの距離が r と $r + \Delta r$ の間にあり、角度が θ と $\theta + \Delta \theta$ の間にある微小な部分の質量は、密度を ρ として

$$\Delta m = \rho r \Delta r \Delta \theta \Delta z \quad (\text{G.3})$$

で与えられる。またこの微小部分の位置ベクトルは $\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ であるから、式 (G.2) より、重心の位置ベクトル $\vec{R}$ は

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M} \int_0^h dz \int_0^{\frac{za}{h}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (\text{G.4})$$

で与えられる。ただし、直円錐の質量 M は

$$M = \frac{\rho}{3} \pi a^2 h \quad (\text{G.5})$$

である。

式 (G.4) の積分は 3 重積分であるが、ひとつずつ順番に積分していけば良い。まず式 (G.4) を θ について積分すると、 x 成分、 y 成分がゼロになることがわかる。

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M} \int_0^h dz \int_0^{\frac{za}{h}} 2\pi r dr (0, 0, 1) \quad (\text{G.6})$$

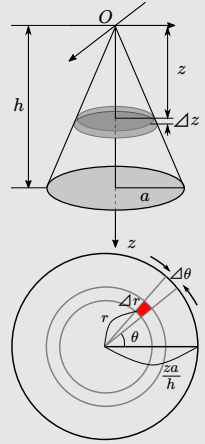
次に r で積分する。積分の上限が z に依存していることに注意しよう。

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M} \int_0^h dz \left[\pi \left(\frac{za}{h} \right)^2 \right] (0, 0, 1) \quad (\text{G.7})$$

ここで $[\dots]$ の部分は z の位置での断面 (円) の面積に等しい。それゆえ

$$\rho dz \left[\pi \left(\frac{za}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{G.8})$$

は z の位置にある厚みが dz の円板の質量である。すなわち、この式は厚み



dz の円板の重心がその中心にあり、その質量が z にあるとしたときの (z 軸上にある) 重心を求める式とみなせる。

最後に z について積分すると、

$$\vec{R} = \frac{\rho\pi a^2}{Mh^2} \int_0^h z^3 dz (0, 0, 1) = \frac{\rho\pi a^2 h^2}{4M} (0, 0, 1) = \left(0, 0, \frac{3}{4}h\right) \quad (\text{G.9})$$

を得る。すなわち、直円錐の重心は対称軸上にあり、頂点から全体の高さの $3/4$ だけ離れたところにある。

剛体の運動は、重心の並進運動と、重心のまわりの回転運動とに分解される。剛体全体の運動エネルギー K は

$$K = K_{\text{重心}} + K_{\text{回転}} \quad (\text{G.10})$$

と書くことができる、ここで

$$K_{\text{重心}} = \frac{1}{2} M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}(t) \quad (\text{G.11})$$

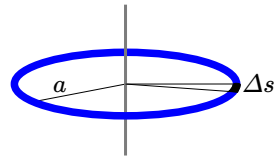
である。

剛体の一般的な回転運動は大変複雑であり、それを扱うのは本書の範囲を超える。本書では固定された軸のまわりの回転を扱う。この場合、剛体は並進運動をすることができず、回転運動に限られる。

G.2 慣性モーメント

G.2.1 対称な物体の重心のまわりの慣性モーメント

剛体の重心のまわりの回転を考えよう。例として、一様な細いリングの対称軸のまわりの回転運動を考えよう。重心はこの対称軸上でリングと同じ平面上にある。リングを微小な長さ Δs を持つ小部分の集まりに分割して考えよう。リングが十分細く、 Δs が十分短ければ、各々の小部分は「小さい」物体とみなすことができる。



このリングが対称軸のまわりに一定の角速度 ω で回転しているとしよう。このとき小部分は半径 a の等速円運動をしているので、その速さは $v = a\omega$ である。また、このリング全体の質量を M とすると、単位長さあたりの質量は $M/(2\pi a)$ であるから、この小部分の質量は $\Delta s M/(2\pi a)$ で与えられる。よって、この小部分の回転による運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta s}{2\pi a} M (a\omega)^2 \quad (\text{G.12})$$

である。この計算は、リングのどこの小部分に対しても同じなので、それらをすべて加え合わせて、リング全体での回転の運動エネルギーを求めることができる。

$$K_{\text{回転 (リング)}} = \frac{1}{2} M a^2 \omega^2 \quad (\text{G.13})$$

一般に、剛体が固定軸のまわりを角速度 ω で回転しているとき、剛体の回転の運動エネルギーは

$$K_{\text{回転}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{G.14})$$

と書ける。ここで I は**慣性モーメント**と呼ばれる。対称軸のまわりの回転に対して、リングの慣性モーメントは

$$I_{\text{リング}} = M a^2 \quad (\text{G.15})$$

である。慣性モーメントは (質量) $\times$ (長さ)² という次元を持っている。

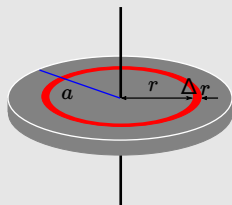
慣性モーメントは、剛体の形状と、どの軸の周りの回転を考えるかを指定すれば決まる量である。同じ剛体でも、回転軸が異なれば慣性モーメントも異なる。それゆえ、慣性モーメントについて述べるときは、どの軸に関する慣性モーメントであるかを明確にする必要がある。

例題 G - 2

半径 a 、質量 M の薄い様な円板の、中心軸まわりの回転に対する慣性モーメントを求めよ。

解答

半径が r と $r + \Delta r$ の間の、円板の一部分の慣性モーメントを考えよう．円板が十分薄く、 Δr が十分小さければ、この部分は半径 r の、一様な細いリングとみなすことができる．円板の単位面積あたりの質量は $M/(\pi a^2)$ であるから、この部分の慣性モーメントは式 (G.15) から



$$\Delta I_{\text{リング状部分}} = \left(\frac{M}{\pi a^2} 2\pi r \Delta r \right) \times r^2 = \frac{2M}{a^2} r^3 \Delta r \quad (\text{G.16})$$

で与えられる．($2\pi r \Delta r$ はこの部分の面積である．) 円板のすべての部分は同じ角速度で回転するので、このような慣性モーメントをすべての部分について加え合わせると、円板全体の慣性モーメントを得ることができる．それゆえ

$$I_{\text{円板}} = \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2} M a^2 \quad (\text{G.17})$$

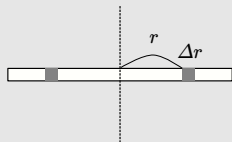
を得る．

例題 G - 3

質量 M 、長さ l の細い棒の中心を通り、棒に垂直な軸の周りに回転させるときの慣性モーメントを求めよ．

解答

回転の中心からの距離が r と $r + \Delta r$ のあいだにある小部分を考え、一定の角速度 ω で棒が回転するとき、この小部分の持つ運動エネルギーを考えよう．この小部分の質量は $(\Delta r/l)M$ であり、速さは $r\omega$ であるから、この部分の運動エネルギーは



$$\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{l} M (r\omega)^2 = \frac{M\omega^2}{2l} r^2 \Delta r \quad (\text{G.18})$$

で与えられる。それゆえ、棒全体では

$$K_{\text{回転 (棒)}} = 2 \times \frac{M\omega^2}{2l} \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} Ml^2 \right) \omega^2 \quad (\text{G.19})$$

となる。ここで2倍したのは、回転軸の両側に棒があるので、距離が r と $r + \Delta r$ の間にある小部分は2つあることによる。それゆえ棒の慣性モーメントは

$$I_{\text{棒}} = \frac{1}{12} Ml^2 \quad (\text{G.20})$$

であることがわかる。

慣性モーメントは (質量)×(回転軸からの距離)² を加え合わせたものである。リングの場合には、すべての質量が回転軸から a の距離にあったので、 Ma^2 と簡単に求まった。円板や棒の場合には、軸に近いところにも質量が分布しているので、その分、リングの場合に比べると小さくなる。それが円板の場合には $1/2$ 、棒の場合には $1/3$ ($l/2$ が a に対応するとして) という1より小さい係数として現れている。

G.2.2 重心を通る軸に対して平行な軸のまわりの慣性モーメント

前節では剛体の重心を通る軸に関する慣性モーメントを考えた。対称な物体の重心は対称軸上にあるので、その場合には対称軸に関する慣性モーメントとなる。それ以外の回転軸のまわりの慣性モーメントは、この慣性モーメントから、簡単な関係式を用いて得ることができる。

質量 M の剛体の、重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I とし、その軸から距離 l だけ離れて平行な軸の周りの慣性モーメントを I' とすると、

$$I' = I + Ml^2 \quad (\text{G.21})$$

が成り立つ。

この式の意味を直感的に理解するためには、剛体の重心を通る軸以外の軸の回転は、(i) 剛体自体を回転させずに行う重心の位置の回転軸まわりの回転と、(ii) 重心を通る軸のまわりの回転との合成と考えるとよい。角速度を ω としよう。(i) は回転軸から距離 l にある質量 M の「小さな」物体の回転と同じで、その運動エネルギーは

$$K_{(i)} = \frac{1}{2}M(l\omega)^2 = \frac{1}{2}Ml^2\omega^2 \quad (\text{G.22})$$

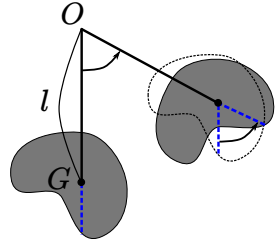
で与えられる。(ii) は G.2.2 節で考えたように、

$$K_{(ii)} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{G.23})$$

で与えられるので、それらの和は

$$K_{\text{回転}} = K_{(i)} + K_{(ii)} = \frac{1}{2}(I + Ml^2)\omega^2 \quad (\text{G.24})$$

となる。これより、式 (G.21) を得る。



例題 G - 4

質量 M 、長さ l の一様な細い棒の、端から $l/6$ の位置に、棒に垂直に回転できるように回転軸を取り付けた。この回転軸に関する慣性モーメントを求めよ。

解答

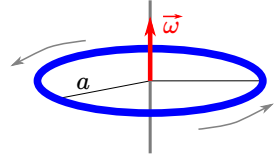
棒の重心を通る軸に関する慣性モーメントは $I = Ml^2/12$ であることは、例題 G - 3 で求めた。公式 (G.21) を用いて

$$I' = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{7}{36}Ml^2 \quad (\text{G.25})$$

を得る。ただし、 $l/3 = l/2 - l/6$ は回転軸と重心との間の距離である。

G.3 剛体の角運動量*

中心軸のまわりに一定の角速度 ω で回転するリングに対する角運動量を計算してみよう．リングの長さ Δs の小部分を考える．この部分への中心を基準点とした位置ベクトルを $\vec{r}(t) = a\vec{e}_r(t)$ とすると，速度ベクトルは $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = a\omega\vec{e}_\phi(t)$ で与えられるので，この小部分の角運動量は



$$\frac{\Delta s}{2\pi a} M \vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \frac{\Delta s}{2\pi a} M a^2 \omega \vec{e}_z \quad (\text{G.26})$$

となる．ただし， $\vec{e}_z = \vec{e}_r(t) \times \vec{e}_\phi(t)$ はリングの面に垂直な単位ベクトルである (式 (3.11) 参照)．この角運動量は，すべての小部分に対して同じ寄与となるので，リング全体について足し合わせると，

$$\vec{L}_{\text{リング}} = M a^2 \omega \vec{e}_z = I_{\text{リング}} \omega \vec{e}_z \quad (\text{G.27})$$

となる．小部分の位置ベクトル，速度ベクトルは時間的に変化するが，角運動量ベクトルは時間に依らないことに注意しよう．

一般に，軸対称な剛体が対称軸の周りに回転する場合，その回転軸に関する慣性モーメントを I とすると，剛体の角運動量は

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (\text{G.28})$$

で与えられる．ただし，ベクトル $\vec{\omega}$ は大きさが角速度の大きさ $|\omega|$ に等しく，剛体の回転の方向に右ねじを回したときに右ねじの進む向きと同じ向きのベクトルで**角速度ベクトル**と呼ばれる．

剛体の回転の運動エネルギーの式 (G.14) と角運動量の式 (G.28) を「小さな」物体の運動エネルギーの式 $K = \frac{1}{2}mv^2$ と運動量の式 $\vec{p} = m\vec{v}$ と比べると，

$$m \leftrightarrow I \quad \vec{v} \leftrightarrow \vec{\omega} \quad (\text{G.29})$$

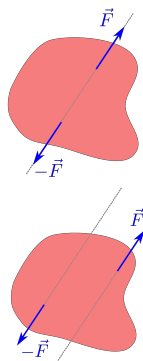
の対応関係があることがわかる．物体の質量は，物体の「動きにくさ」を表す量である．これに対応して，慣性モーメントは，剛体の「回転のしにくさ」を表す量である．

G.4 剛体にはたらく力のつりあい

いままでは剛体の運動状態は変化せず，一定の角速度で回転している場合を考えた．これはちょうど，「小さな」物体が一定の速度で運動している場合に対応して，物体に力がはたらかない場合に相当する．

剛体に力がはたらくときはどうなるのだろうか．この問題を剛体にはたらく力がつりあっているときと，それ以外に分けて考えよう．

「小さな」物体に力がはたらくときには、物体のどこに力がはたらくのかを気にする必要がなかった。しかし、大きさのある物体では、どこに力がはたらくのかが重要になる。力のはたらく位置を作用点という。また、作用点を通り、力のはたらく方向の直線を作用線という。



剛体に複数の力がはたらくとき、そのつりあいの条件も「小さな」物体の場合とは異なってくる。いま、剛体に $\vec{F}$ と $-\vec{F}$ がはたらいているとしよう。力の和はゼロであるが、もしこの 2 つの力が同じ作用線上にはたらかないのであれば、剛体は回転し、(合力はゼロであるのに) つりあってはいない (静止したままではない)。剛体にはたらく力のつりあいでは、「合力がゼロである」という条件だけではなく、さらに条件が必要なのである。

その条件を考えるために、垂直面内に置かれた一様な質量 M の円板を考えよう。その中心には水平に置かれた軸が通してあり、その軸のまわりを摩擦なく回転できるようになっているとする。この円板から静かに手を離すと、そのまま円板は (任意の位置で) 静止したままである。この円板には重力と回転軸からの抗力とがはたらき、それらはつりあっている。重力のベクトル $M\vec{g}$ (鉛直下向き) と軸からの抗力ベクトル $\vec{N}$ (鉛直上向き) のベクトル和はゼロである: $M\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$ 。それだけではない。剛体にはたらく重力の作用点は、剛体の重心とみなせる¹ことに注意しよう。一方、軸からの抗力も円板の中心を作用点としている。それゆえ、重力と軸からの抗力とは同一点を作用点としている。もし回転軸を円板の中心以外のところ通したとすると、円板は任意の位置ではつりあわず、ちょうど円の中心が回転軸の真下になる位置でつりあう。このとき、重力の作用線と抗力の作用線が一致していることに注意しよう。この性質は一般的な場合にも成立する。剛体に 2 つの力がはたらいてつりあうためには、2 つの力の大きさが等しく、向きが逆で、同じ作用線上にあることが必要である。

以下では剛体に 3 つ以上の力がはたらくときのつりあいを考えよう。

¹この節の〈Advanced〉で示す。

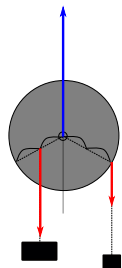
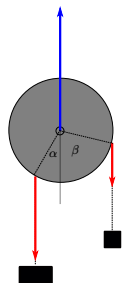
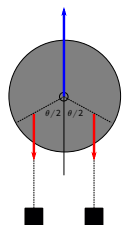
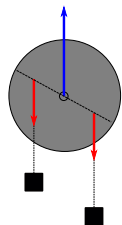
おもりをつけた糸をこの円板に取り付けよう．質量 m の 2 つのおもりを，回転軸（円の中心）から反対の位置につると，この円板はどのような角度でもつりあう．この円板には 4 つの力（円板にはたらく重力 $M\vec{g}$ ，おもりにはたらく重力による力 $m\vec{g}$ が 2 つ，さらに回転軸からの抗力 $-(M + 2m)\vec{g}$ ）がはたらいっている²が，これらは一般に同じ作用線上にはない．つまり，力が同じ作用線上にあるというのは特殊な場合の条件であり，より一般的なつりあいの条件があることが示唆される。

今度は，この 2 つの作用点を，中心からは同じ距離にはあるが，反対の位置ではなく，中心を見込む角が θ ($0 < \theta < \pi$) である位置に取り付けるとどうなるだろうか．反対の位置に取り付けたときは，円板はどの角度でもつりあっていたが，この場合には θ の二等分線が鉛直方向となる位置でのみつりあう．このことは，力の大きさが等しいときつりあいの条件が，回転軸から作用点までの距離によって決まっているのではないことを表している．

それでは，一方のおもりの質量を m から $2m$ に変えたらどうなるだろうか．回転軸からの抗力は $-(M + 3m)\vec{g}$ となる．この場合には，鉛直方向に対して， $\alpha + \beta = \theta$ かつ $2 \sin \alpha = \sin \beta$ を満足するような角度 α と β とをなしてつりあう．

質量が $2m$ のおもりを，質量が m のおもりに比べて，回転軸までの距離が半分になるように取り付けたらどうなるだろうか．このときには θ の二等分線が鉛直方向となる位置でつりあう．

これらをまとめると，（力の大きさ） $\times$ （回転軸から作用線までの距離）が等しいときにつりあうことを示している．このようにして，力のモーメント（トルクとも呼ばれる）の概念に到達する．力のモーメントとは物体にはたらく力の大きさと，回転軸からその力の作用線までの距離の積である．ただ



²円板にはたらく重力 $M\vec{g}$ と軸からの抗力の $-M\vec{g}$ はおもりの取り付け方によらず常につりあっているので，この 2 つの力は以下の考察で重要ではない．図ではこれらの力を除いたものを矢印で示している．

し、回転には「時計回り」、「反時計回り」の2通りがあるので、それを考慮して符号を付すことにする。いまは「反時計回り」を正の向き、「時計回り」を負の向きとしよう。

剛体にはたらく力のつりあいの条件

- 剛体にはたらく力の合力がゼロである。
- 剛体にはたらく力のモーメントの和がゼロである。

2つの力がはたらくときのつりあいの条件(大きさが等しく向きが逆で、同一作用線上にある)は、この一般的なつりあいの条件の特別な場合であることに注意しよう。

物理の目 「やじろべえ」と「てこ」

ここで述べたことは、「やじろべえ」や「てこの原理」などでよく知られていることだろう。てこを考えるときにはふつうまっすぐな棒を考えるので、支点から作用点までの距離が重要だと考えてしまうかも知れないが、正しくは作用線までの距離が問題になることに注意してほしい。また、やじろべえの場合には、左右のおもりが同じであることが多いが、おもりが違っていても、傾いてつりあう。この傾きを決めるのが、左右のおもりにはたらく重力の力のモーメントである。

上の剛体にはたらく力のつりあいの第2条件は、回転軸に関する力のモーメントについて述べているように思うかも知れないが、実際は回転軸に平行などの軸に関する力のモーメントについて考えても同じである³。

〈 **Advanced** 〉ここでは力のモーメントを(力の大きさ) × (回転軸から作用線までの距離)とし、それに適当な符号を付したものとして定義した。より一般的には、回転軸から力 $\vec{F}$ の作用点までの位置ベクトルを $\vec{r}$ (つまりベクトル $\vec{r}_\perp$ は回転軸に垂直なベクトル)として、力のモーメントは

³証明は次の〈 **Advanced** 〉を見よ。

$$\vec{N} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp \quad (\text{G.30})$$

とベクトルの外積を用いて定義される。ただし、 $\vec{F}_\perp$ は力 $\vec{F}$ の軸に垂直な成分である。外積 $\vec{N}$ の大きさは、ベクトル $\vec{r}_\perp$ とベクトル $\vec{F}_\perp$ のなす角を θ とすると $|\vec{N}| = |\vec{r}_\perp| |\vec{F}_\perp| \sin \theta$ で与えられることを思い出そう。ここに現れる $|\vec{r}_\perp| \sin \theta$ が「作用線までの距離」を表している。

また、ここでは作用点までの位置ベクトルを回転軸からと定義しているが、実際は（回転軸に平行な）どの軸から考えてもつりあいの条件は同じになる。 n 個の力 $\vec{F}_i$ ($i = 1, \dots, n$) が位置ベクトル $\vec{r}_i$ の作用点を持つとき、原点のまわりのこれらの力のモーメントの和は

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{\perp i} \times \vec{F}_{\perp i} \quad (\text{G.31})$$

である。もし、回転軸に垂直なベクトル $\vec{a}_\perp$ だけ平行移動した軸のまわりの力のモーメントを考えるのならば、 $\vec{r}_{\perp i} \rightarrow \vec{r}_{\perp i} - \vec{a}_\perp$ と置き換えて、力のモーメントの和は

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{\perp i} - \vec{a}_\perp) \times \vec{F}_{\perp i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{\perp i} \times \vec{F}_{\perp i} - \vec{a}_\perp \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_{\perp i} \right) \quad (\text{G.32})$$

となる。剛体にはたらく力のつりあいの第一条件「剛体にはたらく力の合力はゼロである」から、最後の項はゼロになり、回転軸のまわりの力のモーメントの和と等しくなる。それゆえ、第二条件「剛体にはたらく力のモーメントの和がゼロである」は回転軸に平行などの軸のまわりの力のモーメントを考えてもよいことがわかる。

〈 **Advanced** 〉 剛体にはたらく重力の作用点が重心であることを示そう。これを示すのには、外積を用いた定義式 (G.30) を用いるのが簡単である。

剛体を n 個の小部分に分割して考えよう。それぞれの小部分の質量を m_i ($i = 1, \dots, n$)、位置ベクトルを $\vec{r}_i$ とする。

それぞれの小物体には重力 $m_i \vec{g}$ がはたらく。この重力のモーメントは $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = (m_i \vec{r}_i) \times \vec{g}$ で与えられる。それゆえ、剛体全体にはたらく重力に対しては、これらを加え合わせて、

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M \vec{R} \times \vec{g} = \vec{R} \times (M \vec{g}) \quad (\text{G.33})$$

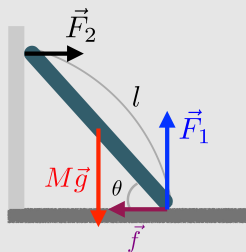
を得る。途中で式 (G.1) を用いた。これは剛体にはたらく重力 $M \vec{g}$ の作用点が重心 $\vec{R}$ であることを表している。

例題 G - 5

質量 M 、長さ L の一様な剛体棒を、滑らかな壁に立てかけた。棒と床とのなす角を θ 、棒と床との静止摩擦係数を μ とする。この棒が滑らずに釣りあっているためには、角度 θ はどの範囲になければならないか。ただし重力加速度の大きさを g とする。

解答

剛体棒は床から垂直抗力 $\vec{F}_1$ と静止摩擦力 $\vec{f}$ を、壁からは垂直抗力 $\vec{F}_2$ を受ける。それぞれの力の作用点は、棒が床に接している点、棒が壁に接している点である。これらの他に、剛体棒にはその重心を作用点として重力 $M\vec{g}$ がはたらく。つりあいのためには、これらの力の合力がゼロでなければならない。



$$\vec{F}_1 + \vec{f} + \vec{F}_2 + M\vec{g} = \vec{0} \quad (\text{G.34})$$

このベクトルの式を、水平方向、鉛直方向の成分に分けて表すと

$$-f + F_2 = 0 \quad (\text{G.35})$$

$$F_1 - Mg = 0 \quad (\text{G.36})$$

と書くことができる。ここで f , F_1 , および F_2 はそれぞれ $\vec{f}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ の大きさである。この他に、それぞれの力のモーメントの和もゼロになっている必要がある。(この計算はどの点に関して行っても同じである。) 剛体棒と床との接点について考えると、反時計回りを正の向きとして、

$$-F_2 L \sin \theta + Mg \frac{L}{2} \cos \theta = 0 \quad (\text{G.37})$$

を得る。式 (G.35) と式 (G.37) から F_2 を消去して、

$$f = \frac{Mg}{2 \tan \theta} \quad (\text{G.38})$$

と摩擦力の大きさが求まる．剛体棒が滑らずにいるためには，この摩擦力が最大静止摩擦力以下でなければならない．

$$f \leq f_{\text{最大}} = \mu F_1 \quad (\text{G.39})$$

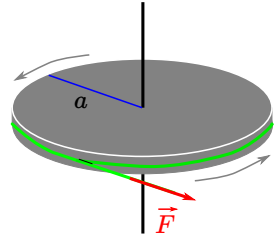
この式に式 (G.36) と式 (G.38) を代入して F_1 と f を消去すると

$$\tan \theta \geq \frac{1}{2\mu} \quad (\text{G.40})$$

を得る．

G.5 回転の運動方程式

質量 M ，半径 a の一様な剛体円板の対称軸を固定された回転軸として，その軸の周りに自由に回転できるようにする．円板の周囲に細くて軽い糸を巻き付け，その糸を円の接線方向に力 $\vec{F}$ で引くことを考えよう．ある時刻で回転の角速度が ω であったとしよう．微小な時間 Δt の間に円板は角度 $\omega \Delta t$ だけ回転する．このとき，引く糸の長さは $a\omega \Delta t$ で与えられる ($\omega < 0$ のときは糸が巻き取られる) ので，力 $\vec{F}$ のする仕事は



$$\Delta W = F a \omega \Delta t \quad (\text{G.41})$$

である．ただし， F は力 $\vec{F}$ の接線方向の成分である．ここで ΔW は角速度 ω の正負，力 $\vec{F}$ の接線方向の成分 F の正負により，正にも負にもなることに注意しよう．

円板の回転の角速度は，力 (より正確には力のモーメント) が加えられたことによって変化する．時間 Δt の間に回転の角速度 ω が微小量 $\Delta \omega$ だけ変化し， $\omega + \Delta \omega$ に変わったとすると，円板の回転の運動エネルギーの変化分 $\Delta K_{\text{回転}}$ は，式 (G.14) から

$$\Delta K_{\text{回転}} = \frac{1}{2} I (\omega + \Delta \omega)^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 \approx I \omega \Delta \omega \quad (\text{G.42})$$

で与えられる．ここで I は剛体の慣性モーメントで，円板に対しては $I = Ma^2/4$ である． $|\Delta\omega|^2$ は $|\omega\Delta\omega|$ と比べて小さいので無視した．

力 $\vec{F}$ のした仕事 ΔW は，剛体の回転の運動エネルギーの増加 $\Delta K_{\text{回転}}$ に等しい．

$$F a \omega \Delta t = I \omega \Delta \omega \quad (\text{G.43})$$

この両辺を $\omega \Delta t$ で割って， $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \quad (\text{G.44})$$

を得る．ここで右辺の N は，力のモーメント $N = Fa$ を表している．これが剛体の固定軸のまわりの回転を支配する**回転の運動方程式**である．力のモーメントの符号の正負が，それぞれ角速度の増加率，減少率に対応していることに注意しよう．

ここでは力のモーメントがわかりやすいように，剛体として円板を考えたが，剛体に力のモーメントが加わり剛体の回転の角速度が変化するというのは，剛体の形に関係なく，固定された軸のまわりに回転できる剛体にとって一般的な関係である．

〈 **Advanced** 〉一般に，剛体が固定した軸の周りに慣性モーメント I で回転するとき，この軸に関して力のモーメント $\vec{N}$ が加えられたとすると，剛体の回転の運動方程式はベクトルの式として

$$I \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{N} \quad (\text{G.45})$$

で与えられる．角運動量は $\vec{L} = I\vec{\omega}$ で与えられるので，この式は

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{N} \quad (\text{G.46})$$

と書くこともできる．

対応関係 (G.29) を思い出すと，回転の運動方程式は対応関係

$$N \leftrightarrow F \quad (\text{G.47})$$

の下で，(1次元の) 並進運動の運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (\text{G.48})$$

に対応していることがわかる。

例題 G - 6

質量 M 、長さ l の細くて一様な棒の端から $l/6$ の位置に、棒と垂直に回転軸を取り付け、水平方向に置いた。この棒を少し傾けてから手を離すと、棒は周期的に振動した。重力加速度の大きさを g として、この振動の周期を求めよ。

解答

これは物理振り子の例である。慣性モーメントは例題 G - 4 で求めたように、 $I = (7/36)Ml^2$ である。棒の鉛直方向に対する傾きの角度を ϕ とすると、回転の運動方程式 (G.44) は

$$I\ddot{\phi} = -\frac{l}{3}Mg \sin \phi \quad (\text{G.49})$$

となる。(剛体の回転軸には、剛体を支える力がはたらくが、回転軸からの距離がゼロなので、力のモーメントはゼロとなり、回転の運動方程式には現れない。)

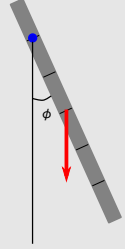
振れ角 ϕ が小さいとき、 $\sin \phi \approx \phi$ と近似してよいので、

$$\ddot{\phi} = -\frac{Mgl}{3I}\phi = -\frac{12}{7}\frac{g}{l}\phi \quad (\text{G.50})$$

を得る。これは $\omega = 2\sqrt{3g/7l}$ としたときの振動の方程式 (2.14) の形をしている。よってその周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{7l}{3g}} \quad (\text{G.51})$$

であることがわかる。



物理振り子の一般的な式は、回転軸のまわりの慣性モーメントを I' 、回転軸から剛体の重心までの距離を h とすると、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{Mgh}} \quad (\text{G.52})$$

である．普通の振り子，つまり，質量が無視できるほど軽い棒の回転軸から l だけ離れたところに，質量 m のおもりをつけて振動させる場合， $I' \rightarrow ml^2$ ， $M \rightarrow m$ ， $h \rightarrow l$ として

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{G.53})$$

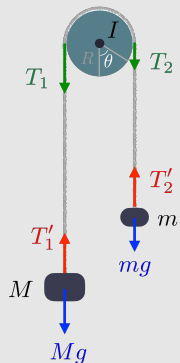
となり，式 (4.82) を再現する．

例題 G - 7

半径が R で中心軸に関する慣性モーメントが I の滑車が，その中心軸のまわりに自由に回転できるようにして鉛直面に固定されている．この滑車に，単位長さあたりの質量が λ で，長さが L のひもをかけ，その両端に質量がそれぞれ M および m ($M > m$) のおもりを付けて，はじめ2つのおもりが同じ高さになる位置に支えておいた．ひもと滑車は滑らないとする．時刻 $t = 0$ で2つのおもりの支えを静かに外した．この系の運動を，滑車の回転角度 $\theta(t)$ ($\theta(0) = 0$) を求めることにより決定せよ．ただし L は R に比べて十分長いとして，おもりの一方が滑車にぶつかる前の運動を考えよ．滑車の回転に際して，軸との摩擦はないとする．

解答

滑車の回転の運動，質量を持ったひもの運動，および2つの重りの運動を考える必要がある．図のように，ひもの両端における張力の大きさを T_1 , T_2 , T'_1 , T'_2 とする．(図には滑車にはたらく力，およびおもりに はたらく力として矢印を描いている．ひもにはたらく力は，作用・反作用の法則から，これらとは逆向きである．) 滑車，およびひもの滑車にかかっている部分の回転の運動方程式は式 (G.44) および $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ から



$$(I + (\lambda\pi R)R^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = (T_1 - T_2)R \quad (\text{G.54})$$

与えられる． $(\lambda\pi R)R^2$ はひもの滑車にかかっている部分の慣性モーメントである．

次にひもの運動方程式を考えよう．滑車が角度 θ だけ回転した時，図の左側のひもの長さは $(L - \pi R)/2 + R\theta$ ，右側のひもの長さは $(L - \pi R)/2 - R\theta$ で与えられる．ひもの加速度の大きさは両方とも $R \frac{d^2\theta}{dt^2}$ で与えられるので，ひもの運動方程式は

$$\lambda \left(\frac{L - \pi R}{2} + R\theta \right) R \frac{d^2\theta}{dt^2} = T'_1 - T_1 \quad (\text{G.55})$$

$$\lambda \left(\frac{L - \pi R}{2} - R\theta \right) R \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_2 - T'_2 \quad (\text{G.56})$$

である．

最後におもりの運動方程式を考えよう．おもりには重力と，ひもからの張力がはたらく．おもりの加速度も $R \frac{d^2\theta}{dt^2}$ で与えられるので，運動方程式は

$$MR \frac{d^2\theta}{dt^2} = Mg - T'_1 \quad (\text{G.57})$$

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = T'_2 - mg \quad (\text{G.58})$$

となる．

これらは複雑に見えるが，組み合わせ (G.54)/ R + (G.55) + (G.56) + (G.57) + (G.58) を考えると，張力は全て消えて

$$\left[\frac{I}{R^2} + \lambda L + M + m \right] R \frac{d^2\theta}{dt^2} = (M - m)g \quad (\text{G.59})$$

という単純な方程式が得られる．この微分方程式は簡単に積分できて，

$$\theta(t) = A + Bt + \frac{(M - m)gt^2}{2R \left[\frac{I}{R^2} + \lambda L + M + m \right]} \quad (\text{G.60})$$

を得る．ただし， A ， B は積分定数である．初期条件 $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ より，

$A = B = 0$ であることがわかる．以上より，

$$\theta(t) = \frac{(M - m)gt^2}{2R \left[\frac{I}{R^2} + \lambda L + M + m \right]} \quad (\text{G.61})$$

を得る．

滑車の質量，ひもの質量が無視できるとき， $I = 0$ ， $\lambda = 0$ であるから，式 (G.54) および式 (G.55)，(G.56) から $T_1 = T_2 = T'_1 = T'_2$ となる．すなわち，滑車の両側の張力は等しく，ひもの両端の張力も等しい．このとき

$$\theta(t) = \frac{(M - m)gt^2}{2R(M + m)} \quad (\text{G.62})$$

となる．これはおもりの移動距離 $x(t)$ で表わすと

$$x(t) = R\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{M - m}{M + m} gt^2 \quad (\text{G.63})$$

である．

G.6 力学的エネルギー保存則

剛体にはたらく力が保存力であるならば，剛体の回転の運動エネルギーと保存力のポテンシャルエネルギーの和は保存する．ここでは具体的に例題 G - 6 の力学的エネルギーを考えてみよう．

触れ角が $\phi(t)$ であるときの棒の角速度は $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ で与えられるので，剛体棒の回転の運動エネルギー $K_{\text{回転}}$ は

$$K_{\text{回転}} = \frac{1}{2} I (\dot{\phi})^2 \quad (\text{G.64})$$

である．

一方，棒の重力によるポテンシャルエネルギーは，回転軸の高さを基準点とすると，重心の位置は $(l/3) \cos \phi(t)$ だけ低い位置にあるので

$$U_{\text{重力}} = -\frac{l}{3} Mg \cos \phi \quad (\text{G.65})$$

で与えられる.

以上より, この系の力学的エネルギーは

$$E = K_{\text{回転}} + U_{\text{重力}} \quad (\text{G.66})$$

となる. これが保存することを示そう. まず式 (1.20) を用いて

$$\frac{d}{dt}K_{\text{回転}} = I\dot{\phi}\ddot{\phi} \quad (\text{G.67})$$

を得る. また, 式 (1.39) を用いて

$$\frac{d}{dt}U_{\text{重力}} = \frac{l}{3}Mg \sin \phi \dot{\phi} \quad (\text{G.68})$$

を得る. ゆえに

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\phi} \left(I\ddot{\phi} + \frac{l}{3}Mg \sin \phi \right) = 0 \quad (\text{G.69})$$

を得る. ただし, 回転運動の方程式 (G.49) を用いた. この式は力学的エネルギー保存則を表している.

[注意!] 式 (G.65) で用いたように, 剛体の重力によるポテンシャルエネルギーは, 重心にすべての質量があるとしたものに等しい. これを示すには, 剛体を n 個の小物体に分割して, それぞれの小物体の重力によるポテンシャルエネルギーを加え合わせればよい. それぞれの小物体の質量を m_i , 基準点からの高さ (z 方向を鉛直上向きにとる) を z_i とすると, 剛体全体の重力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{重力}}$ は

$$U_{\text{重力}} = \sum_{i=1}^n m_i g z_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i z_i \right) g \quad (\text{G.70})$$

で与えられる. ここで $(\dots)$ は重心の位置ベクトル $\vec{R}$ の z 成分 $R_z = (1/M) \sum_{i=1}^n m_i z_i$ を用いて $M R_z$ と表される. それゆえ

$$U_{\text{重力}} = M g R_z \quad (\text{G.71})$$

を得る. これは重心の位置に剛体全体の質量 M があるとしたときの重力によるポテンシャルエネルギーである.

演習 G.1 二人のひとが向かい合って一方が野球のバットの太い方を握り、
他方が細い方を握って、互いに逆向きにバットを回転させようとする
と、太い方を握っている人のほうが有利である。それはなぜか。

演習 G.2 質量が M で半径が a の一様な球の、中心を通る回転軸に関する
慣性モーメントを求めよ。

演習 G.3 質量が M で、1 辺の長さが a, b , および c の直方体の、重心を
通り、辺に平行な軸 (3 通りある) に関する慣性モーメントを求めよ。

演習 G.4 地球の公転による重心の運動の運動エネルギーと、自転による
回転運動の運動エネルギーを比べよ。ただし、地球と太陽との距離を
 $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, 地球を半径 $R_{\oplus} = 6.36 \times 10^6 \text{ m}$ の一様な剛体球とみ
なして考えよ。

演習 G.5 〈 Advanced 〉 例題 G - 7 では、力学的エネルギーが保存する。
このことを、滑車、ひも、およびおもりのそれぞれのエネルギーを考える
ことによりあらわに示せ。

第 G 章演習問題解答

演習 G.1 バットという剛体にはたらく力のモーメントを考えればよい。バットは軸対称な剛体であり、バットを握ってこの軸のまわりに回転させようとしている人は、この軸に関する力のモーメントを加えている。力の大きさを F 、その人が握っているところの半径を r とすると、その人が加える力のモーメントの大きさは $N = rF$ で与えられる。同じ力の大きさでも、半径が大きいほうが力のモーメントが大きい。あるいは同じことだが、同じ力のモーメントを与えるには、加える力の大きさは、握っているところの半径に反比例する。それゆえ、太いところを握っている人のほうが、比較的小さな力でバットを回すことができるので有利である。

演習 G.2 半径 a の球の体積は $4\pi a^3/3$ で与えられるので、質量が M 、半径が a の一様な球の密度は $\rho = 3M/(4\pi a^3)$ で与えられる。

球の中心を原点とし、 z 軸に平行な平面でスライスした、微小な厚み Δz の円板の集まりと考えよう。 z と $z + \Delta z$ の間にはさまれた部分は半径が $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ で厚みが Δz の円板で、その質量は $\rho \times \pi r^2 \Delta z$ で与えられる。それゆえ、この円板の慣性モーメントは式 (G.17) を用いて

$$\Delta I = \frac{1}{2}(\rho \pi r^2 \Delta z) r^2 = \frac{3M}{8a^3}(a^2 - z^2)^2 \Delta z \quad (\text{A.1})$$

である。これらを積み重ねて球の慣性モーメントを得ることができる。

$$I_{\text{球}} = \frac{3M}{8a^3} \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{5} Ma^2 \quad (\text{A.2})$$

演習 G.3 x 軸方向の辺の長さを a 、 y 軸方向の辺の長さを b 、 z 軸方向の辺の長さを c として、重心の位置を原点ととり、 z 軸に関する慣性モーメント I_z を求めてみよう。まず、この直方体を z 軸に垂直な面でスライスすることを考えよう。このとき、厚み Δz の、断面が $a \times b$ の長方形の物体の z 軸に関する慣性モーメントを考えよう。この長方形をさらに Δx 、 Δy ずつ区切って考えると、1 辺の長さが Δx 、 Δy 、 Δz の直方体の集まりと考えることができる。十分細かくスライスして考えれば、それぞれの直方体は十分小さくとることができる。いま、 z 軸から距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ のところにある直方体を考えよう。慣性モーメント I_z にはこの直方体から

$$\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{abc} M(x^2 + y^2) \quad (\text{A.3})$$

の寄与がある。厚み Δz の長方形全体では

$$\begin{aligned} \Delta I_z &= \frac{\Delta z}{abc} M \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (x^2 + y^2) \\ &= \frac{\Delta z}{abc} M \frac{1}{12} (a^3 b + ab^3) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)\frac{\Delta z}{c} \quad (\text{A.4})$$

となる．これを積み重ねれば直方体全体の慣性モーメントが得られる．

$$I_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{dz}{c} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \quad (\text{A.5})$$

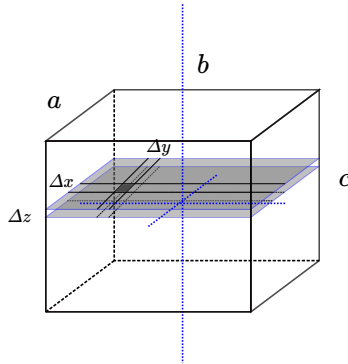
同様に,

$$I_x = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2) \quad (\text{A.6})$$

$$I_y = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2) \quad (\text{A.7})$$

を得る．

例えば, M を固定したまま $a = l$ とし, $b \rightarrow 0$, $c \rightarrow 0$ の極限をとると, $I_z = (1/12)Ml^2$ となり, 式 (G.20) で求めた細い様な棒の慣性モーメントが求まる．



演習 G.4 地球の質量を $M_{\oplus}$, 地球と太陽との距離を R , 地球の半径を $R_{\oplus}$, 地球の公転の角速度を Ω , 地球の自転の角速度を ω とすると, 公転による重心運動の運動エネルギー $K_{\text{公転}}$ は

$$K_{\text{公転}} = \frac{1}{2}M_{\oplus}(R\Omega)^2 \quad (\text{A.8})$$

であり, 自転による回転の運動エネルギー $K_{\text{自転}}$ は

$$K_{\text{自転}} = \frac{1}{2}I_{\text{球}}\omega^2 = \frac{1}{5}M_{\oplus}(R_{\oplus}\omega)^2 \quad (\text{A.9})$$

となる．途中で一様な球に対する慣性モーメントの式 (A.2) を用いた．これらの比は

$$\frac{K_{\text{自転}}}{K_{\text{公転}}} = \frac{2}{5} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

である．自転の角速度は $\omega = 2\pi/\text{日}$ ，公転の角速度は $\Omega = 2\pi/365 \text{ 日}$ であることを用いると，

$$\frac{K_{\text{自転}}}{K_{\text{公転}}} = \frac{2}{5} \left(\frac{6.36 \times 10^6}{1.5 \times 10^{11}} \right)^2 (365)^2 = 9.6 \times 10^{-5} \quad (\text{A.11})$$

を得る．公転の運動エネルギーに比べて，自転の運動エネルギーは無視できるほど小さいことがわかる．

演習 G.5 滑車が角度 $\theta(t)$ だけ回転したときを考えよう．表式を簡素にするため

$$\kappa \equiv \frac{(M - m)}{\left[\frac{I}{R^2} + \lambda L + M + m \right]} \quad (\text{A.12})$$

と置こう．式 (G.61) は

$$\theta(t) = \frac{\kappa}{2R} g t^2 \quad (\text{A.13})$$

と表される．

このときの滑車の回転の運動エネルギー $K_{\text{回転}}(t)$ は

$$K_{\text{回転}}(t) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2(t) = \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} (\kappa g t)^2 \quad (\text{A.14})$$

与えられる．

次にひもの運動エネルギーを考えよう．ひもは速さ $R\dot{\theta}(t)$ で運動しているので，その運動エネルギー $K_{\text{ひも}}(t)$ は

$$K_{\text{ひも}}(t) = \frac{1}{2} \lambda L (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \lambda L (\kappa g t)^2 \quad (\text{A.15})$$

となる．

おもりは2つとも速さ $R\dot{\theta}(t)$ で運動しているので，その運動エネルギー $K_{\text{おもり}}(t)$ は

$$K_{\text{おもり}}(t) = \frac{1}{2} (M + m) (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (M + m) (\kappa g t)^2 \quad (\text{A.16})$$

である．

以上より，滑車，ひも，およびおもりの運動エネルギーの和 $K_{\text{全}}(t)$ は

$$K_{\text{全}}(t) = K_{\text{回転}}(t) + K_{\text{ひも}}(t) + K_{\text{おもり}}(t) = \frac{1}{2} \kappa (M - m) (g t)^2 \quad (\text{A.17})$$

となる．

次に，重力によるポテンシャルエネルギーを考えよう．ポテンシャルエネルギーの基準点を， $t = 0$ の，系が静止していたときのポテンシャルエネルギーをゼロにするように取ると便利である．そうすると $t = 0$ の系の全力学的エネルギーはゼロになる．

滑車は上下方向に移動しないので、滑車のポテンシャルエネルギー (の変化分) $V_{\text{滑車}}(t)$ は

$$V_{\text{滑車}}(t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

である.

ひもは片方が $R\theta(t)$ だけはじめの位置より下に下がり, 他方は $R\theta(t)$ だけはじめの位置より上に上がっている. それゆえ, ひものポテンシャルエネルギー (の変化分) $V_{\text{ひも}}(t)$ は

$$V_{\text{ひも}}(t) = \int_{-R\theta(t)}^{R\theta(t)} (\lambda dz)gz = 0 \quad (\text{A.19})$$

となる. つまり, ひものポテンシャルエネルギーは変化しない.

質量 M のおもりは $R\theta(t)$ だけ下がり, 質量 m のおもりは $R\theta(t)$ だけ上がるので, おもりのポテンシャルエネルギー (の変化分) $V_{\text{おもり}}(t)$ は

$$V_{\text{おもり}}(t) = (m - M)gR\theta(t) = -\frac{1}{2}\kappa(M - m)(gt)^2 \quad (\text{A.20})$$

で与えられる.

以上より, 全ポテンシャルエネルギー (の変化分) $V_{\text{全}}(t)$ は

$$V_{\text{全}}(t) = V_{\text{滑車}}(t) + V_{\text{ひも}}(t) + V_{\text{おもり}}(t) = -\frac{1}{2}\kappa(M - m)(gt)^2 \quad (\text{A.21})$$

となる.

以上より, 全力学的エネルギー $E_{\text{全}}(t)$ は

$$E_{\text{全}}(t) = K_{\text{全}}(t) + V_{\text{全}}(t) = 0 \quad (\text{A.22})$$

となる. すなわち, 全力学的エネルギーは保存する.