現代の数学への道　集合と位相

遠藤 久顕

2020 年 11 月 20 日

第1章
集 合 と 写 像

演 習 問 題

演習 1　X を集合とし，A, B を X の部分集合とする．また，X に関する A, B の補集合をそれぞれ A^c, B^c とする．次の (1)〜(8) が同値であることを示せ．

(1) $A \subset B$　(2) $A^c \supset B^c$　(3) $A \cup B = B$　(4) $A \cap B = A$

(5) $A^c \cup B = X$　(6) $A \cap B^c = \varnothing$　(7) $A^c \cup B^c = A^c$　(8) $A^c \cap B^c = B^c$

演習 2　A, B, C を集合とする．次の (1)〜(8) が成り立つことを示せ．

(1) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(3) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(4) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

(5) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(6) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

(7) $A \cup (B - C) \supset (A \cup B) - (A \cup C)$

(8) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

演習 3　A, B, C を集合とする．集合

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

を A と B の**対称差**という．次の (1)〜(6) が成り立つことを示せ．

(1) $A \triangle A = \varnothing,\ A \triangle \varnothing = A$

(2) $A \triangle B = B \triangle A$

(3) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(4) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

(5) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(6) $A \cup (B \triangle C) \supset (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

演習 4　A, B を集合とする．$A \triangle C = B$ をみたす集合 C を A と B を用いて表せ．

演習 5　X を集合とする．X と X の直積 $X \times X$ の部分集合

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

を $X \times X$ の**対角集合**という．X の部分集合 A, B に対し，$A \cap B = \varnothing$ であるための必要十分条件は，$(A \times B) \cap \Delta_X = \varnothing$ であることを示せ．

演習 6　X, Y を集合とし，A, B をそれぞれ X, Y の部分集合とする．このとき，

$$(X \times Y) - (A \times B) = ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B))$$

が成り立つことを示せ．

演習 7　A, B, C, D を集合とする．次の (1)，(2) が成り立つことを示せ．
(1) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$
(2) $(A \times C) \cup (B \times D) = ((A - B) \times C) \cup ((A \cap B) \times (C \cup D)) \cup ((B - A) \times D)$

演習 8　X, Y を集合，A, B をそれぞれ X, Y の部分集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．次の (1)〜(3) が成り立つことを示せ．
(1) $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$
(2) $f(A) = \mathrm{pr}_2(\Gamma_f \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(A))$
(3) $f^{-1}(B) = \mathrm{pr}_1(\Gamma_f \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(B))$
ただし，Γ_f は f のグラフであり，$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ はそれぞれ第 1 成分，第 2 成分への射影である．

演習 9　$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(B_\mu)_{\mu \in M}$ をそれぞれ Λ, M で添字づけられた集合族とする．次の (1)〜(4) が成り立つことを示せ．
(1) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$
(2) $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$
(3) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \times (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) \supset \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \times B_\mu)$
(4) $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \times (\bigcap_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} (A_\lambda \times B_\mu)$

演習 10　$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{N}$ で添字づけられた集合族とする．$\mathbb{N}(1) = \mathbb{N}$ とし，2 以上の自然数 n に対し $\mathbb{N}(n) = \mathbb{N} - \{1, \ldots, n-1\}$ とする．このとき，

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}(n)} A_m \right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}(n)} A_m \right)$$

が成り立つことを示せ．

演習 11　X, Y, Z を集合とし，$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．次の (1), (2) が同値であることを示せ．

(1) g が単射であり，かつ $g \circ f$ が全射である．

(2) f が全射であり，かつ g が全単射である．

演習 12　X, Y, Z を集合とし，$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．次の (1), (2) が同値であることを示せ．

(1) f が全射であり，かつ $g \circ f$ が単射である．

(2) g が単射であり，かつ f が全単射である．

演習 13　X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．f が全射であるための必要十分条件は，任意の集合 Z と任意の写像 $g_1, g_2 : Y \to Z$ に対し $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ となることである．これを示せ．

演習 14　Y, Z を集合とし，$g : Y \to Z$ を写像とする．g が単射であるための必要十分条件は，任意の集合 X と任意の写像 $f_1, f_2 : X \to Y$ に対し $g \circ f_1 = g \circ f_2$ ならば $f_1 = f_2$ となることである．これを示せ．

演習 15　X_1, X_2 を集合とする．任意の集合 X と任意の写像 $f_1 : X \to X_1$, $f_2 : X \to X_2$ に対し，$\mathrm{pr}_1 \circ f = f_1$, $\mathrm{pr}_2 \circ f = f_2$ をみたす写像 $f : X \to X_1 \times X_2$ が存在することを示せ．また，そのような f はただひとつであることを示せ．ただし，$\mathrm{pr}_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $\mathrm{pr}_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ はそれぞれ第 1 成分，第 2 成分への射影である．

演習 16　X_1, X_2 を集合とし，$X_1 \cap X_2 = \varnothing$ とする．任意の集合 X と任意の写像 $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ に対し，$f \circ i_1 = f_1$, $f \circ i_2 = f_2$ をみたす写像 $f : X_1 \cup X_2 \to X$ が存在することを示せ．また，そのような f はただひとつであることを示せ．ただし，$i_1 : X_1 \to X_1 \cup X_2$, $i_2 : X_2 \to X_1 \cup X_2$ はいずれも包含写像である．

第 2 章

濃度と二項関係

演 習 問 題

演習 1　X, Y を集合とし，$Y \neq \varnothing$ とする．このとき，$\#(X \times Y) \geqq \#X$ が成り立つことを示せ．

演習 2　$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ で添字づけられた集合族とする．Λ の任意の元 λ に対し $A_\lambda \neq \varnothing$ であるとする．また，Λ の元 λ, μ に対し $\lambda \neq \mu$ ならば $A_\lambda \cap A_\mu = \varnothing$ とする．このとき，$\# \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \geqq \#\Lambda$ であることを示せ．

演習 3　X を可算集合とし，A を X の部分集合とする．A が無限集合ならば，A は可算集合であることを示せ．

演習 4　x を実数とする．ある自然数 n に対し，$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ かつ $a_n \neq 0$ をみたす整数 $a_0, \ldots, a_n$ が存在するとき，x を**代数的数**という．代数的数全体の集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ が可算集合であることを示せ．

演習 5　$\mathcal{I}$ を $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の部分集合とし，次の (1), (2) をみたすとする．
(1) $\mathcal{I}$ の任意の元は $\mathbb{R}$ の開区間である．
(2) $\mathcal{I}$ の元 I_1, I_2 に対し，$I_1 \neq I_2$ ならば $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ である．
このとき，$\#\mathcal{I} \leqq \aleph_0$ であることを示せ．

演習 6　X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．R を X 上の同値関係とし，$\pi : X \to X/R$ を自然な全射とする．$g \circ \pi = f$ をみたす写像 $g : X/R \to Y$ が存在するための必要十分条件は，X の任意の元 x, x' に対し $x \sim_R x'$ ならば $f(x) = f(x')$ が成り立つことである．これを示せ．

演習 7　$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ とする．このとき，

$$R = \{((m, n), (m', n')) \in X \times X \mid mn' = m'n\}$$

が X 上の同値関係であることを示せ．（R に関する (m, n) の同値類 $[m, n]_R$ は有理

数 m/n を表し，X の R による商集合 X/R は $\mathbb{Q}$ を表す.）

演習 8　X を集合とする．X 上の二項関係 R, S に対し，

$$R^{-1} = \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in R\}$$
$$R \circ S = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists z \in X((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S)\}$$

とする．$R_0 = \Delta_X$ とし，自然数 n に対し $R_n = R_{n-1} \circ (R \cup R^{-1})$ と定めることにより，$X \times X$ の部分集合族 $(R_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ を帰納的に定義する．次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

(1) $R^* = \bigcup_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} R_n$ は X 上の同値関係である.

(2) $R \subset S$ をみたす X 上の任意の同値関係 S に対し，$R^* \subset S$ である.

（R^* を R によって生成される X 上の同値関係という.）

演習 9　$\mathbb{R}$ および開区間 $(0,1)$ を通常の大小関係によって順序集合と考える．$\mathbb{R}$ と $(0,1)$ が順序同型であることを示せ.

演習 10　A を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，通常の大小関係によって順序集合と考える．A が整列集合ならば，A は高々可算集合であることを示せ.

演習 11　X を有限集合とし，R を X 上の順序とする．(X,R) が整列集合ならば，ある自然数 n が存在し，(X,R) と $\{1,\ldots,n\}$ は順序同型である．これを示せ．ただし，$\{1,\ldots,n\}$ を通常の大小関係によって順序集合と考える.

演習 12　$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ で添字づけられた集合族とする．Λ の任意の元 λ に対し，写像 $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ が与えられているとする．$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の元 f に対し $((\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda)(f))(\mu) = f_\mu(f(\mu))\,(\mu \in \Lambda)$ と定めることにより，写像 $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ を定義する．$\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ を $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積**という．次の (1), (2) が成り立つことを示せ.

(1) $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ が全射であるための必要十分条件は，Λ の任意の元 λ に対し f_λ が全射であることである.

(2) $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ が単射であるための必要十分条件は，Λ の任意の元 λ に対し f_λ が単射であることである.

第3章
距　離　空　間

演 習 問 題

演習 1　p を素数とする．$\mathbb{Q}-\{0\}$ の元 r に対し，p と互いに素な $\mathbb{Z}-\{0\}$ の元 a, b と整数 e が存在し，$r = p^e a/b$ が成り立つ．このとき，$v_p(r) = e$ とする．また，$v_p(0) = 0$ と定める．有理数 r, s に対し

$$d_p(r, s) = p^{-v_p(r-s)}$$

と定めることにより，写像 $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を定義する．このとき，d_p が $\mathbb{Q}$ 上の距離関数であることを示せ．（d_p を $\boldsymbol{p}$ **進距離**という．）

演習 2　(X, d) を距離空間，a を X の点とし，ε を正の実数とする．このとき，$U(a; \varepsilon) \subsetneqq \{x \in X \mid d(x, a) \leqq \varepsilon\}$ をみたす (X, d), a, ε を具体的に例示せよ．

演習 3　(X, d_X) を離散距離空間とし，(Y, d_Y) を距離空間とする．このとき，任意の写像 $f : X \to Y$ は (X, d_X) から (Y, d_Y) への連続写像であることを示せ．

演習 4　$I = [0, 1]$ とし，I 上の実数値連続関数全体の集合を $C(I)$ とする．$C(I)$ の元 f に対し

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

と定めることにより，写像 $T : C(I) \to \mathbb{R}$ を定義する．このとき，T が例題**??**の距離空間 $(C(I), d_1)$ から $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ への連続写像であることを示せ．

演習 5　$I = [0, 1]$ とし，I 上の実数値連続関数全体の集合を $C(I)$ とする．$C(I)$ 上の恒等写像 $1_{C(I)} : C(I) \to C(I)$ が問題**??**の距離空間 $(C(I), d_\infty)$ から例題**??**の距離空間 $(C(I), d_1)$ への連続写像であることを示せ．

演習 6　(X, d) を距離空間とし，$A_1, \ldots, A_n$ を X の空でない部分集合とする．$A_1, \ldots, A_n$ が有界ならば $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ も有界であることを示せ．

演習 7　(X,d) を距離空間とし，A を X の空でない部分集合とする．A が有界であるとき，$\delta(A)=\delta(A^a)$ が成り立つことを示せ．

演習 8　(X_0,d_0) を距離空間とし，(X,d) を (X_0,d_0) と (X_0,d_0) の直積距離空間とする．このとき，$d: X_0\times X_0\to\mathbb{R}$ が (X,d) から $(\mathbb{R},d^{(1)})$ への連続写像であることを示せ．

演習 9　m を 2 以上の整数とする．$(X_1,d_1),\dots,(X_m,d_m)$ を距離空間とし，(X,d) を $(X_1,d_1),\dots,(X_m,d_m)$ の直積距離空間とする．$(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列とし，a を X の点とする．自然数 n に対し $a^{(n)}=(a_1^{(n)}\dots,a_m^{(n)})$ とし，$a=(a_1,\dots,a_m)$ とする．このとき，$(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するための必要十分条件は，$\{1,\dots,m\}$ の任意の元 k に対し $(a_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が a_k に収束することである．これを示せ．

演習 10　(X,d) を距離空間とする．A を X の空でない部分集合とし，a を X の点とする．a が A の内点であるための必要十分条件は，a に収束する X の任意の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，ある自然数 N が存在し，$n>N$ をみたす任意の自然数 n に対し $a_n\in A$ が成り立つことである．これを示せ．

第4章
位　相　空　間

演習問題

演習 1　X を無限集合とする．$\mathcal{P}(X)$ の部分集合

$$\mathcal{O} = \{\varnothing\} \cup \{X - A \mid A \in \mathcal{P}(X),\ \#A < \aleph_0\}$$

が X の位相であることを示せ．

演習 2　X を集合とし，$(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{P}(X)$ の部分集合族とする．Λ の任意の元 λ に対し $\mathcal{O}_\lambda$ が X の位相ならば，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ も X の位相であることを示せ．

演習 3　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．次の (1)，(2) が成り立つことを示せ．

(1) $(((A^a)^i)^a)^i = (A^a)^i$

(2) $(((A^i)^a)^i)^a = (A^i)^a$

演習 4　X を集合とし，$i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を写像とする．i が次の (1)〜(4) をみたすとする．

(1) X の任意の部分集合 A に対し，$i(A) \subset A$ である．

(2) $i(X) = X$

(3) X の任意の部分集合 A, B に対し，$i(A\cap B) = i(A)\cap i(B)$ である．

(4) X の任意の部分集合 A に対し，$i(i(A)) \subset i(A)$ である．

このとき，X の位相 $\mathcal{O}$ であって，i が $(X, \mathcal{O})$ の開核作用子であるものがただひとつ存在することを示せ．

演習 5　X を集合とし，$a : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を写像とする．a が次の (1)〜(4) をみたすとする．

(1) X の任意の部分集合 A に対し，$A \subset a(A)$ である．

(2) $a(\varnothing) = \varnothing$

(3) X の任意の部分集合 A, B に対し，$a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$ である．
(4) X の任意の部分集合 A に対し，$a(a(A)) \subset a(A)$ である．
このとき，X の位相 $\mathcal{O}$ であって，i が $(X, \mathcal{O})$ の閉包作用子であるものがただひとつ存在することを示せ．

演習 6　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{P}(X)$ の部分集合とする．X の任意の点 x に対し，$\#\{A \in \mathcal{A} \,|\, A \cap U \neq \varnothing\} < \aleph_0$ をみたす $\mathcal{N}(x)$ の元 U が存在するとき，$\mathcal{A}$ は**局所有限**であるという．$\mathcal{A}$ が局所有限であり，$\mathcal{A}$ の任意の元が $(X, \mathcal{O})$ の閉集合であるとき，$\bigcup \mathcal{A}$ も $(X, \mathcal{O})$ の閉集合であることを示せ．

演習 7　$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．次の (1)〜(4) が同値であることを示せ．
(1) f は $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像である．
(2) X の任意の部分集合 A に対し，$f(A^a) \subset f(A)^a$ が成り立つ．
(3) Y の任意の部分集合 B に対し，$f^{-1}(B^i) \subset f^{-1}(B)^i$ が成り立つ．
(4) Y の任意の部分集合 B に対し，$f^{-1}(B)^a \subset f^{-1}(B^a)$ が成り立つ．

演習 8　$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の通常の位相とする．$\mathcal{O}$ から定まる $\mathbb{Z}$ の相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$ が離散位相であることを示せ．

演習 9　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．$\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から定まる A の相対位相とし，B を A の部分集合とする．このとき，$(A, \mathcal{O}_A)$ における B の閉包が $B^a \cap A$ に等しいことを示せ．

演習 10　(X, R) を全順序集合とする．X の元 a, b に対し，$I_a = \{x \in X \,|\, a <_R x\}$, $J_b = \{x \in X \,|\, x <_R b\}$ とする．$\mathcal{P}(X)$ の部分集合

$$\mathcal{S} = \{I_a \,|\, a \in X\} \cup \{J_b \,|\, b \in X\}$$

によって生成される位相を，R から定まる X の**順序位相**という．A を X の部分集合とし，$\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から定まる A の相対位相とする．このとき，A 上の全順序 $R \cap (A \times A)$ から定まる A の順序位相が $\mathcal{O}_A$ より小さいことを示せ．

演習 11　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．$\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から定まる A の相対位相とし，B を A の部分集合とする．次の (1), (2) が成り立つことを示せ．
(1) $(A, \mathcal{O}_A)$ における B の内部は B^i を含む．
(2) A の任意の部分集合 B に対し $(A, \mathcal{O}_A)$ における B の内部が B^i に等しいための

必要十分条件は，$B \in \mathcal{O}$ であることである．

演習 12　$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への開写像であるための必要十分条件は，$\mathcal{P}(X)$ の任意の元 A に対し $f(A^i) \subset f(A)^i$ が成り立つことである．これを示せ．

演習 13　$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への閉写像であるための必要十分条件は，$\mathcal{P}(X)$ の任意の元 A に対し $f(A^a) \supset f(A)^a$ が成り立つことである．これを示せ．

演習 14　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の通常の位相とする．f, g を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像とし，k を実数とする．このとき，$f + g$, $f - g$, fg, kf, f/g も $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像であることを示せ．ただし，f/g は $g(x) = 0$ をみたす実数 x が存在しないときに定義される．

演習 15　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の通常の位相とする．f, g を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像とする．次の (1)〜(3) が成り立つことを示せ．

(1) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉集合である．

(2) $\{x \in X \mid f(x) \leqq g(x)\}$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉集合である．

(3) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合である．

演習 16　$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合 $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ を次のように定める．

$$\mathcal{B} = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\ (i \in \{1, \ldots, n\})\}$$
$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R}^{i-1} \times (a, b) \times \mathbb{R}^{n-i} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

このとき，$\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ がそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の通常の位相の基底，準基底であることを示せ．

演習 17　$((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ で添字づけられた位相空間の族とし，$(X, \mathcal{O})$ を $((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間とする．Λ の元 λ に対し A_λ を X_λ の空でない部分集合とする．$\#\Lambda < \aleph_0$ のとき，$(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^i = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^i$ が成り立つことを示せ．

第 5 章

位相空間の性質

演 習 問 題

演習 1　$(X, \mathcal{O})$ を可分な位相空間とし，$\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ の部分集合とする．$\mathcal{O}'$ の空でない任意の元 O_1, O_2 に対し $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ ならば，$\#\mathcal{O}' \leqq \aleph_0$ であることを示せ．

演習 2　(X, d) を距離空間とし，A を X の部分集合とする．d から定まる X の距離位相を $\mathcal{O}$ とし，$\mathcal{O}$ から定まる A の相対位相を $\mathcal{O}_A$ とする．$(X, \mathcal{O})$ が可分ならば，$(A, \mathcal{O}_A)$ も可分であることを示せ．

演習 3　$(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とする．n を自然数とし，$x_1, \ldots, x_n$ を X の相異なる n 個の点とする．このとき，$x_1, \ldots, x_n$ の近傍 $U_1, \ldots, U_n$ であって，$\{1, \ldots, n\}$ の相異なる元 i, j に対し $U_i \cap U_j = \varnothing$ をみたすものが存在することを示せ．

演習 4　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像とする．f が単射ならば，$(X, \mathcal{O}_X)$ もハウスドルフ空間であることを示せ．

演習 5　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間とし，$f, g : X \to Y$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像とする．$(X, \mathcal{O}_X)$ において稠密な X の部分集合 A が存在し，A の任意の点 x に対し $f(x) = g(x)$ であるとする．このとき，$f = g$ であることを示せ．

演習 6　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{A}$ を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合とする．次の (1), (2) が同値であることを示せ．

(1) $(X, \mathcal{O})$ は T_3 をみたす．

(2) $\mathcal{A}$ の任意の元 A に対し，$\bigcap\{O^a \,|\, O \in \mathcal{O},\, A \subset O\} = A$ が成り立つ．

演習 7　$(X, \mathcal{O})$ を T_1 をみたす位相空間とする．$(X, \mathcal{O})$ が正規空間であるための必要十分条件は，$O_1 \cup O_2 = X$ をみたす $\mathcal{O}$ の任意の元 O_1, O_2 に対し，$A_1 \subset O_1$，$A_2 \subset O_2$，$A_1 \cup A_2 = X$ をみたす $(X, \mathcal{O})$ の閉集合 A_1, A_2 が存在することである．これを示せ．

演習 8　$(X, \mathcal{O}_X)$ を正規空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を全射とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像かつ閉写像ならば，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ も正規空間であることを示せ．

演習 9　$(X, \mathcal{O}_X)$ を完全正則空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を全射とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像かつ開写像かつ閉写像ならば，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ も完全正則空間であることを示せ．

演習 10　$(X_1, \mathcal{O}_1)$ を位相空間とする．次の (1)，(2) が同値であることを示せ．

(1) $(X_1, \mathcal{O}_1)$ はコンパクトである．

(2) 任意の位相空間 $(X_2, \mathcal{O}_2)$ と，$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の直積位相 $\mathcal{O}$ に対し，第 2 成分への射影 $\mathrm{pr}_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ は $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への閉写像である．

演習 11　$(X, \mathcal{O})$ を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，O を $(X, \mathcal{O})$ の開集合，A を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合とする．$\mathcal{O}$ から定まる $B = O \cap A$ の相対位相を $\mathcal{O}_B$ とする．このとき，$(B, \mathcal{O}_B)$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であることを示せ．

演習 12　$(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とし，B を X の部分集合とする．$\mathcal{O}$ から定まる B の相対位相を $\mathcal{O}_B$ とし，$(B, \mathcal{O}_B)$ が局所コンパクトであるとする．このとき，$B = O \cap A$ をみたす $(X, \mathcal{O})$ の開集合 O と $(X, \mathcal{O})$ の閉集合 A が存在することを示せ．

演習 13　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，A, B を X の部分集合とする．$A \cup B$ と $A \cap B$ がいずれも $(X, \mathcal{O})$ の連結集合ならば，A と B も $(X, \mathcal{O})$ の連結集合であることを示せ．

演習 14　$(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とし，A_1, A_2 をそれぞれ X_1, X_2 の真部分集合とする．$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の直積位相 $\mathcal{O}$ に対し，$X_1 \times X_2 - A_1 \times A_2$ は $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ の連結集合であることを示せ．

演習 15　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．X の点 x に対し，x を含む $(X, \mathcal{O})$ の連結成分を $C(x)$ とする．$\#\{C(x) \,|\, x \in X\} < \aleph_0$ ならば，X の任意の点 x に対し $C(x)$ は $(X, \mathcal{O})$ の開集合かつ閉集合である．これを示せ．

演習 16　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，A を $(X, \mathcal{O})$ の空でない連結集合とする．A が $(X, \mathcal{O})$ の開集合かつ閉集合ならば，A は $(X, \mathcal{O})$ の連結成分であることを示せ．

演習 17　$((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ で添字づけられた位相空間の族とし，$(X, \mathcal{O})$ を $((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間とする．$x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の点とし，x を含む $(X, \mathcal{O})$ の連結成分を $C(x)$ とする．Λ の元 λ に対し，x_λ を含む $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ の連結成分を $C_\lambda(x_\lambda)$ とする．このとき，$C(x) = \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(x_\lambda)$ が成り立つことを示せ．

演習 18　$(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とし，$\mathcal{A}$ を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ をみたす $\mathcal{O}$ の基底 $\mathcal{B}$ が存在するならば，$(X, \mathcal{O})$ は完全不連結であることを

示せ.

演習 19　$((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を Λ で添字づけられた位相空間の族とし，$(X, \mathcal{O})$ を $((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間とする．Λ の任意の元 μ に対し $(X_\mu, \mathcal{O}_\mu)$ が弧状連結ならば，$(X, \mathcal{O})$ も弧状連結であることを示せ.

演習 20　（ティーツェの拡張定理）$(X, \mathcal{O}_X)$ を T_4 をみたす位相空間とする．A を $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉集合とし，$\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}_X$ から定まる A の相対位相とする．$f : A \to \mathbb{R}$ を $(A, \mathcal{O}_A)$ 上の実連続関数とする．このとき，$\widetilde{f}|_A = f$ をみたす $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の実連続関数 $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ.

第6章
距離空間の性質

演 習 問 題

演習 1　(X, d) を距離空間とし，$\mathcal{O}$ を d から定まる距離位相とする．x を X の点とし，A, B を $(X, \mathcal{O})$ の空でないコンパクト集合とする．次の (1)〜(3) が成り立つことを示せ．
(1) $d(a_1, a_2) = \delta(A)$ をみたす A の点 a_1, a_2 が存在する．
(2) $d(x, a) = d(x, A)$ をみたす A の点 a が存在する．
(3) $d(a, b) = d(A, B)$ をみたす A の点 a と B の点 b が存在する．

演習 2　(X, d) を距離空間とし，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (X, d) のコーシー列とする．このとき，$(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ のコーシー列であることを示せ．

演習 3　(X, d) を距離空間とし，$\mathcal{O}$ を d から定まる距離位相とする．(X, d) が全有界ならば，$(X, \mathcal{O})$ は可分であることを示せ．

演習 4　n を 2 以上の整数とし，$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とする．(X, d) を $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ の直積距離空間とする．$\{1, \ldots, n\}$ の任意の元 i に対し (X_i, d_i) が全有界ならば，(X, d) も全有界であることを示せ．

演習 5　$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．ある正の実数 δ が存在し，任意の正の実数 ε と X の任意の点 x に対し「$d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ である」とき，f を (X, d_X) から (Y, d_Y) への**一様連続写像**という．（このとき，f は (X, d_X) から (Y, d_Y) への連続写像である．）
f が (X, d_X) から (Y, d_Y) への一様連続写像であり，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が (X, d_X) のコーシー列ならば，$(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は (Y, d_Y) のコーシー列であることを示せ．

演習 6　$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし，d_X から定まる X の距離位相を $\mathcal{O}_X$ とする．$f : X \to Y$ を写像とする．$(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであり，f が (X, d_X) から (Y, d_Y) への連続写像ならば，f は (X, d_X) から (Y, d_Y) への一様連続写像であるこ

とを示せ.

演習 7　(X, d) を距離空間とし，A を X の空でない部分集合とする．X の点 x に対し $f(x) = d(x, A)$ と定めることにより，写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を定義する．このとき，f は (X, d) から $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ への一様連続写像であることを示せ.