ベーシック物理学　演習問題解答

サイエンス社

2021 年 7 月 6 日

第 1 章

力　　学

演習 1

物体 B の位置を座標の原点にとり，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる。時刻 $t = 0$ での 2 つの物体の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (\ell, h)$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = (0, 0)$, また速度ベクトルは，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = (0, 0)$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = (v\cos\theta, v\sin\theta)$ である。重力加速度の大きさを g とすると，任意の時刻 $t > 0$ での 2 つの物体の位置はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (\ell, h - \frac{1}{2}gt^2) \tag{A.1.1}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = (vt\cos\theta, vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2) \tag{A.1.2}$$

となる。2 つの物体が衝突するためには，ある時刻 $t_0 > 0$ で $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ となればよい。したがって

$$\ell = vt_0\cos\theta \tag{A.1.3}$$

$$h = vt_0\sin\theta \tag{A.1.4}$$

であり，両辺の比をとると $\tan\theta = \frac{h}{\ell}$ となる。つまり，物体 B を物体 A の方向に打ち出せば 2 つの物体は衝突する。

演習 2

水平右向きを正の方向とする。物体 1 は物体 2 から $+m_2 g\mu'$ の動摩擦力を受け，作用反作用の法則により物体 2 は物体 1 から $-m_2 g\mu'$ の動摩擦力を受ける。したがって，それぞれの物体の運動方程式は

$$m_1 a_1 = m_2 g\mu' \tag{A.1.5}$$

$$m_2 a_2 = F - m_2 g\mu' \tag{A.1.6}$$

となり，加速度は

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1} g\mu' \tag{A.1.7}$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} - g\mu' \tag{A.1.8}$$

となる。重心の加速度は (1.177) を t で 2 階微分すると

$$a_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \tag{A.1.9}$$

なので，(A.1.5)(A.1.6) より

$$a_{\mathrm{G}} = \frac{m_2 g\mu' + F - m_2 g\mu'}{m_1 + m_2} = \frac{F}{m_1 + m_2} \tag{A.1.10}$$

となり，外力 F にのみ依存する。

演習 3

半円形の台の底を位置エネルギーの原点に取る。角度が θ のときの物体の速さを v とすると，力学的エネルギーの保存則より

$$mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \tag{A.1.11}$$

である。図 A.1.1 にあるように物体が半円形の台から受ける垂直抗力を N と

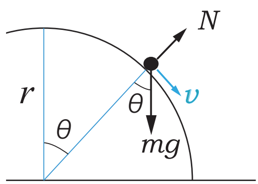

図 A.1.1　解答 3

すると，物体の円運動の向心力 $m\frac{v^2}{r}$ は

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta - N \tag{A.1.12}$$

で与えられる。(A.1.11)(A.1.12) より，mv^2 を消去し，N についてまとめると

$$N = mg(3\cos\theta - 2) \tag{A.1.13}$$

となる。$N=0$ のとき，物体は半円形の台から離れるので，$\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ である。なお，$v = r\frac{d\theta}{dt}$ を (A.1.11) に代入すると

$$mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2mgr(1-\cos\theta) \tag{A.1.14}$$

であるが，この式の両辺を t で微分し整理すると

$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta \tag{A.1.15}$$

が得られる。この式は物体の台に沿った方向の運動方程式になっている。実際 $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ はこの方向の物体の加速度であり，$mg\sin\theta$ は重力の台に沿った方向の成分になっている。

演習 4

水平右向きを正の方向とし，物体１，物体２の座標を x_1, x_2 とする。はじめに物体１が止まっていた場所を原点にとると，時刻 $t=0$ で $x_1=0, x_2=\ell$ である。ばねの伸びは $x_2 - x_1 - \ell$ なので，２つの物体の運動方程式は

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}x_1 = k(x_2 - x_1 - \ell) \tag{A.1.16}$$

$$m_2\frac{d^2}{dt^2}x_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell) \tag{A.1.17}$$

となる。

この問題のように２つの物体が互いに力を及ぼし合いながら運動するときは，x_1, x_2 より重心座標 x_{G} と相対座標 x

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \tag{A.1.18}$$

$$x = x_2 - x_1 \tag{A.1.19}$$

を考える方が便利である。重心座標 x_{G} と相対座標 x が決まれば，x_1, x_2 は

$$x_1 = x_{\mathrm{G}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}x \tag{A.1.20}$$

$$x_2 = x_{\mathrm{G}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}x \tag{A.1.21}$$

で与えられる。1.6.3 項で説明したように，外力がはたらかないとき重心は等速運動をする。$t = 0$ での重心の座標と速度は

$$x_{\mathrm{G},0} = \frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2} \tag{A.1.22}$$

$$v_{\mathrm{G},0} = \frac{m_1 v_{1,0} + m_2 v_{2,0}}{m_1 + m_2} \tag{A.1.23}$$

なので，任意の時刻で x_{G} は

$$x_{\mathrm{G}} = x_{\mathrm{G},0} + v_{\mathrm{G},0} t \tag{A.1.24}$$

で与えられる。相対座標の運動方程式を求めるために，(A.1.17) を m_2 で割った式と (A.1.16) を m_1 で割った式の差をとってみる

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2 - \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) k(x_2 - x_1 - \ell) \tag{A.1.25}$$

ここで換算質量 μ を

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{A.1.26}$$

で定義すると，(A.1.25) は相対座標を用いて

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} x = -k(x - \ell) \tag{A.1.27}$$

と表される。つまり，内力のみがはたらく2つの物体の運動を調べるには，相対座標の運動方程式を解けばよい。$X = x - \ell$ とおいてみると (A.1.27) は

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} X = -kX \tag{A.1.28}$$

と単振動の運動方程式になるので，その一般解は (1.82) より

$$X = x - \ell = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \tag{A.1.29}$$

となる。a と b は任意定数であるが，$t = 0$ での初期条件 $x = \ell - 0 = \ell$, $\frac{dx}{dt} = v_{2,0} - v_{1,0}$ から

$$a = \frac{v_{2,0} - v_{1,0}}{\omega}, \qquad b = 0 \tag{A.1.30}$$

なので，一般の時刻 t で相対座標 x は

$$x = \ell + \frac{v_{2,0} - v_{1,0}}{\omega} \sin(\omega t) \tag{A.1.31}$$

と求まる。x_1, x_2 は (A.1.24) (A.1.31) を (A.1.20) (A.1.21) に代入すれば得られる。 例えば 2 つの物体の質量が等しく $m_1 = m_2 = m$，初速度が $v_{1,0} = 0, v_{2,0} = v_0$ のときは，$\mu = \frac{m}{2}, \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ であり，x_{G}，x は

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\ell}{2} + \frac{v_0}{2} t \tag{A.1.32}$$

$$x = \ell + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{A.1.33}$$

となる。x_1, x_2 は (A.1.20) (A.1.21) より

$$x_1 = \frac{v_0}{2} t - \frac{v_0}{2\omega} \sin(\omega t) \tag{A.1.34}$$

$$x_2 = \ell + \frac{v_0}{2} t + \frac{v_0}{2\omega} \sin(\omega t) \tag{A.1.35}$$

と求まる。

演習 5

図 A.1.2 にあるように，棒が半円柱に接する点を P，棒が床に接する点を Q とする。棒の質量を m とすると，棒の中心には重力 mg がかかる。棒が半円柱から受ける垂直抗力を N_1，床から受ける垂直抗力を N_2，床から受ける静止摩擦力を F とすると，力のつり合いの条件は水平方向と垂直方向に対して

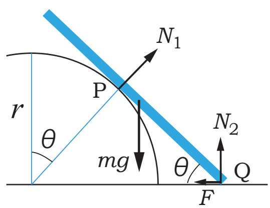

図 A.1.2　解答 5

$$N_1 \sin\theta - F = 0 \tag{A.1.36}$$

$$N_1 \cos\theta + N_2 - mg = 0 \tag{A.1.37}$$

である。また，点 P から点 Q までの長さを x とすると，点 Q のまわりで力のモーメントがつり合う条件は

$$\frac{L}{2} mg\cos\theta - N_1 x = 0 \tag{A.1.38}$$

となる。$\tan\theta = \frac{r}{x}$ であり $x = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} r$ なので，(A.1.38) は

$$N_1 = \frac{L}{2r} mg\sin\theta \tag{A.1.39}$$

と書き直せる。さらに (A.1.39) を (A.1.37) に代入すると

$$N_2 = mg\left(1 - \frac{L}{4r}\sin 2\theta\right) \tag{A.1.40}$$

となる。垂直抗力 N_2 は正の値を持たなければならないので

$$L < \frac{4r}{\sin 2\theta} \tag{A.1.41}$$

である。さらに，棒が床を滑り落ちないためには $F \leq \mu N_2$ でなければならないが，(A.1.36)(A.1.39)(A.1.40) を用いると，この不等式は

$$L \leq \frac{4r}{\frac{2}{\mu}\sin^2\theta + \sin 2\theta} \tag{A.1.42}$$

と書きかえられる。$\frac{2}{\mu}\sin^2\theta$ は正の値を持つので，(A.1.42) の条件は (A.1.41) の条件より強い。したがって棒が半円柱から滑り落ちないためには (A.1.42) が満たされていれば良い。例えば $\theta = 45^\circ$ のときは，$\sin^2\theta = \frac{1}{2}$，$\sin 2\theta = 1$ なので

$$L \leq \frac{4r\mu}{1+\mu} \tag{A.1.43}$$

である。

演習 6

(1.195) を h について解くと，

$$h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R \tag{A.1.44}$$

となる。地球の質量は $M = 6.0 \times 10^{24}\mathrm{kg}$，また 1 日は $T = 8.64 \times 10^4\mathrm{s}$ なので

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.0 \times 10^{24} \times (8.64 \times 10^4)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - 6.4 \times 10^6 \\ &= 3.6 \times 10^7 \ \mathrm{m} = 36000 \ \mathrm{km} \end{aligned} \tag{A.1.45}$$

である。地球の半径は 6400 km なので，静止衛星は，地球の半径の 5.6 倍高いところを回転している。

第 2 章
熱　力　学

演習 1

状態 A から状態 B への等温変化で外部にした仕事 W_{AB} は $\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} pdV$ であるが，状態方程式 $pV = nRT_1$ を用いると W_{AB} は

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} pdV = nRT_1 \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} \frac{dV}{V} = nRT_1 \log \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} > 0 \tag{A.2.1}$$

となる。等温変化では内部エネルギーは変化しないので熱力学第 1 法則より $Q_{\mathrm{in}} = W_{\mathrm{AB}}$ であり，

$$Q_{\mathrm{in}} = nRT_1 \log \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} \tag{A.2.2}$$

である。同様に，状態 C から状態 D への等温変化で外部にした仕事 W_{CD} は $\int_{V_{\mathrm{C}}}^{V_{\mathrm{D}}} pdV$ であるが状態方程式 $pV = nRT_2$ を用いると W_{CD} は

$$W_{\mathrm{CD}} = \int_{V_{\mathrm{C}}}^{V_{\mathrm{D}}} pdV = nRT_2 \int_{V_{\mathrm{C}}}^{V_{\mathrm{D}}} \frac{dV}{V} = nRT_2 \log \frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{C}}} < 0 \tag{A.2.3}$$

となる。等温変化では内部エネルギーは変化しないので熱力学第 1 法則より，外部に放出した熱量は外部からされた仕事に等しいので $Q_{\mathrm{out}} = -W_{\mathrm{CD}}$ であり

$$Q_{\mathrm{out}} = nRT_2 \log \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}} \tag{A.2.4}$$

となる。$\log \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$ と $\log \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}}$ の関係を調べるために

$$\left(\frac{V_{\mathrm{B}} V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{C}}} \right)^{\gamma - 1} \tag{A.2.5}$$

を考える。ポアソンの法則 (2.24) より断熱過程では pV^{γ} は一定であるが，状態方程式を使うと $TV^{\gamma-1}$ が一定なのがわかる。つまり

$$\left(\frac{V_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C}}}\right)^{\gamma-1} = \frac{V_{\mathrm{D}}^{\gamma-1}}{V_{\mathrm{A}}^{\gamma-1}}\frac{V_{\mathrm{B}}^{\gamma-1}}{V_{\mathrm{C}}^{\gamma-1}} = \frac{T_1}{T_2}\frac{T_2}{T_1} = 1 \tag{A.2.6}$$

なので $\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} = \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}}$，つまり $\log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} = \log\frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}}$ である。したがって

$$\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{in}}} = \frac{Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}}}{Q_{\mathrm{in}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{A.2.7}$$

が導かれる。

演習 2

２つの命題 A と B が等価なら，「A なら B」と「B なら A」が同時に成り立つ。ただしこれを直接証明しなくても，対偶をとって「B でないなら A でない」と「A でないなら B でない」を示してもよい。A をトムソンの熱力学第 2 法則，B をクラウジウスの熱力学第 2 法則とする。すると「A でない」は「外部に何の変化も残さないで，熱を仕事に変えることができる」であり，「B でない」は「外部に何の変化も残さないで，熱を低温から高温に移すことができる」である。

カルノーサイクルを使ってこれらを示すのであるが，初めにカルノーサイクルの逆サイクルについて説明しておく。等温変化と断熱変化は可逆過程なのでカルノーサイクルは逆に動かせる。図 2.3(c) の状態 D から出発し，等温変化で状態 C，断熱変化で状態 B，等温変化で状態 A に移り，最後に断熱変化で状態 D に戻る熱サイクルをカルノーの逆サイクルという。逆サイクルでは D→C 間の等温変化で気体は低温の熱源から Q_{out} の熱を吸収し，B→A 間の等温変化で高温の熱源に Q_{in} の熱量を放出する。ただし逆サイクルを動かすためには $W = Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}}$ の仕事を外部から与える必要がある。つまり，W の仕事を熱機関に与え，低温から高温に熱を移動させるのである。逆サイクルと区別するときは通常のカルノーサイクルは順サイクルと呼ばれる。これで準備が整ったので証明をしてゆく。

まず「B でないなら A でない」から始めよう。本文で説明したように順サイクルで低温に放出された熱量を外部に何の変化も残さないで高温に移すことができると，低温部分には変化は残らないので，外部に何の変化も残さないで，熱を仕事に変えることができてしまう。これが「B でないなら A でない」である。

つぎに「A でないなら B でない」であるが，これはカルノーの逆サイクルを用いる。低温側にある，$Q_{\mathrm{in}} = Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}} + Q_{\mathrm{out}}$ の熱の一部 $Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}}$ を外部に何の変化も残さずに仕事に変える。この仕事を逆サイクルに使い，低温側から Q_{out} の熱量を吸収し，高温側に Q_{in} の熱量を放出する。全体では，外部に何の変化も残さずに低温側の Q_{in} の熱量を高温側に移すことになる。これで「A でないなら B でない」が示された。したがってトムソンの熱力学第 2 法則とクラウジウスの熱力学第 2 法則は等価である。

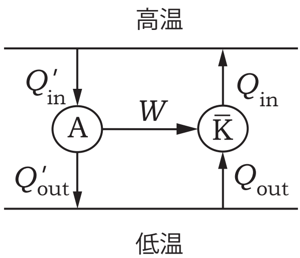

図 A.2.1　解答 3

演習 3

図 A.2.1 にあるように任意の熱サイクル A とカルノーの逆サイクル $\bar{\mathrm{K}}$ を考える。熱サイクル A は可逆でも不可逆でも構わない。熱サイクル A は高温の熱源から Q'_{in} の熱を吸収し，カルノーの逆サイクルに W の仕事をし，低温の熱源に Q'_{out} の熱を放出する。一方，カルノーの逆サイクルは，低温から Q_{out} の熱を吸収し，熱サイクル A からの W の仕事を使い，高温の熱源に Q_{in} の熱を放出する。両サイクルでエネルギーはそれぞれ保存されるので

$$W = Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}} = Q'_{\mathrm{in}} - Q'_{\mathrm{out}} \tag{A.2.8}$$

である。この式を書き直すと

$$Q_{\mathrm{in}} - Q'_{\mathrm{in}} = Q_{\mathrm{out}} - Q'_{\mathrm{out}} \tag{A.2.9}$$

となる。つまりこの熱サイクルは 1 サイクルが終わったあとに，外部に何の変化も残さないで低温から $Q_{\mathrm{in}} - Q'_{\mathrm{in}}$ の熱を高温に運ぶことができる。もし

$Q'_{\rm in} < Q_{\rm in}$ だとすると，クラウジウスの熱力学第 2 法則に反する。したがって $Q'_{\rm in} \geq Q_{\rm in}$ であり，熱は高温から低温に移動するか ($Q'_{\rm in} > Q_{\rm in}$)，熱の移動が全くないか ($Q'_{\rm in} = Q_{\rm in}$) でなければならない。ここでもし A が可逆サイクル

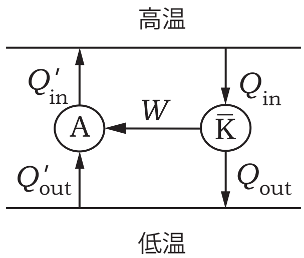

図 A.2.2　A が可逆サイクルの場合

であれば，図 A.2.2 にあるように全体の動きを逆転させることができる。$Q_{\rm in}$ と $Q'_{\rm in}$ の役割が逆になるので $Q'_{\rm in} > Q_{\rm in}$ であれば，熱を低温から高温に移すことができてしまい，クラウジウスの熱力学第 2 法則に反する。つまり，A が可逆サイクルであれば，$Q'_{\rm in} = Q_{\rm in}$ であり，不可逆サイクルであれば $Q'_{\rm in} > Q_{\rm in}$ である。熱サイクル A の熱効率 $\eta_{\rm A}$ とカルノーサイクルの熱効率 η はそれぞれ

$$\eta_{\rm A} = \frac{W}{Q'_{\rm in}}, \quad \eta = \frac{W}{Q_{\rm in}} \tag{A.2.10}$$

なので，A が不可逆サイクルであれば $Q'_{\rm in} > Q_{\rm in}$ であり $\eta_{\rm A} < \eta$，A が可逆サイクルであれば $Q'_{\rm in} = Q_{\rm in}$ なので $\eta_{\rm A} = \eta$ となり題意が示されたことになる。

演習 4

(2.38) に，n モルの理想気体の内部エネルギーの変化 $dU = nc_V dT$ を代入する。両辺を T で割った後に dS について整理すると

$$dS = nc_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \tag{A.2.11}$$

となる。右辺第 2 項に理想気体の運動方程式 $pV = nRT$ を用いると

$$dS = nc_V \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \tag{A.2.12}$$

となるが，この式は積分ができ，任意定数を C として

$$S = nc_V \log T + nR \log V + C = nc_V \log(TV^{\gamma-1}) + C \tag{A.2.13}$$

となる。

演習 5

1) 気体が左側の空間にある時の温度は状態方程式から $T = \frac{pV}{nR}$ である。気体が2つの空間に充満される過程で，ピストンは動いていないので気体は外部に仕事はしない。外部からの熱の移動もないので，気体の内部エネルギーは変化しない。したがって温度も変化せず $T_1 = \frac{pV}{nR}$ である。ただし体積は2倍になっているので圧力は $p_1 = \frac{p}{2}$ となる。

2) この変化は断熱変化なので，pV^γ は一定であり，$pV^\gamma = p_2(2V)^\gamma$ より $p_2 = 2^{-\gamma}p$ である。温度は状態方程式より，$T_2 = 2^{-\gamma+1}\frac{pV}{nR}$ となる。

3) 1) の過程では，温度は変わらず体積が2倍になるので，エントロピーは $nR\log 2$ だけ増加する。断熱過程でエントロピーが増加するので，この変化は不可逆変化である。実際，外部に何の変化も与えずに，$2V$ の体積にある気体を，体積 V の気体と体積 V の真空に変化させることはできない。

2) の過程は準静的な断熱過程なのでポアソンの法則より $TV^{\gamma-1} = \frac{1}{nR}pV^\gamma$ は不変であり，エントロピーは変化しない。この過程ではピストンが動いてシリンダーの体積が増加するので，気体は外部に仕事をする。可逆過程なので逆過程が存在するが，逆過程では気体は外部から仕事をされて，体積が $2V$ から V へ変化する。

第 3 章

演習 1

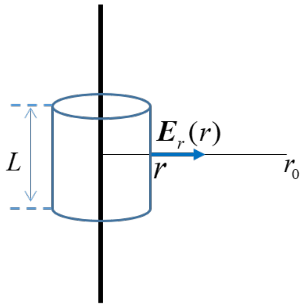

図 A.3.1　無限に長い直線状電荷のまわりの電場とポテンシャルの考え方

直線電荷の方向を z 軸にとる。電荷は無限に長いので電場は z にはよらない。電場を線状電荷にそった微小電荷がつくる電場の和と考えると，座標 z の微小電荷がつくる電場の成分は必ず $-z$ の微小電荷によって打ち消される。したがって，電場は線状電荷に垂直な成分しか存在せず, またその大きさは電荷からの距離 r のみの関数である。それを $\boldsymbol{E}(r)$ と書く。

図 A.3.1 のように線状電荷と中心軸を同じする高さ L の円柱を考え，それにガウスの法則を適用する。電場の z 成分はないので，円柱の上面，底面から出て行く電場は 0 である。したがって，円柱の側面について，

$$2\pi r L E(r) = \frac{\rho L}{\varepsilon_0} \tag{A.3.1}$$

が成り立つ。よって

$$E(r) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{A.3.2}$$

電位の基準点を r_0 とすると，

$$\varphi(r) = -\int_{r_0}^{r} E_r dr = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\left[\log r\right]_{r_0}^{r} = -\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{r}{r_0} \tag{A.3.3}$$

$r_0 = \infty$ のとき，$\varphi(r)$ は発散すので，$r_0 = \infty$ はポテンシャルの基準とできないことに留意。

演習 2

(1) 外側の球殻は導体なので，その内部に電場は存在しない。$b < r < c$ の球殻内に球面を考えてガウス法則を適用すると，その球内の電荷の総量は 0 でなければならない。内側の球に Q_1 の電荷を与えているので，球殻内面にはそれを打ち消す $-Q_1$ の電荷が誘起されている。

(2) 導体内に電場は存在しない。 $\boldsymbol{E} = 0$

(3)　内球にガウスの法則を適用する。3.1.3 項の点電荷のまわりの電場と同様である。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{A.3.4}$$

(4) 導体内に電場は存在しない。$\boldsymbol{E} = 0$

(5) $c \leq r$ のとき，その内側の電荷の総量は $Q_1 + Q_2$。したがって，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{A.3.5}$$

演習 3

図 A.3.2 にように座標系を考える。電荷 Q が $\boldsymbol{r}$ につくる電位は，

$$\varphi_Q(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q\right|} \tag{A.3.6}$$

鏡像電荷が q に $\boldsymbol{r}$ つくる電位は

$$\varphi_I(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I\right|} \tag{A.3.7}$$

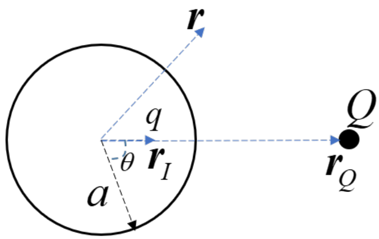

図 A.3.2　球状導体の周り鏡像電荷

よって，$\boldsymbol{r}$ の電位は，

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_Q(\boldsymbol{r}) + \varphi_I(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_I|} \tag{A.3.8}$$

球の表面を $\boldsymbol{a}$ と表す。球は接地されておりその電位は 0 なので，

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{a}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + r_Q^2 - 2ar_Q\cos\theta}} \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + r_I^2 - 2ar_I\cos\theta}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{A.3.9}$$

これから

$$\frac{\sqrt{a^2 + {r_I}^2 - 2ar_I\cos\theta}}{\sqrt{a^2 + {r_Q}^2 - 2ar_Q\cos\theta}} = -\frac{q}{Q} \tag{A.3.10}$$

となる。これが θ によらず成り立たなければならない。左辺を変形して，

$$\frac{\sqrt{a^2 + {r_I}^2 - 2ar_I\cos\theta}}{\sqrt{a^2 + {r_Q}^2 - 2ar_Q\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2ar_I}\sqrt{\frac{a^2+{r_I}^2}{2ar_I} - \cos\theta}}{\sqrt{2ar_Q}\sqrt{\frac{a^2+{r_Q}^2}{2ar_Q} - \cos\theta}} \tag{A.3.11}$$

右辺の平方根の前項は一定値なので，これが θ によらず一定となるためには，

$$\frac{a^2 + {r_I}^2}{2ar_I} = \frac{a^2 + {r_Q}^2}{2ar_Q} \tag{A.3.12}$$

よって，$r_Q\left(a^2 + {r_I}^2\right) = r_I\left(a^2 + {r_Q}^2\right)$。これを r_I についてとくと，

$$
\begin{aligned}
r_I &= \frac{\left(a^2+r_Q^2\right) \pm \sqrt{\left(a^2+r_Q^2\right)^2 - 4a^2 r_Q^2}}{2r_Q} \\
&= \frac{\left(a^2+r_Q^2\right) \pm \sqrt{\left(a^2-r_Q^2\right)^2}}{2r_Q} \\
&= \frac{\left(a^2+r_Q^2\right) \pm \left(a^2-r_Q^2\right)}{2r_Q} = \begin{cases} \frac{a^2}{r_Q} \\ r_Q \end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.3.13}
$$

$r_I = r_Q$ は求める解とはならないので, $r_I = \frac{a^2}{r_Q}$。このとき, (A.3.10), (A.3.11) より,

$$
\frac{\sqrt{a^2+r_I^2-2ar_I\cos\theta}}{\sqrt{a^2+r_Q^2-2ar_Q\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2ar_I}}{\sqrt{2ar_Q}} = \frac{\sqrt{r_I}}{\sqrt{r_Q}} = \frac{a}{r_Q} = -\frac{q}{Q} \tag{A.3.14}
$$

したがって，求める解は,

$$
\begin{aligned}
r_I &= \frac{a^2}{r_Q} \\
q &= -\frac{a}{r_Q}Q
\end{aligned}
\tag{A.3.15}
$$

演習 4

（1）無限遠を基準電位としたとき，半径 a の球表面の電位 V は,

$$
V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{A.3.16}
$$

静電容量を C とすると，$Q = CV$ なので，$C = 4\pi\varepsilon_0 a$

(2) 導体内には電場はないので，静電場のエネルギーはコンデンサに蓄えられているエネルギーに等しい。これを W とすると,

$$
W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 a\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{A.3.17}
$$

別解 1

半径 a , 電荷量 q の球の表面の電位 V は, $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ である。そこに, 無限遠から微小電荷 dq を運ぶために必要なエネルギー dw は, $dw = Vdq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}dq$。

求める電場のエネルギーは無限遠から電荷を運んで半径 a，電荷 Q の球をつくるために必要なエネルギーと等しい。したがって

$$\begin{aligned} W &= \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} dq \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned} \tag{A.3.18}$$

別解 2

電場のエネルギーを直接積分することによって求めることができる（ただし重積分の知識が必要）。球の中心から r 離れた場所の電場の大きさは，$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$。したがって，その場所の電場のエネルギー密度 dW は

$$dW(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \tag{A.3.19}$$

これを球の外部全体にわたって積分する。

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int_a^\infty 4\pi r^2 \frac{1}{r^4} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned} \tag{A.3.20}$$

演習 5

内側の導体棒に Q ，外側の導体に $-Q$ の電荷を与え，そのときの導体間の電位差が V であったとする。電場と電位は無限に長い直線電荷と同じと考えればよいので，演習 1 をもちいる。単位長さあたりの電荷は $\frac{Q}{L}$ なので，

$$\begin{aligned} V &= -\int_b^a E_r dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} [\log r]_b^a = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \log \frac{a}{b} \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} (\log b - \log a) \end{aligned} \tag{A.3.21}$$

よって，

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log b - \log a} \tag{A.3.22}$$

演習 6

（1）電流を I，電気素量を e，自由電子の数密度を n，自由電子の移動速度を v，導線の断面積を S とすると，$I = envS$。しがって，

$$v = \frac{I}{enS} \tag{A.3.23}$$

$I = 1\ A$，$e \approx 1.602 \times 10^{-19}$ C，$n \approx 8.5 \times 10^{28}$ /m^3，$S = 10^{-6}$ m^2 を代入すると，

$$v \approx 73 \times 10^{-6} \text{ m/s} \tag{A.3.24}$$

演習 7

電流の方向が同じ（平行）のときには引力。反対（反平行）の時には斥力が働く。

演習 8 ソレノイドの中心軸を z 軸とし，円形コイルの z 軸上の位置を $z = 0$ とする。（1）外側のコイルが中心軸上につくる磁場は，

$$H_z(z) = \frac{I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{A.3.25}$$

題意よりソレノイド内部の磁束 $\phi(z)$ は，

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 SI}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{A.3.26}$$

ソレノイドの単位長さあたりの巻き数が n なので，この磁束がソレノイドを貫く総数を ϕ_{tot} と表すと，

$$\begin{aligned}\phi_{tot} &= \frac{n\mu_0 SI}{2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz \\ &= \frac{n\mu_0 \ell SI}{\sqrt{4R^2+\ell^2}} \end{aligned} \tag{A.3.27}$$

相互インダクタンスを L とすると，$\phi_{tot} = LI$ より，

$$L = \frac{n\mu_0 lS}{\sqrt{4R^2+l^2}} \tag{A.3.28}$$

(2)

(1) において，$l \to \infty$ の場合である。

$$\lim_{l\to\infty} \frac{n\mu_0 lS}{\sqrt{4R^2+l^2}} = n\mu_0 S \tag{A.3.29}$$

別解

相反定理から求めることができる。ソレノイドに電流 I を流したときその内部の磁束密度は，$B = n\mu_0 I$。したがって，内部の磁束は $\phi = n\mu_0 SI$。この磁束が外部コイルを 1 回貫くので，相互インダクタンスは $L = n\mu_0 S$ となる。

演習 9

（1）誘導起電力を V とすると，

$$V = -L\frac{dI}{dt} = -kL \tag{A.3.30}$$

(2) 単位時間あたりの仕事は，　$w = IV = k^2Lt$。したがって，

$$W = L\int_0^t k^2 t' dt' = \frac{1}{2}k^2t^2L = \frac{1}{2}LI^2(t) \tag{A.3.31}$$

となり，これはソレノイドに蓄えられたエネルギーに等しい。

第 4 章
量　子　論

演習 1

プランク定数 $h \approx 6.63 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s，電気素量 $e \approx 1.602 \times 10^{-19}$ A $\cdot$ s，光速 $c \approx 3.0 \times 10^{8}$ m/s を用いて，

$$E(eV) = \frac{h\nu}{e} = \frac{hc}{\lambda e} \approx 1.24 \text{ eV} \tag{A.4.1}$$

便利な計算手法

$$\hbar c \approx 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 197 \times 10^{-9} \text{ eV} \cdot \text{m} \tag{A.4.2}$$

は比較的覚えやすい（fm は 10^{-15}m)。　これを使うと，

$$\begin{aligned} E(eV) &= \frac{h\nu}{e} = \frac{2\pi\hbar c[J \cdot m]}{\lambda[m]e[A \cdot s]} \\ &= \frac{2\pi\hbar c[eV \cdot m]}{\lambda[m]} \approx \frac{2\pi \times 197 \times 10^{-9}[eV \cdot m]}{10^{-6}[m]} \\ &\approx 1.24 \text{ eV} \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

演習 2

$k_{\mathrm{B}} \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K，また，1 $eV \approx 1.602 \times 10^{-19}$ J より，1.602×10^{-19} J $= 1.38 \times 10^{-23}\, T$。したがって，

$$T \approx \frac{1.602 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} \approx 11600 \text{ K} \tag{A.4.4}$$

1 eV はおよそ $10,000$ K と覚えておくとよい。

演習 3

（1）ボーアの量子条件 $2\pi pr_n = nh$ において，基底状態は $n = 1$ なので，$p = \frac{h}{2\pi r_1}$。水素原子の基底状態では，

$$r_1 = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi e^2 m} \approx 5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \tag{A.4.5}$$

これをボーア半径という。これから基底状態の運動量は，

$$p = \frac{h}{2\pi}\frac{\pi e^2 m}{h^2\varepsilon_0} = \frac{e^2 m}{2h\varepsilon_0} \approx 1.99 \times 10^{-24}\ \mathrm{kgm/s} \tag{A.4.6}$$

ド・ブロイ波長は，

$$\lambda = \frac{h}{p} = h\frac{2h\varepsilon_0}{e^2 m} = \frac{2h^2\varepsilon_0}{e^2 m} \approx 3.32 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \tag{A.4.7}$$

(2) 最小不確定性状態を考え $\Delta r p = \frac{\hbar}{2}$ として，

$$\Delta r = \frac{\hbar}{2p} = \frac{\hbar}{2}\frac{2h\varepsilon_0}{e^2 m} = \frac{h^2\varepsilon_0}{2\pi e^2 m} \approx 2.65 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \tag{A.4.8}$$

(3) 最小不確定性を $\Delta r\Delta p \approx \hbar$ とする (議論の便宜のため $\approx \hbar$ とした)。Δr，Δp は位置と運動量の不確定性だが，これは粒子が Δr 程度の範囲に限定されたときに，Δp 程度の運動量をもつと解釈できる。これから水素原子の電子の平均半径 r と平均運動量 p に同じ関係 $r\ p \approx \hbar$ （すなわち $2\pi r\ p \approx h$) を要請する。 これは水素原子の基底状態に対するボーアの量子化条件そのものであり，前期量子論と同じ議論で水素原子の基底状態のエネルギーとその安定性を得る。このように，水素原子の安定性の理由を不確定性原理に求めることができる。電子を狭い範囲に閉じ込めると不確定性原理によって運動量をもつため電子は原子核に落ち込むことはないのである。

演習 4

(1)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 6.63 \times 10^{-35}\ \mathrm{m} \tag{A.4.9}$$

(2)

$E = \frac{p^2}{2m}$ より $p = \sqrt{2mE}$。

$10keV \approx 10^4 \times 1.602 \times 10^{-19}$ J。

電子の質量 m は約 9.11×10^{-31} kg。

したがって,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 1.22 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \tag{A.4.10}$$

演習 5

$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ を用いて,

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} \simeq 5.27 \times 10^{-25}\ \mathrm{kgm/s} \tag{A.4.11}$$

このとき運動エネルギー K の不確定性は

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} \approx 1.53 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} \approx 0.95\ \mathrm{eV} \tag{A.4.12}$$

演習 6

演習５，６からわかるように，日常の生活においてつかる運動量や位置の値にたいして，不確定性原理に起因する不確定性は非常に小さい。これはプランク定数が 6.63×10^{-34} J $\cdot$ s と非常に小さい値であることによる。不確定性が顕著になるのは，原子など非常に小さな領域における現象の場合である。