多変量確率変数

目次

本スライドの内容

このスライドは，次の書籍の第 3 章「多変量確率変数」の内容に基づく．

- 『ガイダンス 確率統計：基礎から学び本質の理解へ』，発行：サイエンス社，ISBN：978-4-7819-1526-5.

書籍に関する最新の情報は，以下の URL から入手することができます．

`https://www.saiensu.co.jp`

この URL は，サイエンス社が運営しているホームページです．

概要

このスライドではまず，確率変数の独立性，同時分布，共分散，相関係数などの概念について解説する．これらの概念は，複数の確率変数を同時に扱う際に必要となる．次に，カイ二乗分布と t-分布について解説する．これらの分布は，統計的推定や統計的仮説検定を行うために必要となる．最後に，同時分布の代表例である，多項分布と多次元正規分布について解説する．このスライドでは，(Ω, P) は確率空間を表すものとする．また以降では，掛け算 $a_1 a_2 \cdots a_k$ は $\prod_{i=1}^{k} a_i$ とも表記する．

定義 3.1.1

定義 3.1.1

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ (Ω, P) 上の確率変数とする．任意の区間 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ に対して，関係式

$$P(X_1 \in I_1,\ X_2 \in I_2, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i)$$

が成り立つとき，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立であるという．ここで，区間 I_i は $(a, b]$, (a, b), $[a, b]$ 等の有界区間，$(-\infty, a]$, (a, ∞), $\mathbb{R}$ 等の無限区間の他，$\{a\}$ などの 1 点集合でもよいものとする．また，(Ω, P) 上で定義された確率変数の (無限) 列 $X_1, X_2, \cdots$ が独立であるとは，任意の自然数 n に対して $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であることをいう．

注意 3.1.1

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であれば，任意の区間 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$P(X_1 \in I_1,\ X_2 \in I_2, \cdots,\ X_{n-1} \in I_{n-1},\ X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i).$$

この関係式において $I_n = \mathbb{R}$ とおけば，$P(X_n \in \mathbb{R}) = 1$ であるため，

$$\begin{aligned}&P(X_1 \in I_1,\ X_2 \in I_2, \cdots,\ X_{n-1} \in I_{n-1})\\&= P(X_1 \in I_1,\ X_2 \in I_2, \cdots,\ X_{n-1} \in I_{n-1},\ X_n \in \mathbb{R})\\&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \in I_i)\end{aligned}$$

が得られる．したがって，$X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ も独立である．一般に，

> $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であれば，$1 \leq m < n$ と $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ に対し，$X_{j_1}, X_{j_2}, \cdots, X_{j_m}$ も独立である．

補題 3.1.1，注意 3.1.2

補題 3.1.1

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であれば，1 変数関数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ に対して，(Ω, P) 上の確率変数

$$\varphi_1(X_1),\ \varphi_2(X_2),\ \cdots,\ \varphi_n(X_n)$$

も独立である．

注意 3.1.2　X, Y, Z, U, W が独立な確率変数のとき，補題 3.1.1 より，たとえば 5 つの確率変数 X^2, e^Y, $|Z|-1$, U, W^3+2W も独立である．このとき，他にも，2 変数関数 $g(x,y)$, $h(x,y)$ に対して，X, $g(Y,Z)$, $h(U,W)$ が独立であることもわかる．

定理 3.1.1 (独立確率変数の和の分布 I)

定理 3.1.1 (独立確率変数の和の分布 I)

(Ω, P) 上の確率変数 X と Y は独立で，どちらも整数に値を取るとする．このとき和 $X+Y$ の分布は

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=n-k)$$

で与えられる $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

[証明]　$\{X+Y=n\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{X=k,\ Y=n-k\}$ であるため，P の完全加法性と X, Y の独立性より，この事象の確率は

$$P(X+Y=n) = P\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{X=k,\ Y=n-k\}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k,\ Y=n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)P(Y=n-k).$$

系 3.1.1 (独立なベルヌーイ確率変数の和の分布)

次の系 3.1.1 から，独立なベルヌーイ確率変数の和は二項分布に従うことがわかる．

系 3.1.1 (独立なベルヌーイ確率変数の和の分布)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で，各 X_k がベルヌーイ分布 $Be(p)$ に従うとき，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は二項分布 $B(n, p)$ に従う．

系 3.1.1 (独立なベルヌーイ確率変数の和の分布)

[証明]　n に関する数学的帰納法で証明する．$q = 1 - p$ とおく．ベルヌーイ分布 $Be(p)$ は二項分布 $B(1, p)$ であるため，$n = 1$ の場合は主張が成り立つ．n で主張が成立すると仮定し，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1}$ および $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく．このとき，帰納法の仮定より，Y は二項分布 $B(n, p)$ に従う．また，Y と X_{n+1} は独立である．したがって，定理 3.1.1 が適用でき，$l = 1, 2, \cdots, n$ に対して，次式が成り立つ．

$$P(X = l) = P(Y + X_{n+1} = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(Y = k)P(X_{n+1} = l - k).$$

0 と 1 以外の自然数 m に対しては $P(X_{n+1} = m) = 0$ が成り立つため，

$$\begin{aligned} P(X = l) &= P(Y = l - 1)P(X_{n+1} = 1) + P(Y = l)P(X_{n+1} = 0) \\ &= ({}_n\mathrm{C}_{l-1} + {}_n\mathrm{C}_l)p^l q^{n+1-l} = {}_{n+1}\mathrm{C}_l p^l q^{(n+1)-l}. \end{aligned}$$

次の結果も合わせると，X が二項分布 $B(n + 1, p)$ に従うことがわかる．

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(Y = 0)P(X_{n+1} = 0) = q^{n+1}, \\ P(X = n + 1) &= P(Y = n)P(X_{n+1} = 1) = p^{n+1}. \end{aligned}$$

定義 3.2.1

n 個の確率変数を n 次元ベクトルとして並べたものは n 変量確率変数とよばれ，その定義は次のとおりである．

定義 3.2.1

標本空間 Ω 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を n 次元ベクトルとして並べた $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

と定義し，Ω 上の n 変量確率変数とよぶ．なお，Ω 上の確率 P を考えるとき，Ω 上の n 変量確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を (Ω, P) 上の n 変量確率変数とよぶこともある．

当たり 2 本，はずれ 8 本からなる 10 本のくじがあり，A 君が先に 1 本を引き，残りの 9 本のくじから B 君が 2 本を引くとする．このとき，A 君の当たりの本数を X，B 君の当たりの本数を Y とすると，確率 $P(X=i, Y=j)$ は下の表で与えられる．この考え方を一般化して，次頁で同時分布の定義を与える．

Table: 10 本のくじ．

X \ Y	0	1	2	計
0	7/15	14/45	1/45	4/5
1	7/45	2/45	0	1/5
計	28/45	16/45	1/45	1

定義 3.2.2 (同時分布，周辺分布)

X, Y は (Ω, P) 上の確率変数であり，X の取り得る値は相異なる m 個の実数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y$ の取り得る値は相異なる n 個の実数 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ とする．このとき，確率

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad p_i = P(X = x_i), \quad q_j = P(Y = y_j)$$

と (x_i, y_j) との対応を次の表で与え，2 変量確率変数 (X, Y) の同時分布とよぶ．

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

定義 3.2.2 (同時分布，周辺分布)

なお，同時分布の各行，各列の確率の合計は，それぞれ X, Y の離散分布を表すため，次の表を周辺分布とよぶ．

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	1

Y の値	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
確率	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

例 3.2.1 (周辺分布と独立性)

定義 3.2.2 の設定のもとで考察する．このとき，X と Y が独立であるための必要十分条件は，関係式

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \qquad (3, 5)$$
$$(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

をみたすことである．実際に X, Y が独立であれば，(3.5) をみたすことは明らかである．次に，X, Y が (3.5) をみたせば，任意の区間 I, J に対して，式変形

$$P(X \in I, Y \in J) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \in I}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ y_j \in J}} P(X = x_i, Y = y_j)$$
$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \in I}} P(X = x_i) \cdot \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ y_j \in J}} P(Y = y_j) = P(X \in I)P(Y \in J)$$

が成り立つため，X, Y は独立である．

定義 3.2.3 (同時密度関数，同時分布)

2 変量の連続型確率変数の概念を定義するにあたり，「同時密度関数」の概念が必要となる．

定義 3.2.3 (同時密度関数，同時分布)

2 変数関数 $f(x,y)$ が次の 2 条件をみたすとき，同時密度関数とよぶ．

$$f(x,y) \geq 0, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1. \tag{3.6}$$

このとき，任意の長方形 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ に対して

$$\mu_f([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]) = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)dxdy$$

と定義し，この μ_f を (同時密度関数)$f(x,y)$ から定まる同時分布とよぶ．また，$f(x,y)$ を「μ_f の同時密度関数」ともよぶ．

定義 3.2.4

定義 2.1.6 の 1 変量の連続型確率変数の概念を，次のように 2 変量の連続型確率変数の概念に拡張する．

定義 3.2.4

(Ω, P) 上の確率変数 X, Y に対して，ある同時密度関数 $f(x, y)$ が存在して，任意の長方形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ に対して

$$P(a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2) = \mu_f([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$$

が成り立つとき，2 変量確率変数 (X, Y) は $f(x, y)$ から定まる同時分布 μ_f に従うといい，$(X, Y) \overset{\mathrm{pdf}}{\sim} f(x, y)$ や $(X, Y) \sim \mu_f$ と表す．また，$(X, Y) \sim \mu_f$ のとき，$f(x, y)$ を「(X, Y) の同時密度関数」とよぶ．

例 3.2.2 (周辺密度関数と独立性)

定義 3.2.4 の設定のもとで，関数 $g(x)$ と $h(y)$ を次式で定めると，$g(x)$, $h(y)$ はそれぞれ X, Y の密度関数である．

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \tag{3.7}$$

実際に，任意の $a < b$ に対し，式変形

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a \leq X \leq b, -\infty < Y < \infty) \\ &= \iint_{[a,b]\times(-\infty,\infty)} f(x,y)dxdy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right\} dx = \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

が成り立つため，$g(x)$ は X の密度関数である．この $g(x)$ を X の周辺密度関数とよぶ．同様に $h(y)$ は Y の密度関数であり，$h(y)$ を Y の周辺密度関数とよぶ．

例 3.2.2 (周辺密度関数と独立性)

また，(X, Y) の同時密度関数 $f(x, y)$ が条件

$$f(x, y) = g(x)h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (3.8)$$

をみたす場合は，任意の $a < b$ と $c < d$ に対して，

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy$$

$$= \left\{\int_a^b g(x)dx\right\} \cdot \left\{\int_c^d h(y)dy\right\} = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d)$$

が成り立つため，X と Y は独立である．逆に，X と Y が独立のとき，

$$\widetilde{f}(x, y) = g(x)h(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

とおけば，$\widetilde{f}(x, y)$ は (X, Y) の同時密度関数である．

定義 3.2.5 (同時分布と期待値)

X と Y は (Ω, P) 上の確率変数とする．このとき，2 変数関数 $v(x, y)$ に対して，確率変数 $v(X, Y)$ の期待値 $E(v(X, Y))$ を次のように定義する．まず，X の取り得る値が相異なる m 個の実数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ で，Y の取り得る値が相異なる n 個の実数 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ の場合は

$$E(v(X, Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) \quad (3.9)$$

と定義する．次に，(X, Y) の同時密度関数が $f(x, y)$ で与えられる場合は

$$E(v(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} v(x, y) f(x, y) dxdy \qquad (3.10)$$

と定義する．

定理 3.2.1 (期待値の線形性・独立性と積の期待値)

次の定理 3.2.1 は，様々な結果を導き出す重要な役割を持つ．

定理 3.2.1 (期待値の線形性・独立性と積の期待値)

X と Y は (Ω, P) 上の確率変数とする．このとき，2 変数関数 $u(x,y), v(x,y)$ と定数 a,b,c に対して，次式が成り立つ．

$$E(au(X,Y)+bv(X,Y)+c) = aE(u(X,Y)) + bE(v(X,Y)) + c.$$

このことから，定数 a,b,c,d に対して，次式も成り立つ．

$$E(aXY+bX+cY+d) = aE(XY)+bE(X)+cE(Y)+d. \tag{3.11}$$

また，X と Y が独立であれば，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ．

系 3.2.1，系 3.2.2

定理 3.2.1 の前半の「期待値の線形性」に関する主張は，次の系 3.2.1 のように，n 個の確率変数に対する主張に拡張できる．

系 3.2.1

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ と，n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) \\ &= a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n). \end{aligned}$$

定理 3.2.1 の最後の「独立性と積の期待値」に関する主張は，次の系 3.2.2 のように，独立な n 個の確率変数に対する主張に拡張できる．

系 3.2.2

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であれば，

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n).$$

例題 3.2.1 (4 枚のカード)

例題 3.2.1 (4 枚のカード)

4 枚のカード c_1, c_2, c_3, c_4 に

$$c_1 = -2, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -1, \quad c_4 = 2$$

と数字が記入されている．まず，A 君が 1 枚を抜き出し，残りの 3 枚のカードから B 君が 1 枚を抜き出すとき，A 君のカードの数字を X，B 君のカードの数字を Y とする．このとき，(X, Y) の同時分布を作成し，X, Y が独立ではないことを示せ．また，$E(XY)$ と $E(X)E(Y)$ の値，および $V(X+Y)$ と $V(X)+V(Y)$ の値を比較せよ．

例題 3.2.1 (4 枚のカード)

[解答]　$x_1 = y_1 = -2$, $x_2 = y_2 = -1$, $x_3 = y_3 = 2$ かつ $p_i = P(X = x_i)$, $q_j = P(Y = y_j)$, $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ とおき，(X, Y) の同時分布を作成したのが次の表である．

X \ Y	$y_1 = -2$	$y_2 = -1$	$y_3 = 2$	計
$x_1 = -2$	$p_{11} = 0$	$p_{12} = 1/6$	$p_{13} = 1/12$	$p_1 = 1/4$
$x_2 = -1$	$p_{21} = 1/6$	$p_{22} = 1/6$	$p_{23} = 1/6$	$p_2 = 1/2$
$x_3 = 2$	$p_{31} = 1/12$	$p_{32} = 1/6$	$p_{33} = 0$	$p_3 = 1/4$
計	$q_1 = 1/4$	$q_2 = 1/2$	$q_3 = 1/4$	1

まず，$P(X = -2, Y = -2) = 0$ と $P(X = -2)P(Y = -2) = 1/16$ が一致しないため，X と Y は独立ではない．

例題 3.2.1 (4 枚のカード)

[解答 (続き)]　一方で，期待値に関しては，以下の計算結果が得られる．

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -\frac{1}{2}, \quad E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = -\frac{1}{2},$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = \frac{5}{2}, \quad E(Y^2) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 q_j = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} = -\frac{1}{2},$$

$$E((X+Y)^2) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (x_i + y_j)^2 p_{ij} = 4.$$

この計算結果から，$E(X)E(Y) = 1/4$ と $E(XY) = -1/2$ は一致しない．

例題 3.2.1 (4 枚のカード)

[解答 (続き)]　また，

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{4}, \quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{9}{4},$$
$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2 = 4 - (-1)^2 = 3$$

であるため，$V(X+Y) = 3$ と $V(X) + V(Y) = 9/2$ は一致しない．

例 3.2.3

標本空間 Ω は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合であり，面積 (2 次元) を持つとする．また，P は Ω 上の幾何的確率とする．このとき，(Ω, P) 上の確率変数 X, Y を

$$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2 \qquad (\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega)$$

と定めると，2 変量確率変数 (X, Y) の同時密度関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \frac{1}{|\Omega|} 1_\Omega(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

で与えられる．実際に，任意の長方形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ に対して

$$\begin{aligned}
&P(a_1 \leq X \leq b_1,\ a_2 \leq Y \leq b_2) \\
&= P(\Omega \cap ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])) = \frac{|\Omega \cap ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])|}{|\Omega|} \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} 1_\Omega(x, y) dxdy = \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) dxdy
\end{aligned}$$

が成り立つため，$f(x, y)$ は (X, Y) の同時密度関数である．

例題 3.2.2

例題 3.2.2

長さが 2 の線分 AB があり，AB の中点を C とする．AC 上に無作為に点 P を取る．この点 P に対して，AQ の長さが AP の長さの 2 倍になるように AB 上に点 Q を取る．さらに，線分 QB 上に無作為に点 R を取り，$Y=$「線分 QR の長さ」と定める．このとき，$E(Y)$ の値を求めよ．

[解答]　$X=$「線分 AP の長さ」と定め，$Y=$「線分 QR の長さ」と定め，関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/(2-2x) & (0\le x<1,\ 0<y\le 2-2x) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定める．

例題 3.2.2

このとき，任意の区間 I, J に対して次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
P(X \in I, Y \in J) &= \int_0^1 1_I(x) \left(\frac{1}{2-2x} \int_0^{2-2x} 1_J(y)dy \right) dx \\
&= \iint_{I \times J} f(x,y)dxdy.
\end{aligned}
$$

よって，$f(x,y)$ は (X, Y) の同時密度関数であり，Y の周辺密度関数は

$$
h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & (y \leq 0 \text{ または } 2 < y) \\ -\frac{1}{2}\log(y/2) & (0 < y \leq 2) \end{cases}
$$

である．

例題 3.2.2

ここで，ロピタルの定理より，関係式

$$\lim_{y\to+0} y^2 \log y = \lim_{y\to+0} \frac{\log y}{y^{-2}} = \lim_{y\to+0} \frac{y^{-1}}{(-2)y^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to+0} y^2 = 0$$

が成り立つため，この関係式と部分積分公式より，

$$\int_0^2 y \log y dy = 2\log 2 - 1$$

が得られる．したがって，Y の期待値は次のように計算できる．

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = -\frac{1}{2}\int_0^2 y \log\left(\frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{2}.$$

定義 3.2.6 (共分散)

同時分布を特徴付けるために必要な共分散を定義する．

定義 3.2.6 (共分散)

(Ω, P) 上の確率変数 X，Y に対して

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

を X と Y の共分散とよぶ．

$\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ は，「X が $E(X)$ より大きければ，Y も $E(Y)$ より大きくなる傾向がある」ことを示している．
$\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$ は，「X が $E(X)$ より大きければ，Y は $E(Y)$ より小さくなる傾向がある」ことを示している．

定理 3.2.3 (共分散の基本公式)

次の「共分散の基本公式」を証明することができる．

定理 3.2.3 (共分散の基本公式)

(Ω, P) 上の確率変数 X，Y，Z に対して，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) = E(XY) - E(X)E(Y) \\
&(2) \quad \mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y) \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\
&(3) \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) \\
&(4) \quad \mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)
\end{aligned}
$$

定理 3.2.3 (共分散の基本公式)

[証明]
(1)　$E(X)$ と $E(Y)$ は定数であるため，定理 3.2.1 (3.11) より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y).
\end{aligned}
$$

(2)　$E(aX) = aE(X)$, $E(bY) = bE(Y)$ と $E(abXY) = abE(XY)$ であるため，定理 3.2.1 より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(aX, bY) &= E((aX - E(aX))(bY - E(bY))) \\
&= E(a(X - E(X))b(Y - E(Y))) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y).
\end{aligned}
$$

定理 3.2.3 (共分散の基本公式)

[証明 (続き)]
(3)　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ であるため，系 3.2.1 より，

$$
\begin{aligned}
&V(X+Y)=E((X-E(X)+Y-E(Y))^2) \\
&=E((X-E(X))^2+2(X-E(X))(Y-E(Y))+(Y-E(Y))^2) \\
&=V(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y).
\end{aligned}
$$

(4)　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ であるため，系 3.2.1 より，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X+Y,Z)=E((X-E(X)+Y-E(Y))(Z-E(Z))) \\
&=E((X-E(X))(Z-E(Z)))+E((Y-E(Y))(Z-E(Z))) \\
&=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z).
\end{aligned}
$$

注意 3.2.2，系 3.2.3 (独立性と分散の加法性)

注意 3.2.2　(Ω, P) 上の確率変数 X，Y が独立ならば，定理 3.2.1 より，$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ である．よって，定理 3.2.3 より，$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つ．このことを，次の系 3.2.3 で一般化する．

系 3.2.3 (独立性と分散の加法性)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であれば，次式が成り立つ．

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).$$

注意 3.2.3

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立とする．このとき，補題 3.1.1 より，n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して $a_1X_1, a_2X_2, \cdots, a_nX_n$ も独立である．したがって，系 3.2.3 と定理 2.3.3 より，次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&V(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) \\
&= V(a_1X_1) + V(a_2X_2) + \cdots + V(a_nX_n) \\
&= a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + \cdots + a_n^2V(X_n).
\end{aligned}
$$

定義 3.2.7 (相関係数)

共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ は，片方の確率変数が定数倍されれば，共分散の値も定数倍される．以下では，定数倍に関して不変な相関係数 $\rho(X, Y)$ を定義する．

定義 3.2.7 (相関係数)

(Ω, P) 上の確率変数 X, Y は $V(X) > 0$ かつ $V(Y) > 0$ をみたすとする．このとき，

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

を X と Y の相関係数とよぶ．

例 3.2.4 (相関係数の基本性質，無相関)

(Ω, P) 上の確率変数 X, Y は $V(X) > 0$ かつ $V(Y) > 0$ をみたすとする．このとき，相関係数 $\rho(X, Y)$ は -1 以上かつ 1 以下であり，不等式

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1 \qquad (3.15)$$

が成り立つ．このことから，相関の強弱は -1 以上かつ 1 以下の値で測ることができる．$\rho(X, Y)$ が 1 に近ければ「X と Y は正の相関が強い」，-1 に近ければ「X と Y は負の相関が強い」，0 に近ければ「X と Y は相関が弱い」と判断する．なお，$\rho(X, Y) = 0$ が成り立つとき，X と Y は無相関であるという．定数 $a, b > 0$ に対して，次式が成り立つ．

$$\rho(aX, bY) = \frac{\mathrm{Cov}(aX, bY)}{\sqrt{V(aX)V(bY)}} = \frac{ab\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{a^2V(X)b^2V(Y)}} = \rho(X, Y).$$

よって，相関係数は定数倍に関して不変である．

例 3.2.4 (相関係数の基本性質，無相関)

次に，定数 $a \neq 0$ と定数 b に対して $Y = aX + b$ という「線形の関係」(直線的な関係) があるとき，計算結果

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, aX+b)}{\sqrt{V(X)\cdot V(aX+b)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X, aX) + \mathrm{Cov}(X, b)}{\sqrt{V(X)\cdot a^2 V(X)}}$$
$$= \frac{a\mathrm{Cov}(X,X)+0}{|a|V(X)} = \frac{a}{|a|}$$

が得られる．したがって，この「線形の関係」(直線的な関係) があるとき，$|\rho(X,Y)| = 1$ が成り立つ．なお，このように，「X と Y の間に直線的な関係があるほど，相関係数の絶対値が大きくなる」ことも知られている．

例 3.2.5 (無相関と独立性)

(Ω, P) 上の確率変数 X, Y は $V(X) > 0$ かつ $V(Y) > 0$ をみたすとする．
X, Y が独立であれば，$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つため，X と Y は無相関である．逆に，X と Y が無相関であっても X, Y が独立とは限らないことが知られており，以下ではこのことを例を用いて説明する．
標本空間を $\Omega = [0, 2\pi]$ とし，Ω 上の 1 次元の幾何的確率を P とし，確率空間 (Ω, P) 上の確率変数 X, Y を $X(\omega) = \cos\omega$, $Y(\omega) = \sin\omega$ と定める．
このとき，計算結果

$$E(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\omega \ d\omega = 0, \quad E(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\omega \ d\omega = 0,$$
$$E(XY) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\omega \sin\omega \ d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2\omega) d\omega = 0$$

が得られるため，X と Y は無相関である．一方で，計算結果

$$P(X \geq 1/2) = P(Y \geq 1/2) = \frac{1}{3}, \quad P(X \geq 1/2,\ Y \geq 1/2) = \frac{1}{12},$$
$$P(X \geq 1/2,\ Y \geq 1/2) \neq P(X \geq 1/2)P(Y \geq 1/2)$$

も得られるため，X と Y は独立ではない．

例 3.2.6

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であり，各 X_k がベルヌーイ分布 $Be(p)$ に従うとき，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が二項分布 $B(n, p)$ に従うことを系 3.1.1 で証明した．

この事実を用いて，$B(n, p)$ に従う確率変数 X の平均と分散を再計算する．まず，$E(X_k) = p$ と系 3.2.1 より，X の平均は

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np.$$

次に，$V(X_k) = p(1-p)$ と系 3.2.3 より，X の分散は

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = np(1-p).$$

例題 3.2.4

例題 3.2.4

1 円硬貨 10 枚と 5 円硬貨 3 枚を同時に投げるとき，表が出る 1 円硬貨の合計金額を X とし，表が出る 5 円硬貨の合計金額を Y とすると，表が出る硬貨の合計金額は $Z = X + Y$ と表せる．このとき，分散 $V(Z)$ と期待値 $E(XY^2)$ を求めよ．

[解答]　確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ と Y_1, Y_2, Y_3 を

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i\text{ 番目の 1 円硬貨が表}) \\ 0 & (i\text{ 番目の 1 円硬貨が裏}) \end{cases} \quad Y_j = \begin{cases} 1 & (j\text{ 番目の 5 円硬貨が表}) \\ 0 & (j\text{ 番目の 5 円硬貨が裏}) \end{cases}$$

と定めると，この 13 個の確率変数は独立であり，それぞれ同じベルヌーイ分布 $Be(1/2)$ に従う．さらに，X と Y は次のように表せる．

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}, \quad Y = 5(Y_1 + Y_2 + Y_3).$$

例題 3.2.4

[解答 (続き)]　注意 3.2.3 と $V(X_1) = V(Y_1) = (1/2)^2$ より，

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10} + 5(Y_1 + Y_2 + Y_3)) \\
&= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_{10}) + 5^2(V(Y_1) + V(Y_2) + V(Y_3)) \\
&= 10 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times 3 \times \frac{1}{4} = \frac{85}{4}.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．次に，X と Y^2 は独立であり，かつ $E(X) = 10 \times E(X_1) = 5$ であるため，$E(XY^2)$ は

$$
\begin{aligned}
E(XY^2) &= E(X)E(Y^2) = 5\{V(Y) + \{E(Y)\}^2\} \\
&= 5^3\{V(Y_1 + Y_2 + Y_3) + \{E(Y_1 + Y_2 + Y_3)\}^2\} \\
&= 5^3\{V(Y_1) + V(Y_2) + V(Y_3) + \{E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3)\}^2\} \\
&= 5^3\left\{3 \times \frac{1}{4} + \left(3 \times \frac{1}{2}\right)^2\right\} = 375.
\end{aligned}
$$

定理 3.2.4 (独立確率変数の和の分布 II)

次の定理は，様々な結果を導き出す重要な役割を持つため，結果だけでなく証明の考え方も理解することが望ましい．

定理 3.2.4 (独立確率変数の和の分布 II)

(Ω, P) 上の確率変数 X と Y は独立で，X と Y の密度関数がそれぞれ $f(x)$, $g(y)$ で与えられるとする．このとき，和 $Z = X + Y$ の密度関数は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

である．

定理 3.2.4 (独立確率変数の和の分布 II)

[証明]　X, Y の独立性より，(X, Y) の同時密度関数は $f(x)g(y)$ である．任意の $a < b$ に対して $D(a, b) = \{(x, y) \mid a \leq x + y \leq b\}$ とおくと，式変形

$$
\begin{aligned}
&P(a \leq Z \leq b) = P((X, Y) \in D(a, b)) \\
&= \iint_{D(a,b)} f(x)g(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \int_{a-x}^{b-x} g(y)dy \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \int_{a}^{b} g(z-x)dz \right\} dx \qquad (z = x + y) \\
&= \int_{a}^{b} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx \right\} dz = \int_{a}^{b} h(z)dz
\end{aligned}
$$

が成り立つため，Z の密度関数は $h(z)$ である．

系 3.2.4 (正規分布の再生性)

次の系 3.2.4 も重要な役割を持つが，証明中の計算が複雑であるため，初学者は主張を正しく理解できれば十分である．

系 3.2.4 (正規分布の再生性)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，各 X_i は正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従うとする．このとき，

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 + \cdots + X_n \\ &\sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

系 3.2.5 (正規分布の再生性)

系 3.2.4 を一般化すると，次の系 3.2.5 が得られる．

系 3.2.5 (正規分布の再生性)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，各 X_i は正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従うとする．このとき，$a_i \neq 0$ をみたす実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ と実数 b に対して，

$$
\begin{aligned}
&b + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \\
&\sim N\left(b + a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n,\ a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

例 3.2.7 (標本平均の基本性質)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で，各 X_k は同じ分布に従うとする．ここで，平均を $\mu = E(X_k)$，分散を $\sigma^2 = V(X_k)$ とおく．このとき，標本平均とよばれる確率変数

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

について考察する．系 3.2.1 と注意 3.2.3 より，$\overline{X}_n$ の平均と分散は

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} = \mu \qquad (3.19)$$

$$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (3.20)$$

と計算できる．特に，各 X_k が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，系 3.2.5 より，$\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ が成り立つ．したがって，この場合の $\overline{X}_n$ の標準化は

$$\frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1). \qquad (3.21)$$

例題 3.2.6

例題 3.2.6

(Ω, P) 上の確率変数 X と Y が独立で，それぞれ正規分布 $N(2, 3^2)$ と $N(3, 4^2)$ に従うとき，$P(3 \leq X + Y \leq 6)$ の値を求めよ．

[解答]　系 3.2.4 より，$X + Y$ は正規分布 $N(5, 5^2)$ に従う．したがって，$X + Y$ の標準化 $Z = (X + Y - 5)/5$ は $N(0, 1)$ に従う．関数 $p(u) = P(0 \leq Z \leq u)$ と表 C.1 を用いると，求める確率は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
&P(3 \leq X + Y \leq 6) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.2) \\
&= P(-0.4 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.2) \\
&= P(0 \leq Z \leq 0.4) + P(0 \leq Z \leq 0.2) \\
&= p(0.4) + p(0.2) = 0.2347.
\end{aligned}
$$

定義 3.2.8 (χ^2-分布)，例 3.2.8

統計的推定や統計的仮説検定を理解するために必要なカイ二乗分布を定義する．

定義 3.2.8 (χ^2-分布)

(Ω, P) 上の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，各 X_i が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ の従う分布を自由度 n の χ^2-分布 (カイ二乗分布) とよび，記号 $\chi^2(n)$ で表す．

例 3.2.8　定義 3.2.8 の設定のもとで，$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ の平均と分散は $E(\chi_n^2) = n$，$V(\chi_n^2) = 2n$ と計算できる．

系 3.2.6，注意 3.2.5

定理 3.2.4 を用いると，カイ二乗分布の密度関数を求めることができる．

系 3.2.6

自由度 n の χ^2-分布 $\chi^2(n)$ の密度関数は次式で与えられる．

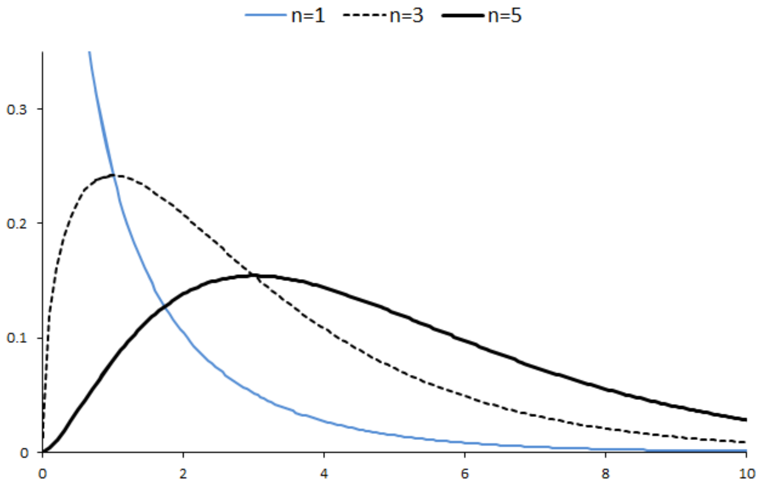
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases} \tag{3.25}$$

注意 3.2.5　(3.25) より，$\chi^2(n)$ の密度関数 $f_n(x)$ の微分は

$$f_n'(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-2}(n-2-x)e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0)$$

と計算できる．$n = 1, 2$ のとき，$f'(x) < 0$ $(x > 0)$ であり，$f_n(x)$ $(x > 0)$ は単調に減少する．一方で，$n \geq 3$ のとき，$f_n(x)$ は $0 < x < n-2$ で単調に増加し，$x > n-2$ で単調に減少し，$x = n-2$ で極大値を持つ．

図 3.1 カイ二乗分布 $\chi^2(n)$ の密度関数 $(n = 1, 3, 5)$.



定義 3.2.9 (t-分布)，例 3.2.9

統計的推定や統計的仮説検定を理解するために必要な t-分布を定義する．

定義 3.2.9 (t-分布)

(Ω, P) 上の確率変数 X と Y は独立であり，X は $N(0,1)$ に従い，Y が自由度 n の χ^2-分布 $\chi^2(n)$ に従うとする．このとき，$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ の従う分布を自由度 n の t-分布とよび，記号 $t(n)$ で表す．

例 3.2.9　定義 3.2.9 の設定のもとで $n \geq 2$ とし，$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ の平均と分散を計算すると，T の平均は $E(T) = 0$ であり，T の分散は

$$V(T) = \infty \quad (n = 2), \qquad V(T) = \frac{n}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

系 3.2.7，注意 3.2.6

系 3.2.7

自由度 n の t-分布 $t(n)$ の密度関数は

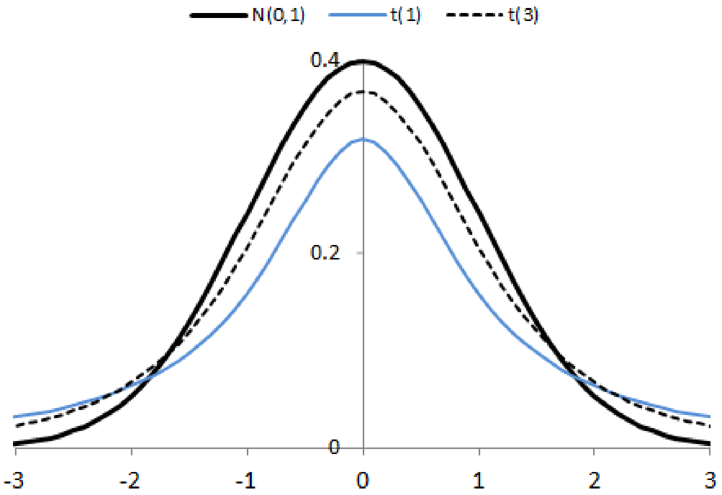
$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (-\infty < t < \infty) \qquad (3.34)$$

である．また，この密度関数 $f_n(t)$ は次の漸近的な性質を持つ．

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \quad (-\infty < t < \infty). \qquad (3.35)$$

注意 3.2.6　(3.35) より，n が大きいとき，$t(n)$ の密度関数は標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数に近づく．

図 3.2 t-分布 $t(n)$ $(n = 1, 3)$ と $N(0, 1)$ の密度関数.



定義 3.3.1 (多項分布)

定義 3.3.1 (多項分布)

自然数 k は $k \geq 2$ とし，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ は

$$p_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq k), \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

をみたすとする．(Ω, P) 上の k 変量確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ が

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

$$\left(\text{ただし各 } x_i \text{は } \sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ をみたす 0 以上の整数} \right)$$

をみたすとき，$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ は多項分布 $M(n; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ に従うといい，$(X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim M(n; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ と表す．

注意 3.3.1，注意 3.3.2

注意 3.3.1　$(X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim M(n; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ であるとき，次式が成り立つ．

$$X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_k(\omega) = n \quad (\omega \in \Omega). \tag{3.37}$$

注意 3.3.2　1 回の試行の結果が，2 条件

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j), \qquad \Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

をみたす k 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ に分類される試行を考える．ここで，各事象の発生確率は $p_i = P(A_i)$ と定める．この試行を独立に n 回繰り返したとき，事象 A_i の発生回数を X_i とすると，$(X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim M(n; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ が成り立つ．なお，確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき，2 変量確率変数 $(X, n - X)$ は

$$(X, n - X) \sim M(n; p, 1 - p).$$

定理 3.3.1

定理 3.3.1

(Ω, P) 上の k 変量確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ が多項分布 $M(n; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ に従うとする．このとき，各 X_i の周辺分布は二項分布 $B(n, p_i)$ である．また，$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq k$ と $\sum_{l=1}^{m} x_{j_l} \leq n$ をみたす 0 以上の整数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&P(X_{j_1} = x_{j_1}, \cdots, X_{j_m} = x_{j_m}) \qquad (3.38) \\
&= \frac{n!}{x_{j_1}! \cdots x_{j_m}! (n - \sum_{l=1}^{m} x_{j_l})!} p_{j_1}^{x_{j_1}} \cdots p_{j_m}^{x_{j_m}} \left(1 - \sum_{l=1}^{m} p_{j_l}\right)^{n - \sum_{l=1}^{m} x_{j_l}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，$1 \leq i < j \leq k$ に対して次も成り立つ．

$$
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j, \quad \rho(X_i, X_j) = \frac{-\sqrt{p_ip_j}}{\sqrt{(1-p_i)(1-p_j)}}. \qquad (3.39)
$$

例題 3.3.1

例題 3.3.1

1 個のさいころを 10 回投げる試行を行い，X_i, Y, Z を

$$\begin{aligned} X_i &= i \text{ の目が出る回数} \quad (1 \leq i \leq 6), \\ Y &= X_1 + X_3 + X_5 = \text{奇数の目が出る回数}, \\ Z &= X_2 + X_4 + X_6 = \text{偶数の目が出る回数} \end{aligned}$$

と定める．このとき，次の値を計算せよ．

$$E(X_1 + X_2^2), \quad \rho(X_1, X_2), \quad \rho(X_1, Y), \quad \rho(X_2, Y), \quad \rho(Y, Z),$$
$$P(X_2 = 1, Y = 3).$$

[解答]　$(X_1, X_2, \cdots, X_6)$ は $M(10; 1/6, 1/6, \cdots, 1/6)$ に従い，各 X_i は $B(10, 1/6)$ に従い， Y, Z は $B(10, 1/2)$ に従う．

例題 3.3.1

[解答 (続き)]　まず，計算結果

$$E(X_i) = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}, \quad E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = \frac{25}{6}$$

より，$E(X_1 + X_2^2) = E(X_1) + E(X_2^2) = 35/6$．次に，(3.39) より，

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{-\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}}{\sqrt{(1 - \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{6})}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{1}{5}$$

である．ここで，定理 3.2.3 と (3.39) より，次の計算結果が得られる．

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1, Y) &= V(X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Cov}(X_1, X_5) \\ &= 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} - 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

$$\rho(X_1, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, Y)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}\sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例題 3.3.1

[解答 (続き)]　同様に計算すると，次の計算結果も得られる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_2, Y) &= \mathrm{Cov}(X_2, X_1) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_5)\\ &= -10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{6},\\ \rho(X_2, Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_2, Y)}{\sqrt{V(X_2)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}\sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

なお，$Z = 10 - Y$ と例 3.2.4 より，$\rho(Y, Z) = -1$ である．また，

$$(X_2, X_4, X_6, Y) \sim M(10; 1/6, 1/6, 1/6, 1/2)$$

であるため，(3.38) より，次の計算結果を得る．

$$P(X_2 = 1, Y = 3) = \frac{10!}{1!3!6!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)^6 = \frac{35}{1458}.$$

定理 3.4.1

2 変量確率変数 (X, Y) が 2 次元正規分布に従うとき，重積分の変数変換公式を用いると，次の定理を証明できる．

定理 3.4.1

$-1 < \rho < 1$, μ_x, μ_y, $\sigma_x > 0, \sigma_y > 0$ は定数とし，

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}D_{x,y}^2\right),$$

$$D_{x,y}^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}$$

と定めると，$f(x,y)$ は同時密度関数である．この $f(x,y)$ から定まる同時分布を 2 次元正規分布とよび，記号 $N(\mu_x, \mu_y; \sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)$ で表す．(Ω, P) 上の 2 変量確率変数 (X, Y) が $N(\mu_x, \mu_y; \sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)$ に従うとき，X, Y はそれぞれ $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従い，$\rho(X, Y) = \rho$ が成り立つ．

系 3.4.1

例 3.2.5 で解説したように，X と Y が無相関で $\rho(X,Y)=0$ であっても X,Y が独立とは限らない．しかし，(X,Y) が 2 次元正規分布に従うとき，X と Y が無相関であれば X,Y は独立である．

系 3.4.1

(Ω,P) 上の 2 変量確率変数 (X,Y) が $N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$ に従うとする．このとき，X と Y が独立であるための必要十分条件は，$\rho=0$ が成り立つことである．

[証明]　定理 3.4.1 より，X,Y はそれぞれ $N(\mu_x,\sigma_x^2)$, $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ に従い，かつ $\rho(X,Y)=\rho$ が成り立つ．まず，X,Y が独立のとき，例 3.2.5 より，$\rho=\rho(X,Y)=0$ が成り立つ．逆に，$\rho=\rho(X,Y)=0$ が成り立つとする．このとき，$N(\mu_x,\mu_y;\sigma_x^2,\sigma_y^2;\rho)$ の同時密度関数 $f(x,y)$ は，X の周辺密度関数 $g(x)$ と Y の周辺密度関数 $h(y)$ を用いて $f(x,y)=g(x)h(y)$ と表せる．したがって，例 3.2.2 より，X と Y は独立である．

例題 3.4.1

例題 3.4.1

(Ω, P) 上の 2 変量確率変数 (X, Y) が 2 次元正規分布 $N(\mu_x, \mu_y; \sigma_x^2, \sigma_y^2; \rho)$ に従うとき，期待値 $E(XY)$ を求めよ．

[解答]　$XY = (X - \mu_x + \mu_x)(Y - \mu_y + \mu_y)$ と表し，右辺を

$$XY = (X - \mu_x)(Y - \mu_y) + \mu_y(X - \mu_x) + \mu_x(Y - \mu_y) + \mu_x\mu_y$$

と展開する．この展開式の両辺の期待値を取ると，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} E(XY) &= E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) + \mu_y E(X - \mu_x) \\ &\quad + \mu_x E(Y - \mu_y) + \mu_x\mu_y \\ &= \mathrm{Cov}(X, Y) + \mu_x\mu_y = \rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y. \end{aligned}$$