大数の法則と中心極限定理

目次

本スライドの内容

このスライドは，次の書籍の第 5 章「大数の法則と中心極限定理」の内容に基づく．

- 『ガイダンス 確率統計：基礎から学び本質の理解へ』，発行：サイエンス社，ISBN：978-4-7819-1526-5.

書籍に関する最新の情報は，以下の URL から入手することができます．

`https://www.saiensu.co.jp`

この URL は，サイエンス社が運営しているホームページです．

概要

このスライドでは，確率論・統計学における基本定理である大数の法則と中心極限定理について解説する．大数の法則とは，「同じ分布に従う独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ は，n を大きくするにつれ，真の平均 $\mu = E(X_k)$ に収束する」と主張する法則である．なお，大数の法則は，大数の弱法則と大数の強法則に分類される．次に，$\overline{X}_n$ がどの程度の速さで真の平均 μ に収束するかを示す定理として，中心極限定理がある．中心極限定理は，「$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$ の分布の形が，n を大きくするにつれ正規分布の形に近づく」と主張する定理である．このスライドでは，(Ω, P) は確率空間を表すものとする．また，このスライド以降では様々な近似計算を行うが，近似計算を行うときに実数 a と b の値が十分近いことを $a \approx b$ と表記する．

例 5.1.1

1 枚の硬貨を何回も続けて投げるとする．このとき，

表が出る割合は 1/2 に近づく

という経験的法則が知られている．ここで，k 回目に硬貨を投げ，表が出れば $X_k = 1$ と定め，裏が出れば $X_k = 0$ と定める．よって，硬貨を合計 n 回投げるときに表が出る割合は，標本平均

$$\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$$

で表せる．そのため，この経験的法則によると「$\overline{X}_n$ は 1/2 に近づく (収束する)」はずである．この主張を多少の誤差を許容して正当化するのが大数の弱法則であり，誤差を許容せずに「$\overline{X}_n$ は 1/2 に近づく (収束する)」と主張するのが大数の強法則である．大数の強法則は (証明は難しいが) 主張を理解することは容易である．

例 5.1.1

そのため，この硬貨投げの例を通じて大数の弱法則の主張を説明する．まず，系 3.1.1 より，

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n, 1/2).$$

したがって，たとえば許容する誤差が 0.1 の場合において，「標本平均 $\overline{X}_n$ が 0.5 を中心として誤差 0.1 の範囲に収まる確率」(合計 n 回のうち表が出る割合が 0.4 以上かつ 0.6 以下の確率) は，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X}_n - 0.5| \leq 0.1) &= P(0.4 \leq \overline{X}_n \leq 0.6) \\
&= P\left(\frac{2n}{5} \leq X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq \frac{3n}{5}\right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 2n/5 \leq k \leq 3n/5}} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^n. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

例 5.1.1

様々な n に対し，この確率 (5.1) を計算することで，計算結果

$$
\begin{aligned}
P(|\overline{X}_{10} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.656, & P(|\overline{X}_{20} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.737, \\
P(|\overline{X}_{30} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.799, & P(|\overline{X}_{40} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.846, \\
P(|\overline{X}_{50} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.881, & P(|\overline{X}_{100} - 0.5| \leq 0.1) &\approx 0.965
\end{aligned}
$$

が得られる．この計算結果から，「n を大きくすると $P(|\overline{X}_n - 0.5| \leq 0.1)$ は 1 に近づく (収束する)」と推測できる．この推測を一般化すると大数の弱法則が得られる．

定理 5.1.1 (大数の弱法則)

定理 5.1.1 (大数の弱法則)

(Ω, P) 上の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ は独立で，各 X_k が同じ分布に従い，平均 $\mu = E(X_k)$ が存在し，分散 $\sigma^2 = V(X_k)$ が有限とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \qquad (5.2)$$

が成り立つ．

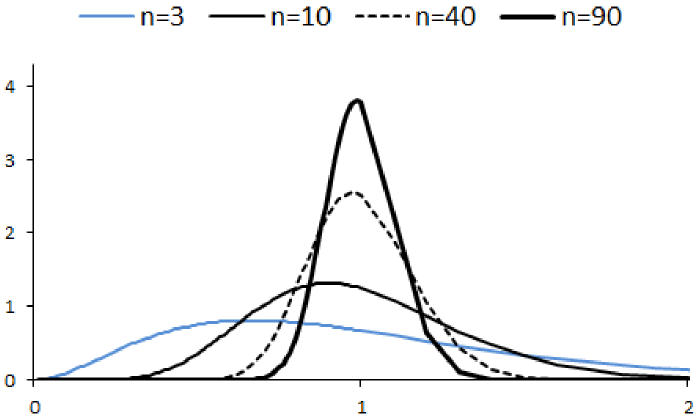
[証明] $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ とおくと，例 3.2.7 の (3.19) と (3.20) より，$E(\overline{X}_n) = \mu$ かつ $V(\overline{X}_n) = \sigma^2/n$ である．したがって，$\overline{X}_n$ に対してチェビシェフの不等式 (2.35) を適用すると，不等式

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \varepsilon) = 1 - P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} V(\overline{X}_n) = 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

が得られる．この不等式において $n \to \infty$ とすると，(5.2) が得られる．

図 5.1 大数の弱法則の概念図.

各 X_k が Exp(1) に従うときの $\overline{X}_n$ の密度関数 ($n = 3, 10, 40, 90$).



定理 5.1.2 (大数の強法則)

なお，大数の弱法則の結論 (5.2) を，標本点 ω を略さずに正確に書くと，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - \mu\right| \leq \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

大数の弱法則は，「"$\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ が μ を中心として誤差 ε の範囲に収まる確率" は，n が大きくなるにつれて 1 に収束する」と主張する．この大数の弱法則の主張をふまえ，「"$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n$ が最終的に μ と一致する確率" は 1 である」と主張するのが大数の強法則である．

定理 5.1.1 (大数の強法則)

(Ω, P) 上の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ が独立で，各 X_k が同じ分布に従い，平均 $\mu = E(X_k)$ が存在するとする．このとき，次の関係式が成り立つ．

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mu\right) = 1. \qquad (5.3)$$

注意 5.1.1

定理 5.1.2 の結論 (5.3) を，標本点 ω を略さずに正確に書くと，

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \mu\right\}\right) = 1 \qquad (5.4)$$

と表せる．以下では，この結論 (5.4) を，より強い主張

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \mu \quad (\omega \in \Omega) \qquad (5.5)$$

に変更できないことを，例 5.1.1 (硬貨を何回も投げる試行) を用いて説明する．まず，任意の $k \geq 1$ に対して $X_k(\omega_1) = 0$, $X_k(\omega_2) = 1$ をみたす標本点 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ を取る．このとき，ω_1 は「すべて裏が出る結果」を表し，ω_2 は「すべて表が出る結果」を表す．この標本点 ω_1, ω_2 に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega_1) = 0 < \mu = \frac{1}{2} < 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega_2)$$

が得られるため，(5.5) は成立しないことがわかる．

注意 5.1.1

ω_1, ω_2 以外にも，各 $k \geq 1$ に対して関係式

$$X_{3k-2}(\omega_3) = X_{3k-1}(\omega_3) = 0, \quad X_{3k}(\omega_3) = 1,$$
$$X_{3k-2}(\omega_4) = X_{3k-1}(\omega_4) = 1, \quad X_{3k}(\omega_4) = 0$$

をみたす標本点 $\omega_3, \omega_4 \in \Omega$ を取れば，不等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega_3) = \frac{1}{3} < \mu = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega_4)$$

が得られるため，この不等式からも (5.5) は成立しないことがわかる．ここで，標本点 ω_3 は「3 の倍数のとき表が出て，それ以外は裏が出る結果」を表し，標本点 ω_4 は「3 の倍数のとき裏が出て，それ以外は表が出る結果」を表す．なお，(5.5) が成立しない標本点は $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 以外にも無数に存在することが知られている．大数の強法則の結論 (5.3) は，「(5.5) が成立しない標本点の生起確率は 0 で無視可能であり，無視できる標本点を除けばほとんど確実に (5.5) が成立する」と主張する．

注意 5.1.1

以下では実際に，$P(\{\omega_i\})$ $(1 \leq i \leq 4)$ の値を計算してみる．まず，任意の自然数 n に対して次が成り立つ．

$$\omega_1 \in \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = X_2(\omega) = \cdots = X_n(\omega) = 0\},$$

$$P(\{\omega_1\}) \leq P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = X_2(\omega) = \cdots = X_n(\omega) = 0\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

よって，$n \to \infty$ とすることで，$P(\{\omega_1\}) = 0$ が得られる．他の ω_i $(2 \leq i \leq 4)$ についても同様に議論することで，$P(\{\omega_i\}) = 0$ が得られる．

例題 5.1.1

例題 5.1.1

$a > 0$ は定数とし，(Ω, P) 上の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ は独立で，各 X_k は一様分布 $U(-a, a)$ に従うとする．このとき，次をみたす実数 m_1, m_2, m_3 を求めよ．

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{e^{X_1}+e^{X_2}+\cdots+e^{X_n}}{n}=m_1\right)=1, \qquad (5.7)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}=m_2\right)=1, \qquad (5.8)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{e^{X_1}+e^{X_2}+\cdots+e^{X_n}}=m_3\right)=1. \qquad (5.9)$$

例題 5.1.1

[解答]　補題 3.1.1 より，確率変数の列 $e^{X_1}, e^{X_2}, \cdots, e^{X_k}, \cdots$ は独立である．また，補題 A.6.1 より，各 e^{X_k} は同じ分布に従う．同様に，確率変数の列 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_k^2, \cdots$ も独立であり，各 X_k^2 は同じ分布に従う．また，各 e^{X_k} と X_k^2 の平均は次のように計算できる．

$$E(e^{X_k}) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^x dx = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}, \quad E(X_k^2) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{a^2}{3}.$$

したがって，大数の強法則 (定理 5.1.2) より，2 つの関係式

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^{X_1} + e^{X_2} + \cdots + e^{X_n}}{n} = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}\right) = 1, \qquad (5.10)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} = \frac{a^2}{3}\right) = 1 \qquad (5.11)$$

が得られる．よって，(5.10) より，$m_1 = (e^a - e^{-a})/(2a)$ がわかり，(5.11) より，$m_2 = a^2/3$ がわかる．

例題 5.1.1

[解答 (続き)]　次に，一般に数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta\ (\neq 0)$ のとき $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ が成り立つため，次の「事象の包含関係」を得る．

$$
\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{X_1} + \cdots + e^{X_n}}{n} = \frac{e^a - e^{-a}}{2a}\right\} \cap \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} = \frac{a^2}{3}\right\}
$$
$$
\subset \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{e^{X_1} + \cdots + e^{X_n}} = \frac{2a^3}{3(e^a - e^{-a})}\right\}. \qquad (5.12)
$$

ここで，(5.10)，(5.11) と系 1.2.1 より，「(5.12) の左辺の積事象」の確率は 1 である．よって，定理 1.2.1 (単調性) より，「(5.12) の右辺の事象」の確率は 1 以上である．一方で，確率は 1 以下の値しか取り得ないため，「(5.12) の右辺の事象」の確率は 1 である．したがって，
$m_3 = 2a^3/(3(e^a - e^{-a}))$ である．

例題 5.1.3

例題 5.1.3

R を座標平面上の正方形 $R = [0,1] \times [0,1]$ とし，D を R 内の四分円 $D = \{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．R 内に無作為に取った n 個の点のうち，D に含まれる点の個数を $N_n(D)$ とする．このとき，次の関係式をみたす実数 μ を求めよ．

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(D)}{n} = \mu\right) = 1.$$

例題 5.1.3

[解答]　R 内に無作為に取った n 個の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ に対して，確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を

$$X_k(\omega) = 1_D(\mathrm{P}_k(\omega)) = \begin{cases} 1 & (\mathrm{P}_k(\omega) \in D) \\ 0 & (\mathrm{P}_k(\omega) \notin D) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega)$$

と定める．このとき，$N_n(D)(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ と表せる．$p = |D|/|R| = \pi/4$ とおくと，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で，各 X_k は同じベルヌーイ分布 $Be(p)$ に従う．したがって，$E(X_k) = p = \pi/4$ と大数の強法則 (定理 5.1.2) より，関係式

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(D)}{n} = \frac{\pi}{4}\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

が得られる．よって，$\mu = \pi/4$ である．

はじめに (1)

(Ω, P) 上の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ は独立であり，各 X_k は同じ分布に従い，平均 $\mu = E(X_k)$ が存在し，分散 $\sigma^2 = V(X_k)$ は有限であるとする．このとき，S_n を

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと，系 3.2.1 と系 3.2.3 より，S_n の平均と分散は

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\mu,$$
$$V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = n\sigma^2$$

と計算できる．よって，定義 2.3.2 より，S_n の標準化 Z_n は

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right) \qquad (5.44)$$

と表せる．ここで，$E(S_n) = n\mu$ は S_n の分布の “重心” を表し，$\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ は S_n の分布の「“重心” を基点とした左右の散らばり度合い」を表す．

はじめに (2)

たとえば $\mu > 0$ の場合を考えると，$\lim_{n\to\infty} E(S_n) = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} \sigma(S_n) = \infty$ であるため，n が大きくなるにつれて，S_n の分布は，“重心” $E(S_n)$ を右に移しながら，「“重心” を基点とした左右の散らばり度合い」$\sigma(S_n)$ を増し，S_n の確率関数や密度関数の高さを低くしていく．そこでまず，$S_n - E(S_n)$ の分布を考えることで，S_n の分布の “重心” $E(S_n) = n\mu$ を原点に移して固定する「分布の左右の平行移動操作」を行う．その次に，$Z_n = (S_n - E(S_n))/\sigma(S_n)$ の分布を考えることで，$S_n - E(S_n)$ の分布の「左右の散らばり度合い」を 1 に整え，n を大きくしても確率関数や密度関数の高さが 0 につぶれないように保つ分布操作を行う．そして，「このように S_n の分布を操作して作った Z_n の分布の形が，n が大きくなるにつれて $N(0, 1)$ の分布の形に近づく」と主張するのが次頁の中心極限定理である．

定理 5.2.1 (中心極限定理)

定理 5.2.1 (中心極限定理)

(Ω, P) 上の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$ は独立で，各 X_k は同じ分布に従い，平均 $\mu = E(X_k)$ が存在し，分散 $\sigma^2 = V(X_k)$ は有限とする．このとき，S_n を

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の $a < b$ に対して次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (5.45)$$

図 5.2　中心極限定理の概念図

各 X_k が Exp(1) に従うときの S_n の密度関数

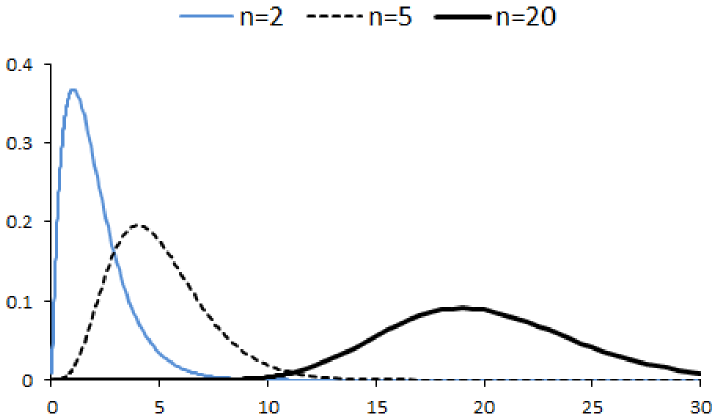
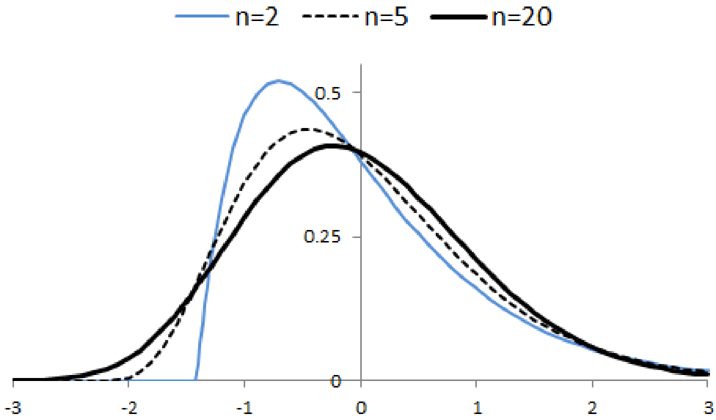


図 5.2　中心極限定理の概念図

各 X_k が Exp(1) に従うときの Z_n の密度関数



例題 5.2.1 (内閣支持率)

例題 5.2.1 (内閣支持率)

ある国の有権者の内閣支持率が 20%であるとき，無作為に抽出した 400 人の有権者の内閣支持率を R とする．このとき，R が 19.3%以上かつ 20.5%以下である確率を，中心極限定理を用いて有効数字 4 桁まで求めよ．

例題 5.2.1 (内閣支持率)

[解答]　$p = 0.2$ かつ $n = 400$ とおく．k 番目の人が内閣を支持するときは $X_k = 1$ と定め，支持しないときは $X_k = 0$ と定める．このとき，各 X_k はベルヌーイ分布 $Be(p)$ に従う確率変数であり，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立と仮定してよい．また，$R = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n = S_n/n$ と表せる．したがって，中心極限定理 (定理 5.2.1) より，確率変数

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{nR - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(R-p)}{\sqrt{p(1-p)}}$$

の分布が，標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できると考えることで，(2.18) で定義した関数 $p(u)$ と表 C.1 を用いて，求める確率は次のように近似計算できる．

$$\begin{aligned} P(0.193 \leq R \leq 0.205) &= P\left(-0.35 \leq Z_n \leq 0.25\right) \\ &\approx p(0.35) + p(0.25) = 0.1368 + 0.0987 = 0.2355. \end{aligned}$$