2022.07.14

サイエンス社 ライブラリ「新数学基礎テキスト（河東泰之 編集)」

ガイダンス線形代数（増岡彰 著） テキストで省略した証明

以下において，章，節，ページ等の番号はテキストのそれらを指す．

定理 2.5 (p.34) **の証明**　$m \times n$ 非零行列 A に何回かの行基本変形を施し，2 通りの階段行列 B, C が得られたとする．注意として，行基本変形の逆（が存在し，それ）が行基本変形であるから，B に何回かの行基本変形を施すことで（A が，さらに）C が得られ，従って 2 つの斉次連立 1 次方程式

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が同一の解をもつ．

$B = C$ を，列の個数 n に関する帰納法で示す．

$n = 1$ の場合，B, C はともに第 1 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ に一致する．

$n > 1$ として，A, B, C から第 n 列を取り去って得られる $m \times (n-1)$ 行列を A', B', C' とする．B', C' はともに，A' に何回かの行基本変形を施して得られる階段行列である．

A' が零行列 O の場合，$B' = C' = O$ であり，$n = 1$ の場合の結果から，(B の第 n 列)$=$ (C の第 n 列)$= \boldsymbol{e}_1$．よって $B = C$.

$A' \neq O$ とする．帰納法の仮定から $B' = C'$．従って B, C は（3.7 節のブロック分割を用い）

$$B = \begin{bmatrix} F & \boldsymbol{p} \\ O & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} F & \boldsymbol{p}' \\ O & \boldsymbol{q}' \end{bmatrix}$$

の形をしている．ここに，ある $1 \leqq r \leqq m$ に対し，F は $r \times (n-1)$ 階段行列，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ は r 次列ベクトルである．さらに，左下部の O は $(m-r) \times (n-1)$ 零行列，$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ は $(m-r)$ 次列ベクトルである（$r = n$ の場合，これらは無きものと理解する)．

(i) まず，B において第 n 列が助列であるとする．すると，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ であって，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は第 n 成分が 1 であるような解

$${}^t[\cdots, 0, -p_1, 0, \cdots, 0, -p_2, 0, \cdots, 1]$$

をもつ．これは，F の第 i 主列（$1 \leqq i \leqq r$）と同じ位置に $\boldsymbol{p} = {}^t[p_1, p_2, \cdots, p_r]$ の第 i 成分 p_i の (-1) 倍が並び，それらと第 n 成分を除く成分がすべて 0 であるようなベクトルである．冒頭の注意から，$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ もこれを解にもつ．これより，C においても第 n 列は助列（すなわち $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{0}$）であって，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$ でなければならない．

(ii) 次に，B において第 n 列が主列である（$r < n$ の場合に限る）と仮定すると，それは第 $(r+1)$ 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{r+1}$ である．このとき C においても同じでなければならない．実際，そうでないとすると，(i) の議論において B と C の立場を逆転させれば，B において第 n 列が助列となり，仮定に反する．
こうして (i),(ii) いずれの場合も $B = C$ が成り立つ．

定理 4.33 (p.103) **の証明**　σ を n 次置換とする．σ がいくつかの互換の積として表せることは，すでに定理の前で示されている．ただし $n = 1$ の場合，置換は恒等置換 $\epsilon = \binom{1}{1}$（p.103 を見よ）に限る．これは 0 個の互換の積として一意的に表されると理解して，定理が成り立つ．以下 $n > 1$ として，σ が $k\,(>0)$ 個の互換 τ_i の積として $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$ と表された場合，σ が偶置換か奇置換か，すなわち転倒数 $\ell(\sigma)$（下の等式 (1) の直後を見よ）が偶数か奇数か，に従って k も偶数か奇数であることを示すのを目標とする．

n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の差積

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) =&(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)\\ &\times (x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)\\ &\ddots\\ &\times (x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

を考えよう．これは n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の整数係数多項式で，あらゆる $1 \leqq i < j \leqq n$ に対する差 $(x_i - x_j)$ すべて（$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 項ある）の積である．いま

$$\begin{aligned}\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) =&(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})\cdots(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(n)})\\ &\times (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})\cdots(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(n)})\\ &\ddots\\ &\times (x_{\sigma(n-1)} - x_{\sigma(n)})\end{aligned}$$

を考えよう．$1 \leqq i < j \leqq n$ に対し，$(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$ は，

- $\sigma(i) < \sigma(j)$ ならば，それ自身が
- $\sigma(i) > \sigma(j)$ ならば，その (-1) 倍が

$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の中に現れる．従って，それらすべての積として

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^{\ell(\sigma)}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

を与える．ここに，$\ell(\sigma)$ は p.100 にある通り，置換 σ に対応する順列

$$(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$$

の転倒数である．とくに互換 $\tau = (s, t)$（ただし $1 \leqq s < t \leqq n$ とする）に対しては，対応する順列

$$(1, 2, \ldots, s-1, t, s+1, \ldots, t-1, s, t+1, \ldots, n)$$

の転倒数が奇数 $(2(t-s)+1)$ である（この順列の中で転倒しているのが，t と $s+1, \ldots, t-1$ のそれぞれ，$s+1, \ldots, t-1$ のそれぞれと s，最後に t と s）から

$$\Delta(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

が成り立つ．

ここで一般に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \tag{3}$$

と書くことにする．σ が置換の積 $\rho\delta$ の場合

$$((\rho\delta)f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\rho(\delta f))(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

が成り立つ[*1]．

さて (3) の記法を用いると，等式 (1), (2) はそれぞれ

$$(\sigma\Delta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{\ell(\sigma)}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$
$$(\tau\Delta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6}$$

と表せる．いま σ が，k 個の互換の積として $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$ と表せたとすると

$$(\sigma\Delta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((\tau_1\tau_2\cdots\tau_k)\Delta)(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{7}$$

この左辺は (5) により

$$(-1)^{\ell(\sigma)}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[*1] (4) の右辺は，変数変換 $y_i = x_{\delta(i)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ により得られる $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に，さらに変数変換 $z_i = y_{\rho(i)}$ $(= x_{\rho\delta(i)})$ を施した $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ $(= f(x_{\rho\delta(1)}, x_{\rho\delta(2)}, \ldots, x_{\rho\delta(n)}))$ を意味する．これは確かに，(4) の左辺に等しい．

に等しく．一方，右辺は (4), (6) を繰り返し用いて次のように変形できる．ただし，ここでは $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を省略する．

$$
\begin{aligned}
&(\tau_1\tau_2\cdots\tau_k)\Delta = (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1})(\tau_k\Delta)\\
&= (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1})(-\Delta) = -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1})\Delta\\
&= -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-2})(\tau_{k-1}\Delta)\\
&= -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-2})(-\Delta)) = (-1)^2(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-2})\Delta\\
&= \cdots = (-1)^k\Delta.
\end{aligned}
$$

こうして (7) は

$$(-1)^{\ell(\sigma)}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^k\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

となり，

$$(-1)^{\ell(\sigma)} = (-1)^k$$

を得る．これより目標とした結果（この証明の第 1 段末を見よ）が従う．

命題 5.11 (p.111) **の証明**　(1) 記述を簡単にするため i を固定し，$\alpha = \alpha_i$ と書き，$d = \dim V_\alpha$ とおく．この d が，固有値 α の重複度以下であることを示すのに，$(x-\alpha)^d$ が $\varPhi_A(x)$ を割ることを示せばよい．V_α の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ と，それを延長した $\mathbb{C}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d, \boldsymbol{v}_{d+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を選ぶ．後者を並べた

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$$

は正則行列である．d 個の等式 $A\boldsymbol{v}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2 = \alpha\boldsymbol{v}_2, \ldots, A\boldsymbol{v}_d = \alpha\boldsymbol{v}_d$，および $A\boldsymbol{v}_{d+1}, A\boldsymbol{v}_{d+2}, \ldots, A\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合として表した $(n-d)$ 個の等式 — 合計 n 個の等式 — をブロック分割（3.7 節）を用いて行列表示して，

$$AP = P\begin{bmatrix} \alpha E_d & * \\ O & C \end{bmatrix}, \quad \text{すなわち}\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha E_d & * \\ O & C \end{bmatrix}$$

を得る．ここに，C はある $(n-d)$ 次正方行列である．5 章末演習問題 2 (1) の結果を用いて

$$\varPhi_A(x) = \varPhi_{P^{-1}AP}(x) = (x-\alpha)^d\,\varPhi_C(x)$$

を得る．従って $(x-\alpha)^d$ は $\varPhi_A(x)$ を割る．

(2) $1 \leqq s \leqq r$ とする．

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

を成り立たせる $\boldsymbol{x}_i \in V_i$ $(i=1,2,\ldots,s)$ が $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\cdots=\boldsymbol{x}_s=\mathbf{0}$ に限ることを示す．$s=r$ の場合のこの主張が証明すべき結果である．
$s=1$ の場合，上の主張は明らかに正しい．$s>1$ の場合，$s-1$ に対し主張が正しいと仮定する．$(*)$ の両辺の左から A を乗じて得られる等式から，α_s を乗じて得られる等式を（左・右辺ごとに）引くと（左辺に関し $A\boldsymbol{x}_i-\alpha_s\boldsymbol{x}_i=(\alpha_i-\alpha_s)\boldsymbol{x}_i$ ゆえ），

$$(\alpha_1-\alpha_s)\boldsymbol{x}_1+(\alpha_2-\alpha_s)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(\alpha_{s-1}-\alpha_s)\boldsymbol{x}_{s-1}=\mathbf{0}.$$

$s-1$ に対する主張から

$$(\alpha_1-\alpha_s)\boldsymbol{x}_1=(\alpha_2-\alpha_s)\boldsymbol{x}_2=\cdots=(\alpha_{s-1}-\alpha_s)\boldsymbol{x}_{s-1}=\mathbf{0}.$$

$(\alpha_1-\alpha_s),(\alpha_2-\alpha_s),\ldots,(\alpha_{s-1}-\alpha_s)$ はすべて非零ゆえ $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\cdots=\boldsymbol{x}_{s-1}=\mathbf{0}$. $(*)$ よりただちに $\boldsymbol{x}_s=\mathbf{0}$．こうして s に対する主張も正しい．帰納的議論により，目標とした $s=r$ に対する主張は正しい.

定理 6.21 (p.121) **の証明**　(a)⇒(b).　(a) を仮定し，ユニタリ行列 U に対して U^*AU が対角行列であるとする．容易にわかるように対角行列は正規行列であるから，U^*AU は $(U^*AU)^*$ と可換.

$$(U^*AU)^*=U^*A^*U \tag{\#}$$

（p.127 1 行目，3 行目の等式を見よ）ゆえ

$$(U^*AU)(U^*A^*U)=(U^*A^*U)(U^*AU).$$

左から U, 右から U^* を乗じ，また各辺の中ほどに $UU^*=E$ を用い $A^*A^*=A^*A$ を得て，(b) が従う．

(b)⇒(a).　(b) を仮定し，すなわち A を n 次正規行列とする．(a) が成り立つこと，すなわち A がユニタリ対角化可能であることを n に関する帰納法で示す．$n=1$ の場合，すべての正方行列が正規かつ対角行列であるから，主張は正しい．
次に進む前に，正規行列の性質として，α が A の固有値で，$\boldsymbol{u}$ が α に関する A の固有ベクトルのとき

(1°)　$\overline{\alpha}$ は A^* の固有値で，$\boldsymbol{u}$ は $\overline{\alpha}$ に関する A^* の固有ベクトルであり，
(2°)　$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$　ならば　$(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})=0$

が成り立つことに注意する．実際，(1°) は

$$\begin{aligned}0 &= ((A-\alpha E)\boldsymbol{u},\ (A-\alpha E)\boldsymbol{u})\\ &= (\boldsymbol{u},\ (A^*-\overline{\alpha}E)(A-\alpha E)\boldsymbol{u})\\ &= (\boldsymbol{u},\ (A-\alpha E)(A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u})\\ &= ((A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u},\ (A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

から従う．ここで，第 1 の等号は $A\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}$，すなわち $(A-\alpha E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ から従う．第 2 の等号には，$B=A-\alpha E,\ \boldsymbol{v}=(A-\alpha E)\boldsymbol{u}$ に対し $(B\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},B^*\boldsymbol{v})$（5 章末演習問題 3）を用い，第 4 の等号には，$B=A-\alpha E,\ \boldsymbol{v}=(A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u}$ に対し $(\boldsymbol{u},B\boldsymbol{v})=(B^*\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ を用いている．第 3 の等号は，A が正規行列ゆえ，$A-\alpha E$ が A^* と，さらに $A^*-\overline{\alpha}E$ と可換なことによる．結論の $((A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u},\ (A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u})=0$ は，$(A^*-\overline{\alpha}E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を，すなわち $A^*\boldsymbol{u}=\overline{\alpha}\boldsymbol{u}$ を意味する．
一方，(2°) を見るため $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ とする．いま示した (1°) を用い（下の第 2 の等号）

$$(\boldsymbol{u},\ A\boldsymbol{v})=(A^*\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=(\overline{\alpha}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\overline{\alpha}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=0.$$

帰納法の議論に戻り，$n>1$ とする．A の固有値 α を 1 つ選び，$\boldsymbol{u}$ をそれに関するノルム 1 の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{u}$ を延長して $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n$$

が選べる．これらを並べた $U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}$ はユニタリ行列である．上の (2°) より，$2\leqq i\leqq n$ に対して $A\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ の線形結合として表せる．それら $(n-1)$ 個の線形結合の表示と $A\boldsymbol{u}_1=\alpha\boldsymbol{u}_1$ を行列表示して

$$AU=U\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B\end{bmatrix}$$

を得る．最後の行列（ブロック分割を用いて表している）の左下部は $(n-1)$ 次零ベクトル，右下部の B は $(n-1)$ 次正方行列である．これより下の第 1 の等式を，その両辺の随伴行列をとり（(#) を用い）第 2 の等式を得る．

$$U^*AU=\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B\end{bmatrix},\quad U^*A^*U=\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B^*\end{bmatrix}.$$

A が正規行列ゆえ，これらの左辺どうしが可換．従って右辺どうしが可換ゆえ

$$\begin{bmatrix}\alpha\overline{\alpha} & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & BB^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\overline{\alpha} & 0\cdots0\\ \boldsymbol{0} & B^*B\end{bmatrix}.$$

これより B は $(n-1)$ 次正規行列である．帰納法の仮定より，ある $(n-1)$ 次ユニタリ行列 P に対して $D = P^*BP$ は対角行列になる．

$$T = \begin{bmatrix} 1\,0\cdots0 \\ \mathbf{0} \quad P \end{bmatrix}$$

とおくと，これは n 次ユニタリ行列であり，積 UT はユニタリ行列である（一般に，2 つのユニタリ行列の積はユニタリ行列．確かめよ）．A は UT により対角化可能．実際

$$\begin{aligned}(UT)^*A(UT) &= T^*(U^*AU)T \\ &= \begin{bmatrix} 1\,0\cdots0 \\ \mathbf{0} \quad P^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\,0\cdots0 \\ \mathbf{0} \quad B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,0\cdots0 \\ \mathbf{0} \quad P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & 0\cdots0 \\ \mathbf{0} & P^*BP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\,0\cdots0 \\ \mathbf{0} \quad D \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

こうして帰納法が完結する．

(c)⇒(a)． (c) を仮定する．V_{α_1} の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$，$V_{\alpha_2}$ の正規直交基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q$，…，$V_{\alpha_r}$ の正規直交基底 $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_s$ を 1 組ずつ選ぶ．これらを寄せ集めると，(c) の条件 (i) により $\mathbb{C}^n$ の基底となり，さらに (ii) により正規直交基底となる．従って

$$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_p \; \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_q & \cdots & \boldsymbol{z}_1 & \cdots & \boldsymbol{z}_s \end{bmatrix}$$

はユニタリ行列になり，

$$\begin{aligned}&A\boldsymbol{v}_1 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_p = \alpha_1\boldsymbol{v}_p, A\boldsymbol{w}_1 = \alpha_2\boldsymbol{w}_1, \ldots, A\boldsymbol{w}_q = \alpha_2\boldsymbol{w}_q, \\ &\ldots\ldots, A\boldsymbol{z}_1 = \alpha_r\boldsymbol{z}_1, \ldots, A\boldsymbol{z}_s = \alpha_r\boldsymbol{z}_s\end{aligned}$$

の（ブロック分割を用いた）行列表示として

$$AU = U \begin{bmatrix} \alpha_1 E_p & & & \\ & \alpha_2 E_q & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r E_s \end{bmatrix}$$

が得られる．左から $U^*\,(= U^{-1})$ を乗じて, U^*AU が最後の対角行列に等しいことがわかり，こうして (a) が従う．

(a)⇒(c)． (a) を仮定する．ユニタリ行列 U に対し，U^*AU が対角行列 D であったとする．上の (c)⇒(a) の議論を遡り，$AU = UD$ を n 個の等式 $A\boldsymbol{u}_i = *\boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ の行列表示と見る．ここに $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \; \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$．$D$ の対角成分は，いくつかの相異なる複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ から成る．同一の対角成分 α_i ごとに，それと同じ位置にある列ベクトル

たちが生成する $\mathbb{C}^n$ の部分空間を V_i とする．こうして得られる部分空間たち $V_1, V_2, \ldots$ が (c) の条件 (i), (ii) を満たすことがわかる．

定理 8.2 (p.159) **の証明**　A を n 次複素正方行列とする．

第 1 段．　命題 8.4（証明を次に与える）に基づくと，pp.168–169 に示されている方法により，正則行列 P をうまく見つけて $P^{-1}AP$ をジョルダン標準形行列にできるから，定理の前半が従う．その方法によると，A の各固有値 α に対し，広義固有空間 W_α の次元 d が固有多項式 $\varPhi_A(x)$ における $(x-\alpha)$ の指数[*2] で与えられる．さらに W_α の図形の列たちの高さを，p.168 の下の図のように，$s \geqq t \geqq \cdots \geqq p$（従って $s+t+\cdots+p=d$）とすれば，$J_s(\alpha)$, $J_t(\alpha), \ldots, J_p(\alpha)$ が $P^{-1}AP$ に含まれる固有値 α のジョルダン細胞のすべてとなる．ただし，$J_*(\alpha)$ は固有値 α の $*$-次ジョルダン細胞を表すものとする．

第 2 段．　定理の後半を示すためまず，P を正則行列とし $B=P^{-1}AP$ とおく．5 章末演習問題 3 (1) により，$\varPhi_A(x)=\varPhi_B(x)$．従って，$A$ と B の固有値は重複度まで込めて一致する．また同演習問題 (2) を一般化して次が確かめられる．両者の各固有値 α と正整数 k に対して

$$W_{A,\alpha}^{(k)} = \mathrm{Ker}((A-\alpha E)^k) \text{ と } W_{B,\alpha}^{(k)} = \mathrm{Ker}((B-\alpha E)^k)$$

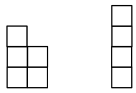
の次元は相等しい（実際，$W_{A,\alpha}^{(k)} = PW_{B,\alpha}^{(k)}$）．従って，2 つの正方行列の α に関する広義固有空間の図形は一致する．結果をまとめると，**固有値のすべてと各固有値に関する広義固有空間の図形は，互いに相似な正方行列**（p.160）**の間で不変である．**

第 3 段．　ところで，ジョルダン標準形行列 J に関しては，固有値のすべてと各固有値に関する広義固有空間の図形は，J の形から直ちに読み取れる．実際，J の対角成分たちが J の固有値のすべてであって，各固有値 α に対し固有値 α のジョルダン細胞すべての次数を非増大順に並べたものが，広義固有空間 W_α の図形の列の高さを左から順に並べたものになる．例えば，$\alpha \neq \beta$ とするとき，ジョルダン標準形行列

$$\begin{bmatrix} J_2(\alpha) & & \\ & J_4(\beta) & \\ & & J_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

の固有値は α（重複度 5），β（重複度 4）であって，広義固有空間 W_α, W_β の図形はそれぞれ

[*2] $\varPhi_A(x) = (x-\alpha)^d((x-\alpha)$ で割られない多項式）で定まる d.



となる（9 次基本ベクトルから成る $\boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_8, \boldsymbol{e}_9, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ および $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_6$ がそれぞれの図形に適合した基底）．

さて，第 2 段の状況で $B = P^{-1}AP$ がジョルダン標準形行列であるとする．第 2 段と上の結果から，B のジョルダン細胞のすべては A の固有値と各固有値に関する広義固有空間の図形から決まる．実際，B の対角成分は A の固有値と重複度を込めて一致する．各固有値 α に対し，A の広義固有空間 W_α の図形の列の高さを，第 1 段にあるように $s \geqq t \geqq \cdots \geqq p$ とすれば，$J_s(\alpha)$, $J_t(\alpha), \ldots, J_p(\alpha)$ が B に含まれる固有値 α のジョルダン細胞のすべてとなる．これは定理の後半を示している．

注意． 問 8.3 の解答（(i)⇐(ii) を見よ）からわかるように，A のジョルダン標準形 B におけるジョルダン細胞たちの順序は，正則行列 Q を選んで B を $Q^{-1}BQ = T^{-1}AT$（ただし $T = PQ$ とする）に替えることでいかようにも変えられる．

命題 8.4 (p.161) **の証明**　この命題を証明するには，テキスト 9 章の線形変換の抽象的取り扱いを補足・補強する必要がある．まず，それから始めよう．

V を，$\mathbb{C}$ 上の有限生成ベクトル空間であって，ただし零ベクトル空間ではないとし，$f : V \to V$ をその線形変換とする．$f^0 = \mathrm{Id}$（恒等変換），$f^1 = f$，$f^2 = f \circ f$，$f^3 = f \circ f \circ f, \ldots$ のように，f の i 回合成を f^i と書く．これらの線形変換の像は，V の部分空間の非増大列

$$V = \mathrm{Im}(f^0) \supset \mathrm{Im}(f^1) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \mathrm{Im}(f^3) \supset \cdots$$

を成す（3 章末演習問題 2 とその解答を見よ）．対応して部分空間の次元の非増大列が得られるが，それが永遠に減り続けることはないから，上の列は停滞する．すなわちある $k \geqq 0$ に対し

$$V = \mathrm{Im}(f^0) \supsetneqq \mathrm{Im}(f^1) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^{k+2}) = \cdots . \tag{1}$$

ここで $\supsetneqq$ が一旦等号に変わるとそれが続くのは，$\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})\,(= f(\mathrm{Im}(f^k)))$ ゆえ[*3]

$$f(\mathrm{Im}(f^k)) = \mathrm{Im}(f^k) \tag{2}$$

[*3] V の部分空間 W に対し $f(W) = \{\, f(w) \mid w \in W \,\}$ と書く．

が成り立ち，従って

$$\mathrm{Im}(f^{k+2}) = f(\mathrm{Im}(f^{k+1})) = f(\mathrm{Im}(f^k)) = \mathrm{Im}(f^k),$$
$$\mathrm{Im}(f^{k+3}) = f(\mathrm{Im}(f^{k+2})) = f(\mathrm{Im}(f^k)) = \mathrm{Im}(f^k), \cdots$$

となるからである．

$$R(f) = \mathrm{Im}(f^k)$$

と定義する．

一般に，V の部分空間 W であって $f(W) \subset W$ を満たすものを **f-不変部分空間**と呼ぶ．このような W への制限により, W の線形変換 $f|_W : W \to W$ が得られる．いま定義した $R(f)$ は f-不変部分空間である．しかも f をこれに制限した $f|_{R(f)} : R(f) \to R(f)$ は同型写像であり[*4]，$R(f)$ はこの性質を満たす（すなわち **f の制限が同型写像であるような**)，**V の最大**[*5]**の f-不変部分空間**として特徴づけられる（同型写像である線形変換を**正則変換**とも言い，記号 R は正則を意味する regular に因む)．一方，すべての $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し f^i の核 $\mathrm{Ker}(f^i)$ もまた f-不変部分空間である．これらは非減少列

$$\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subsetneqq \mathrm{Ker}(f^1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2}) = \cdots$$

を成す．次元定理 $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f^i)) + \dim(\mathrm{Im}(f^i))$（問 9.48 を見よ）を鑑み，(1) の非増大列を見て，同じ k において停滞することに注意しよう．

$$N(f) = \mathrm{Ker}(f^k)$$

と定義する．これは，**f の制限 $f|_{N(f)} : N(f) \to N(f)$ がベキ零変換**（すなわち何回か合成すると零射になる）**であるような，V の最大**[*6]**の f-不変部分空間**として特徴づけられる（記号 N はベキ零を意味する nilpotent に因む)．次は**フィッティング** (Hans Fitting, 独 1906–1938) **の補題**と呼ばれる．

補題． $V = N(f) \oplus R(f)$

証明． $N(f) \cap R(f) = \{0\}$ を示せばよい．実際，この等式が成り立てば $N(f) + R(f)$ は直和で，上記の次元定理により V に一致する．等式を示すには，左辺に属す v が零元に限ることを示せば十分．$v \in R(f)\,(= \mathrm{Im}(f^k))$ ゆえ，ある $u \in V$ に対し $f^k(u) = v$ とな

[*4] (2) より全射．全射である線形変換ゆえ（命題 3.27 の一般化により）同型写像．

[*5] $f|_W : W \to W$ が同型写像であれば $W = f^k(W) \subset R(f)$ ゆえ「最大」．

[*6] $f|_W : W \to W$ がベキ零変換であれば，十分大きな $\ell\,(\geqq k)$ に対し $W = \mathrm{Ker}((f|_W)^\ell) \subset N(f)$ ゆえ「最大」．

るが，$v \in N(f)\,(=\mathrm{Ker}(f^k))$ ゆえ $f^{2k}(u) = f^k(v) = 0$．よって $u \in \mathrm{Ker}(f^{2k}) = N(f)$．これより $v = f^k(u) = 0$．　$\square$

さて漸く命題の証明に入る．f の**固有値**が，ある非零元 $v \in V$ に対し $f(v) = \alpha v$ を成り立たせる複素数 α として定義される．勝手に選んだ V の基底に関する f の表現行列 A とする．A の固有多項式 $\varPhi_A(x)$ は，基底の選び方によらない（別の基底に関する表現行列は $P^{-1}AP$ の形をしており，$\varPhi_{P^{-1}AP}(x) = \varPhi_A(x)$ であるから．5 章末演習問題 2 (1) を見よ）．この $\varPhi_A(x)$ を $\varPhi_f(x)$ と書いて f の**固有多項式**と呼ぶが，f の固有値は $\varPhi_f(x) = 0$ の解と同義語になる．固有値 α に関する f の**固有空間**，**広義固有空間**をそれぞれ

$$V_\alpha = \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{Id}), \quad W_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}((f - \alpha\,\mathrm{Id})^i)$$

により定義する．f と $(-\alpha)$ 乗法の和 $f - \alpha\,\mathrm{Id}$ は V の線形変換ゆえ，その核が意味をもつ．$(f - \alpha\,\mathrm{Id})^i$ は，その変形変換の i 回合成で，それもまた V の線形変換である．重要な注意として

$$W_\alpha = N(f - \alpha\,\mathrm{Id}). \tag{3}$$

さて $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を，f の（またはその表現行列の）相異なる固有値のすべてとする．命題を示すには

$$V = W_{\alpha_1} \oplus W_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_r} \tag{4}$$

を証明すればよい（$f = L_A$ の場合の結果が命題）．
証明に入る前に，以後

$$N = N(f - \alpha_1\mathrm{Id})\,(= W_{\alpha_1}), \quad R = R(f - \alpha_1\mathrm{Id})$$

と略記する．これらは $(f - \alpha_1\mathrm{Id})$-不変ゆえ，$f\,(= (f - \alpha_1\mathrm{Id}) + \alpha_1\mathrm{Id})$-不変でもある．
また，フィッティングの補題から

$$V = N \oplus R \tag{5}$$

が従う．
いよいよ (4) を，線形変換の相異なる固有値の個数 r に関する帰納法で証明する．
$r = 1$ の場合．$R = \{0\}$ を示せばよい．一般に V が，$\{0\}$ と異なる 2 つの f-不変部分空間 V', V'' の直和 $V = V' \oplus V''$ であるとき，

$$\varPhi_f(x) = \varPhi_{f|_{V'}}(x)\,\varPhi_{f|_{V''}}(x) \tag{6}$$

が成り立ち[*7]，従って f の固有値は，$f|_{V'}$ と $f|_{V''}$ のそれらの寄せ集めである．いまの場合，$R \neq \{0\}$ とすれば，$f|_R$ の固有値は α_1 に限るが，$(f-\alpha_1\mathrm{Id})|_R$ の核は $\{0\}$ ゆえこれは起こり得ず，従って $R = \{0\}$.

$r > 1$ とする．上の議論から $R \neq \{0\}$ であり，$\alpha_2, \cdots, \alpha_r$ が $f|_R$ の固有値のすべてである（$f|_N$ の固有値は唯一 α_1．また上述のとおり $\mathrm{Ker}(f|_R - \alpha_1\mathrm{Id}_R) = \{0\}$ ゆえ，$f|_R$ は α_1 を固有値にもたない）．帰納法の仮定から

$$R = W_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_r}. \tag{7}$$

ここで注意すべきは，$2 \leqq i \leqq r$ に対し $W_{\alpha_i} = N(f - \alpha_i\mathrm{Id})$ が $f|_R$ の広義固有空間 $N((f-\alpha_i\mathrm{Id})|_R)$ に一致する（本来，帰納法の仮定が保証するのは，(7) において W_{α_i} を後者に替えたものである）ことで，それは $f|_N$ が α_i を固有値にもたず，従って $W_{\alpha_i} \subset R$ となることから従う．$N = W_{\alpha_1}$ と (5), (7) から目標とした (4) を得る．

定理 8.19 (p.172) **の証明**　A を n 次複素正方行列とする．

第 1 段．　$f(x)$ を複素数係数多項式とするとき

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

が成り立つ（p.173 例題 8.20 の解答の 4 行目を見よ）．$P^{-1}AP$ が A のジョルダン標準形 J の場合を考えれば，

$$f(A) = O \ \Leftrightarrow \ f(J) = O.$$

さらに

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

$J_1, J_2, \ldots, J_s$ をジョルダン細胞とすれば

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

[*7] V' の基底 $\boldsymbol{v}'_1, \cdots$ に関する $f|_{V'}$ の表現行列を A' とし，V'' の基底 $\boldsymbol{v}''_1, \cdots$ に関する $f|_{V''}$ の表現行列を A'' とすると，V の基底 $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}''_1, \cdots$ に関する f の表現行列が $A = \begin{bmatrix} A' & O \\ O & A'' \end{bmatrix}$ となる．これより $\varPhi_A(x) = \varPhi_{A'}(x)\varPhi_{A''}(x)$，従って (6) が成り立つ．

（3.7 節 p.81 を見よ）ゆえ，

$$f(J)=O \iff f(J_k)=O \quad (1 \leqq k \leqq s).$$

第 2 段． $p(x)$ を最高次の係数が 1 の多項式で，$p(A)=O$ を満たすもののうち次数が最小のものを 1 つ選ぶ（この時点ではまだ，この性質をもつ多項式が 2 つ以上あるかもしれない）．$f(A)=O$ が成り立てば多項式 $f(x)$ は $p(x)$ で割られる．実際，

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x), \quad r(x) \text{ の次数 } < p(x) \text{ の次数}$$

を満たす多項式 $q(x), r(x)$ が存在するが，$f(A)=p(A)=O$ より $r(A)=O$．ところが $p(x)$ の選び方から $r(x)=0$ でなくてはならない．従って上の性質をもつ $p(x)$ は 1 つに定まる．そこでこれを $p_A(x)$ で表す．定理を証明するには，あと

$$p_A(x)=\Psi_A(x) \tag{1}$$

を示せばよい．

第 1 段の結果より従うこととして，$p_A(x)$ は，A のジョルダン標準形 J に対して定義される $p_J(x)$ に等しく，さらに J のジョルダン細胞たち J_k $(1 \leqq k \leqq s)$ に対して定義される $p_{J_k}(x)$ の最小公倍多項式（最高次の係数が 1 のもの）に等しい．従って等式 (1) を証明するには，固有値 α の r-次ジョルダン細胞

$$B=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (r \times r \text{ 型})$$

に対し

$$p_B(x)=(x-\alpha)^r \tag{2}$$

を示せばよい．

第 3 段. $(B-\alpha E)^k$ $(k=1,2,\ldots,r)$ を計算すると

$$B-\alpha E=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\ \bigl(=\bigl[\,\mathbf{0}\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{r-1}\,\bigr]\bigr),$$

$$(B-\alpha E)^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1\\ \vdots & & & & 0 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\ \bigl(=\bigl[\,\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{r-2}\,\bigr]\bigr),$$

$$\vdots$$

$$(B-\alpha E)^{r-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & & & & 0 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\ \bigl(=\bigl[\,\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_1\,\bigr]\bigr),$$

$$(B-\alpha E)^r=O.$$

これより目標の等式 (2) が従う.

Revision history

2022.01.04　The original version

2022.07.14　定理 4.33 の証明 式 (3) を含む段落以降を書き換えた.