「ガイダンス応用解析」

令和４年２月２１日　サイエンス社

問と演習問題の解答

第 1 章

問 1.1.1　例 1.1 を用いて，$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\det(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}$ となる．

問 1.1.2　例 1.1, 例 1.2 と行列式の性質より，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) =&\ \det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})=\det(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\
=&\ \{(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{x}\}\cdot\boldsymbol{y}=\{(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}\}\cdot\boldsymbol{y}\\
=&\ (\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y})\\
=&\ \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.1.3　ラグランジュの公式 (問 1.1.2) で $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$ と置けばよい．

問 1.3.1　C は，

$$\boldsymbol{r}=(1,2,3t)\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

で表される．

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\|=\|(0,0,3)\|=3$$

であるので，$s=3t$ とおくと s は弧長媒介変数で，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(1,2,s)\quad(0\leqq s\leqq 3)$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
\int_C\left(x^2-yz+z^2\right)\,ds=&\ \int_0^3\left(x^2(s)-y(s)z(s)+z^2(s)\right)\,ds\\
=&\ \int_0^3(1-2s+s^2)\,ds=\left[s-s^2+\frac{s^3}{3}\right]_0^3=3
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.3.2 $C_i = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \,|\, a \leqq y \leqq b\}$ と表したとき,

$$\int_{C_i} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{u}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt$$
$$= \int_a^b \left(y(t)\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\frac{dy(t)}{dt} - 3z(t)\frac{dz(t)}{dt} \right) dt$$

である.

(1) $C_1 = \{(\cos t, \sin t, 0) \,|\, 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$ と表されるので,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \{(\sin t)(-\sin t) + 2(\cos t)(\cos t) - 3\cdot 0\cdot 0\}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + 2\cos^2 t\right) dt = \pi$$

となる.

(2) $C_2 = \{(x(t), y(t), z(t)) \,|\, 0 \leqq t \leqq 3\}$,

$$x(t) = \begin{cases} t & (0 \leqq t \leqq 1), \\ 1 & (1 \leqq t \leqq 3), \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 1), \\ t-1 & (1 \leqq t \leqq 2), \\ 1 & (2 \leqq t \leqq 3), \end{cases}$$
$$z(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 2), \\ t-2 & (2 \leqq t \leqq 3), \end{cases}$$

と表されるので,

$$\int_{C_2} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 y(t)\,dt + \int_1^2 2x(t)\,dt - \int_2^3 z(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 dt - \int_2^3 (t-2)\,dt = 0 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

となる.

問 1.4.1 S は,

$$x = \sin\theta\cos\phi,\ y = \sin\theta\sin\phi,\ z = \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi)$$

と表される.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \sin\theta\cos\theta,$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \sin^2\theta\cos\phi,$$
$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = \det\begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} = \sin^2\theta\sin\phi$$

であるので，

$$dS = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\phi + \sin^4\theta\sin^2\phi}\, d\theta d\phi = \sin\theta\, d\theta d\phi$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\iint_S \left(x^2+y^2\right)\, dS &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \left(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi\right)\sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta \\ &= 2\pi \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

となる．

問 1.4.2　S は，

$$x = 2\sin\theta\cos\phi,\ y = 2\sin\theta\sin\phi,\ z = 2\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi)$$

と表される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} &= \det\begin{pmatrix} 2\cos\theta\cos\phi & -2\sin\theta\sin\phi \\ 2\cos\theta\sin\phi & 2\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} = 4\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} &= \det\begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\phi & 2\sin\theta\cos\phi \\ -2\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\phi, \\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} &= \det\begin{pmatrix} -2\sin\theta & 0 \\ 2\cos\theta\cos\phi & -2\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} = 4\sin^2\theta\sin\phi\end{aligned}$$

であるので，

$$dS = 4\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\phi + \sin^4\theta\sin^2\phi}\, d\theta d\phi = 4\sin\theta\, d\theta d\phi$$

となる．$(x,y,z) \in S$ に対し，(x,y,z) と $\boldsymbol{n}(x,y,z)$ は同じ向きである．$\|(x,y,z)\| = 2$, $\|\boldsymbol{n}(x,y,z)\| = 1$ であるので，

$$\boldsymbol{n}(x,y,z) = \frac{1}{2}(x,y,z)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, dS &= \iint_S (x,y,-z)\cdot\frac{1}{2}(x,y,z)\, dS \\ &= \frac{1}{2}\iint_S \left(x^2+y^2-z^2\right) dS\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(4\sin^2\theta\cos^2\phi + 4\sin^2\theta\sin^2\phi - 4\cos^2\theta\right)4\sin\theta\,d\theta \\
&= 8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta \\
&= 16\pi\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta \\
&= 16\pi\left[-\cos\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.5.1　$h > 0$ とし，$Q = \{(x, y, z) \mid |x - x_0| \leqq h,\ |y - y_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}$ とおく．S はこの立方体の表面とする．S は

$$
\begin{aligned}
S_{x+} &= \{(x_0 + h, y, z) \mid |y - y_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}, \\
S_{x-} &= \{(x_0 - h, y, z) \mid |y - y_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}, \\
S_{y+} &= \{(x, y_0 + h, z) \mid |x - x_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}, \\
S_{y-} &= \{(x, y_0 - h, z) \mid |x - x_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}, \\
S_{z+} &= \{(x, y, z_0 + h) \mid |x - x_0| \leqq h,\ |z - z_0| \leqq h\}, \\
S_{z-} &= \{(x, y, z_0 - h) \mid |x - x_0| \leqq h,\ |y - y_0| \leqq h\}
\end{aligned}
$$

の 6 つの面からなる．S_{x+} 上では $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ であるので，$\boldsymbol{u}(x_0 + h, y, z) \times \boldsymbol{n} = (0, u_3(x_0 + h, y, z), -u_2(x_0 + h, y, z))$ となる．よって，S_{x+} 上の $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$ の面積分は，

$$
\iint_{S_{x+}} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\,dS = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}(0, u_3(x_0 + h, y, z), -u_2(x_0 + h, y, z))\,dydz
$$

となる．S_{x-} 上では $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 0)$ であるので，同様に，

$$
\iint_{S_{x-}} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\,dS = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}(0, -u_3(x_0 - h, y, z), u_2(x_0 - h, y, z))\,dydz
$$

を得る．Q の体積は $\varDelta V = (2h)^3$ であるので，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\displaystyle\iint_{S_{x+} \cup S_{x-}} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\,dS}{\varDelta V} \\
&\quad = \frac{1}{(2h)^3}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\{(0, u_3(x_0 + h, y, z), -u_2(x_0 + h, y, z)) \\
&\qquad\qquad + (0, -u_3(x_0 - h, y, z), u_2(x_0 - h, y, z))\}\,dydz \\
&\quad = \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\left(0, \frac{u_3(x_0 + h, y, z) - u_3(x_0 - h, y, z)}{2h},\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{u_2(x_0+h,y,z)-u_2(x_0-h,y,z)}{2h}\Bigg)\,dydz \\
&= \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\left(0, \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+o(1), -\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+o(1)\right)dydy \\
&\to \left(0, \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), -\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\right) \quad (h\to +0)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，$h \to +0$ のとき，

$$
\frac{\displaystyle\iint_{S_{y+}\cup S_{y-}} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\,dS}{\Delta V} \to \left(-\frac{\partial u_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), 0, \frac{\partial u_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\right),
$$

$$
\frac{\displaystyle\iint_{S_{z+}\cup S_{z-}} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\,dS}{\Delta V} \to \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0), -\frac{\partial u_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0), 0\right)
$$

となる．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to+0}\frac{\displaystyle\iint_{S} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\,dS}{\Delta V} &= \left(0, \frac{\partial u_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), -\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\right) \\
&\quad + \left(-\frac{\partial u_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), 0, \frac{\partial u_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0), -\frac{\partial u_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0), 0\right) \\
&= -\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(x_0,y_0,z_0)
\end{aligned}
$$

を得る．

問 1.5.2 微分の線形性を用いる事で示される．詳細は略.

問 1.5.3 ハミルトンの演算子を用いれば以下の通りであるが，定義に基づいても確認せよ．

(1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla\times\nabla f = \boldsymbol{o}$.

(2) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) = 0$.

(3) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u}$.

問 1.5.4 積の微分公式を用いる事で示される．詳細は略.

問 1.6.1

$$
\boldsymbol{u} = (2x, -x^2 z, 3z)
$$

とおくと，

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 5
$$

である．$V = \left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<a^2\right\}$ とおくと，

$$\partial V = S$$

となる．ガウスの定理 (定理 1.2) より，求める積分は $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,dV$ に等しい．ゆえに，

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,dV = 5\iiint_V dV = \frac{20}{3}\pi a^3$$

が求める積分値である．

問 1.6.2　$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} = 2$ である．平面におけるガウスの定理 (定理 1.3) より，

$$|D| = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{p}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_C \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

となる．

問 1.6.3　$\boldsymbol{u} = (u_1(x), 0, 0)$ であるので，$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = u_1'(x)$ である．V は直方体であるので，$S = \partial V$ は 6 つの面からなる．そのうち，yz 平面に平行な面を $S_a = \{(a,y,z)\,|\,0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$, $S_b = \{(b,y,z)\,|\,0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$ とおく．外向き単位法線ベクトルは S_a 上では $\boldsymbol{n} = (-1,0,0)$, S_b 上では $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$ である．また，その他の面では外向き単位法線ベクトルの x 成分は 0 である．よって，S_a 上で $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = -u_1(a)$, S_b 上で $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = u_1(b)$, その他の面で $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ である．これらをガウスの定理 (定理 1.2) に代入すると，

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_a^b u_1'(x)\,dxdydz &= \iint_{S_a}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \iint_{S_b}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\ &= -\int_0^1\int_0^1 u_1(a)\,dydz + \int_0^1\int_0^1 u_1(b)\,dydz\end{aligned}$$

となる．被積分関数は y, z に依らないので，

$$\int_a^b u_1'(x)\,dx = -u_1(a) + u_1(b)$$

となる．

問 1.6.4　定理 1.2 において $\boldsymbol{u} = f\operatorname{grad} g$ とおく，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = f\operatorname{grad} g\boldsymbol{n} = f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}$ である．また，$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{div}(f\operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{grad} g + f\operatorname{div}\operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{grad} g + f\Delta g$ となる．これらを定理 1.2 の結果に当てはめればよい．

問 1.6.5　定理 1.5 の主張の式とそれを f と g の役割を入れ替えた式の辺々の差をとればよい．

問 1.6.6　例 1.13 と同様にして，

$$\int_0^1\int_0^1\int_a^b \bigl(f(x)g''(x)-g(x)f''(x)\bigr)\,dxdydz$$
$$=\int_0^1\int_0^1 \bigl[f(x)g'(x)-g(x)f'(x)\bigr]_a^b\,dydz$$

となる．y, z について積分を実行して，

$$\int_a^b \bigl(f(x)g''(x)-g(x)f''(x)\bigr)\,dx=\bigl[f(x)g'(x)-g(x)f'(x)\bigr]_a^b$$

となる．

問 1.7.1 (1)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}&=\left(\frac{\partial}{\partial y}(-2xz)-\frac{\partial}{\partial z}(xy),\frac{\partial}{\partial z}(y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(-2xz),\frac{\partial}{\partial y}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right)\\&=(0,2z,-y)\end{aligned}$$

である．また，$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\rho}(x,y,z)$ であるので，$(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{yz}{\rho}$ である．S は，

$$S=\left\{(\rho\cos\theta\cos\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\theta)\;\middle|\;0\leqq\theta<2\pi,\ 0\leqq\phi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

と書ける．例 1.6 の解法 1 と同様に，

$$dS=\rho^2\sin\theta\,d\theta d\phi$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\iint_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,dS&=\iint_S\frac{yz}{\rho}\,dS\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\rho\sin\theta\sin\phi)(\rho\cos\theta)}{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\theta d\phi\\&=\rho^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi\\&=\rho^3\left[\frac{1}{3}\sin^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos\phi]_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

となる．

(2) ストークスの定理より $\displaystyle\int_{\partial S}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算すればよい．∂S 上では $z=0$ であるので，$\boldsymbol{u}=(y^2,xy,0)$ である．∂S は向きも込めて

$$\partial S=\{\boldsymbol{r}(\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,0)\,|\,0\leqq\theta<2\pi\}$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\partial S} (y^2, xy, 0)\cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(y(\theta)^2 \frac{dx(\theta)}{d\theta} + x(\theta)y(\theta)\frac{dy(\theta)}{d\theta} \right) d\theta \\
&= \rho^2 \int_0^{2\pi} \left(-\sin^3\theta + \cos^2\theta \sin\theta \right) d\theta \\
&= \rho^2 \left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta + \cos\theta \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.7.2　grad, rot の定義より，$\mathrm{rot}\,(f\mathrm{grad}\,g) = \mathrm{grad}\,f \times \mathrm{grad}\,g$ を示せばよい．

演習 1.1　$\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, t)$ とすると，

$$
\left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = \sqrt{2}
$$

となる．よって，$s = \sqrt{2}t$ とおくと s は弧長媒介変数で，C は，

$$
C = \left\{ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq 2\sqrt{2}\pi \right\}
$$

と表される．

(1)　$\displaystyle \int_C z\,ds = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} z(s)\,ds = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \frac{s}{\sqrt{2}}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}\pi} = 2\sqrt{2}\pi^2.$

(2)　$\displaystyle \int_C (0,0,z)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} z(s)\frac{dz}{ds}(s)\,ds = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}z^2(s)\,ds$

$\displaystyle = \left[\frac{z^2(s)}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}\pi} = \left[\frac{s^2}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}\pi} = 2\pi^2.$

(3)　$\displaystyle \int_C dz = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \frac{dz}{ds}(s)\,ds = [z(s)]_0^{2\sqrt{2}\pi} = \left[\frac{s}{\sqrt{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}\pi} = 2\pi.$

演習 1.2　$\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ と書ける．$\boldsymbol{r}_x = (1, 0, f_x)$, $\boldsymbol{r}_y = (0, 1, f_y)$ より，

$$
\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = -(f_x, f_y, 1)
$$

となる．ゆえに，

$$
\|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}, \quad \boldsymbol{n} = \pm\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}
$$

となる．

$\|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y\|$ については，注意 1.1 を用いて，

$$\|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y\|^2 = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_x & \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y \\ \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{t}_x & \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y \end{pmatrix}$$
$$= 1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \|\nabla f\|^2$$

としてもよい．

演習 1.3 積の微分公式を用いる事で示される．

演習 1.4 (1) $\boldsymbol{c}$ を定ベクトルとし，ベクトル場 $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}$ にガウスの定理 (定理 1.2) を適用すると，$\displaystyle\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u})\, dV = \iint_S (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ となる．問 1.1 と $\boldsymbol{c}$ が定ベクトルである事を用いるとこれは $\boldsymbol{c} \cdot \displaystyle\iint_S (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})\, dS$ に等しい．一方，演習 1.3(1) を用いれば，$\displaystyle\iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u})\, dV = \boldsymbol{c} \cdot \left(-\iiint_V \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, dV\right)$ となる．$\boldsymbol{c}$ の任意性より補題 1.1 を用いると示したい関係式を得る．

(2) ガウスの定理 $\displaystyle\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ に $\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{u}$ を代入し，問 1.5.4(1) を用いればよい．

(3) S は，V の境界とする．
解法 1. ガウスの定理より，

$$\iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\, dV$$

である．問 1.5.3(2) を用いれば，上の式の右辺が 0 である事が分かる．
解法 2. C は S の周とする．ストークスの定理 (定理 1.7) より，

$$\iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$$

である．S は，V の境界であるので，閉曲面である．よって，その周 C は空集合である．ゆえに，上の式の右辺は 0 である．

(4) 解法 1. 線積分の定義より，

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}(s)), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{r}(s)), \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{r}(s))\right) \cdot \boldsymbol{r}'(s)\, ds$$
$$= \int_C \frac{d}{ds} f(\boldsymbol{r}(s))\, ds = 0$$

となる．最後の積分が 0 になるのは C が閉曲線であるので，始点と終点における f の値が等しい事による．
解法 2. S は C を周とする曲面とする．ストークスの定理より，

$$\int_C \mathrm{grad}\, f \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, f) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

となる．問 1.5.3(1) より，上の式の右辺が 0 である事が分かる．

演習 1.5　グリーンの定理 (定理 1.5) に $g = f$ を代入して，V 上で $\Delta f = 0$, S 上で $f = 0$, $\mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{grad}\, f = \|\mathrm{grad}\, f\|^2$ を用いると，$\displaystyle\iiint_V \|\mathrm{grad}\, f\|^2 dV = 0$ となる．よって，V 上で $\|\mathrm{grad}\, f\|^2 \equiv 0$ を得る．$\mathrm{grad}\, f = (f_x, f_y, f_z)$ であるので，$f_x = f_y = f_z \equiv 0$ となる．従って，f は x, y, z に依存しない．ゆえに V 上で定数である．連続性より $\bar{V}$ 上で定数である．この事と，S 上で $f = 0$ である事より，$\bar{V}$ 上で $f \equiv 0$ が分かる．

演習 1.6　前問と同様であるので略.

第 2 章

問 2.1.1

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2),$$
$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = \overline{\bar{z}_1 z_2} + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}_1 z_2)$$

となる．

問 2.2.1　指数法則より $e^{z+2n\pi i} = e^z e^{2n\pi i}$ となる．ここで，オイラーの公式より $e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$ となる．

問 2.2.2　$\overline{(e^z)} = \overline{\{e^x(\cos y + i \sin y)\}} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x\{\cos y + i \sin(-y)\}$ $= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$.

問 2.2.3　$z = z_1 - z_2$ とおくと，$e^{z_1} = e^z e^{z_2}$ である．例 2.1 より $e^{z_2} \neq 0$ であるので，$e^{z_1} = e^{z_2}$ は $e^z = 1$ と同値である．$z = x + iy$ とすると，$e^x(\cos y + i \sin y) = 1$ となる．これは $x = 0$, $y = 2n\pi$ と同値である．すなわち，$z = 2n\pi i$ と同値である．

問 2.2.4　例 2.3 と同様である．

問 2.2.5　例 2.4 と同様である．

問 2.2.6　$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

問 2.2.7　(1)　$|ie| = e$, $\arg(ie) = \left(\dfrac{1}{2} + 2n\right)\pi$ であるので，

$\log(ie) = \mathrm{Log} e + \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi = 1 + \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i$ である．

(2) $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg(1 + \sqrt{3}i) = \left(\frac{1}{3} + 2n\right)\pi i$ であるので，$\log(1 + \sqrt{3}i) = \mathrm{Log}\, 2 + \left(\frac{1}{3} + 2n\right)\pi i$ である．

問 2.2.8 $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 10i$ より，

$$\sin x \cosh y = 0, \quad \cos x \sinh y = 10$$

である．前者より $\sin x = 0$, すなわち，$x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ である．後者に代入して $(-1)^n \sinh y = 10$ である．$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = (-1)^n 10$ であるので，$Y = e^y$ とおくと，$Y^2 - (-1)^n 20Y - 1 = 0$ となる．$Y = e^y > 0$ を考慮すると，$Y = (-1)^n 10 + \frac{1}{2}\sqrt{401}$ となる．よって，$y = \mathrm{Log}\left\{(-1)^n 10 + \frac{1}{2}\sqrt{401}\right\}$ を得る．ゆえに，

$$z = x + iy = n\pi + i\mathrm{Log}\left\{(-1)^n 10 + \frac{1}{2}\sqrt{401}\right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

である．

問 2.2.9 (1) $\log i = \mathrm{Log}|i| + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$ であるので，$i^i = e^{i \log i} = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$ である．

(2) $i^{-2i} = e^{-2i \log i} = e^{-2i(\frac{1}{2}+2n)\pi i} = e^{(1+4n)\pi}$ である．

(3) $1 + i = \sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}+2n\right)\pi i}$ であるので，$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}e^{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}+2n)\pi i}$ となる．ここで n が 3 を法としてそれぞれ 0, 1, 2 と合同の場合に計算すると，$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ となる．

(4) $2^{1+i} = e^{(1+i)\log 2} = e^{(1+i)(\mathrm{Log}2+2n\pi i)} = e^{\mathrm{Log}2-2n\pi+i(\mathrm{Log}2+2n\pi)} = 2e^{-2n\pi}\left\{\cos\left(\mathrm{Log}\, 2\right) + i\sin\left(\mathrm{Log}\, 2\right)\right\}$ となる．

(5) $(1-i)^{3+i} = e^{(3+i)\log(1-i)} = e^{(3+i)\{\mathrm{Log}\sqrt{2}+(-\frac{1}{4}+2n)\pi i\}}$
$= e^{3\mathrm{Log}\sqrt{2}-(-\frac{1}{4}+2n)\pi+i\{\mathrm{Log}\sqrt{2}+3(-\frac{1}{4}+2n)\pi\}}$
$= 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-2n\pi}\left\{\cos\left(\mathrm{Log}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\mathrm{Log}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\pi\right)\right\}$ となる．

問 2.3.1 概略のみ記す．

$$\frac{\sin(z+h) - \sin z}{h} = \sin z\frac{\cosh h - 1}{h} + \cos z\frac{\sin h}{h} \to \cos z \quad (h \to 0).$$

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ より，$(\sin x \cosh y)_x = (\cos x \sinh y)_y$, $(\sin x \cosh y)_y = -(\cos x \sinh y)_x$ であるので，

$$(\sin z)' = (\sin x \cosh y)_x + i(\cos x \sinh y)_x = \cos x \cosh y - i \cos x \cos y = \cos z,$$

$$(\sin z)' = \frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} = \cos z,$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

問 2.5.1　a, b をそれぞれ C_1, C_2 上の点とし，a を始点とし反時計回りに C_1 に沿って a に戻る曲線を $C_{1,a}$ とする．同様に b を始点とし反時計回りに C_2 に沿って b に戻る曲線を $C_{2,b}$ とする．a と b を D 内の滑らかな曲線 C_3 で結ぶ．但し，C_3 は端点以外は C_1, C_2 に触れないようにとる．曲線 C を

$$C = C_{1,a} \cup C_3 \cup (-C_{2,b}) \cup (-C_3)$$

と定義すると，C は D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線となる．よって，定理 2.8 より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C f(z)\,dz \\ &= \int_{C_{1,a}} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{-C_{2,b}} f(z)\,dz + \int_{-C_3} f(z)\,dz \\ &= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz - \int_{C_3} f(z)\,dz \\ &= \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \end{aligned}$$

となる．

問 2.9.1　仮定より $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の C 上の積分は項別に行ってよい．すなわち，

$$\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz$$

となる．a を中心とする半径 r の円を $C' = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + re^{i\theta}, 0 \leqq \theta < 2\pi\}$ とする．r を十分小さくすると，C' は C で囲まれる領域内にとれる．よって，系 2.2 より，$\int_C (z-a)^n dz = \int_{C'} (z-a)^n dz$ となる．よって，

$$\begin{aligned} \int_C (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^n ire^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & (n \neq -1), \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．

問 2.9.2

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

であるので，極は $\pm i$ で，全て 2 位である．命題 2.1(1) より

$$\mathrm{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\{(z-i)^2f(z)\}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{i}{4},$$

$$\mathrm{Res}(f;-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\{(z+i)^2f(z)\}=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-i)^2}=\lim_{z\to -i}\frac{-2}{(z-i)^3}=\frac{i}{4}$$

となる．

問 2.10.1 (1) 例 2.13 より $R>1$ のとき C_R で囲まれる領域内の f の極は $z=e^{\frac{\pi}{4}i}$ と $e^{\frac{3}{4}\pi i}$ であり，留数はそれぞれ $-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$，$\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ である．よって，

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2}=2\pi i\times\left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

である．また，

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^4+1}\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{(Re^{i\theta})^4+1}\right|\leqq\int_0^{\pi}\frac{R\,d\theta}{R^4-1}=\frac{\pi R}{R^4-1}\to 0\quad(R\to\infty)$$

である．ゆえに，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{z^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ である．

(2) 問 2.9.2 より $R>1$ のとき C_R で囲まれる領域内の f の極は $z=i$ のみであり，留数は $-\frac{i}{4}$ である．よって，

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2}=2\pi i\times\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

である．また，

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2}\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{\{(Re^{i\theta})^2+1\}^2}\right|$$
$$\leqq\int_0^{\pi}\frac{R\,d\theta}{(R^2-1)^2}=\frac{\pi R}{(R^2-1)^2}\to 0\quad(R\to\infty)$$

である，ゆえに，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}$ である．

(3) 例 2.14 より，$R>1$ のとき C_R で囲まれる領域内の f の極は $z=e^{\frac{1}{6}(1+2n)i}$ $(n=0,\,1,\,2)$ であり，留数は $\frac{(-1)^{n+1}i}{6}$ である．

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2dx}{x^6+1}+\int_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{z^6+1}=2\pi i\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^{n+1}i}{6}=2\pi i\left(-\frac{i}{6}+\frac{i}{6}-\frac{i}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$$

である．また，

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{z^6+1}\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})^2iRe^{i\theta}d\theta}{(Re^{i\theta})^6+1}\right|$$

$$\leqq \int_0^{\pi} \frac{R^3\,d\theta}{R^6-1} = \frac{\pi R^3}{R^6-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

である．ゆえに，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$ である．

問 2.10.2 $\varGamma_R$, $\varGamma_r$ は例 2.16 のものと同じ意味とする．積分路の内部で $\frac{1-e^{iz}}{z^2}$ は正則であるので，

$$\int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{\varGamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx - \int_{\varGamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = 0$$

となる．左辺第 1 項と第 3 項の和は，

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{-R}^{-r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx &= \int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_r^R \frac{1-e^{-ix}}{x^2}\,dx \\ &= 2\int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

となる．$\varGamma_R$ 上の積分は $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と変数変換すると，$dz = iRe^{i\theta}d\theta$ であるので，

$$\int_{\varGamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = i\int_0^{\pi} \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\,d\theta$$

となる．$e^{iRe^{i\theta}} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{-R(\sin\theta - i\cos\theta)}$ であり，θ の範囲から $\sin\theta \geqq 0$ であるので，

$$\left| \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} \right| \leqq \frac{1+e^{-R\sin\theta}}{R} \leqq \frac{2}{R}$$

となる．よって，

$$\left| \int_{\varGamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \right| \leqq \int_0^{\pi} \frac{2}{R}\,d\theta = \frac{2\pi}{R} \to 0 \quad (R \to +\infty)$$

となる．同様に，

$$\int_{\varGamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = i\int_0^{\pi} \frac{1-e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\,d\theta$$

である．指数関数の定義 $e^{\zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}$ より，

$$1 - e^{\zeta} = -\zeta - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} = -\zeta + \mathcal{O}(|\zeta|^2) \quad (\zeta \to 0)$$

となる．$\zeta = ire^{i\theta}$ とおくと，

$$1 - e^{ire^{i\theta}} = -ire^{i\theta} + \mathcal{O}\left(\left|ire^{i\theta}\right|^2\right) = -ire^{i\theta} + \mathcal{O}(r^2) \quad (r \to +0)$$

となる．よって，

$$\int_{\Gamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = i\int_0^{\pi} \frac{-ire^{i\theta}+\mathcal{O}(r^2)}{re^{i\theta}}\,d\theta$$
$$= i\int_0^{\pi} (-i+\mathcal{O}(r))\,d\theta = \pi+\mathcal{O}(r) \to \pi \quad (r\to +0)$$

となる．ゆえに，

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to+0}} \int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to+0}} \frac{1}{2}\left(-\int_{\Gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_{\Gamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz\right) = \frac{\pi}{2}$$

となる．

演習 2.1　複号同順で $|a\pm b|^2 = |a|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) + |b|^2$ が成り立つ．辺々の差をとると

$$|a+b|^2 - |a-b|^2 = 4\mathrm{Re}\,(a\bar{b})$$

となる．$a=\frac{z_1}{2}$, $b=\frac{z_2}{2}$, または $a=\frac{z_1}{2}$, $b=\frac{iz_2}{2}$ とすると，

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 - \left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2 = \mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2),$$
$$\left|\frac{z_1+iz_2}{2}\right|^2 - \left|\frac{z_1-iz_2}{2}\right|^2 = \mathrm{Re}\,(z_1\overline{iz_2}) = \mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2)$$

となる．第 1 式に第 2 式の i 倍を辺々加えると，

$$\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 - \left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|^2 + i\left(\left|\frac{z_1+iz_2}{2}\right|^2 - \left|\frac{z_1-iz_2}{2}\right|^2\right)$$
$$= \mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2) + i\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_2$$

を得る．

演習 2.2　$\cos z_1 = \cos z_2$ かつ $\sin z_1 = \sin z_2$ とする．オイラーの公式より $e^{iz_1} = e^{iz_2}$ である．問 2.2.3 より，$iz_1 = iz_2 + 2n\pi i$, すなわち，$z_1 = z_2 + 2n\pi$ である．逆は，例 2.3 と問 2.2.4 による．

演習 2.3　背理法で示す．$\tan z = i$ とすると，$\frac{\sin z}{\cos z} = i$ となる．分母を払って整理すると $\cos z + i\sin z = 0$ となる．これは $e^z = 0$ となり，例 2.1 に矛盾する．

演習 2.4　略

演習 2.5　(1)　正しくない．$z = re^{i\theta}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\log z^2 &= 2\mathrm{Log}\, r + i(2\theta + 2n\pi), \\ 2\log z &= 2\mathrm{Log}\, r + i(2\theta + 4n\pi)\end{aligned}$$

となる．

(2)　正しくない．例えば，$z_1 = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $z_2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 &= -\pi i, \\ \mathrm{Log}\, z_1 z_2 &= \pi i\end{aligned}$$

となる．

(3)　正しい．$\log z$ の定義そのもの．

(4)　正しくない．$\log e^z = z + 2n\pi i$.

演習 2.6

$$\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} \to 1 \quad (x \to 0)$$

であるので，$u_x(0,0) = 1$ である．同様に，$u_y(0,0) = -1$, $v_x(0,0) = 1$, $v_y(0,0) = 1$ である．従って，コーシー＝リーマンの関係式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が $z = 0$ で成り立つ．f が $z = 0$ で微分可能でない事は，$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ が収束しない事を言えばよい．$h = \epsilon(1+i)$ $(\epsilon \in \mathbb{R})$ として $\epsilon \to 0$ とすると，

$$\frac{f(\epsilon(1+i)) - f(0)}{\epsilon(1+i)} = \frac{u(\epsilon,\epsilon) - u(0,0) + i(v(\epsilon,\epsilon) - v(0,0))}{\epsilon(1+i)} = \frac{i\frac{\epsilon^3+\epsilon^3}{\epsilon^2+\epsilon^2}}{\epsilon(1+i)} \to \frac{i}{1+i}$$

となる．同様に $h = \epsilon$ $(\epsilon \in \mathbb{R})$ として $\epsilon \to 0$ とすると，

$$\frac{f(\epsilon) - f(0)}{\epsilon} = \frac{\frac{\epsilon^3}{\epsilon^2} + i\frac{\epsilon^3}{\epsilon^2}}{\epsilon} \to 1 + i$$

となる．$h \to 0$ の方法によって異なる値に収束するので，$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ は存在しない．

演習 2.7　$z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ とおく．$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり，$x \neq 0$ のとき $\arg z = \arctan \frac{y}{x} + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ である．よって，$x \neq 0$ のとき，

$$\log z = u(x,y) + iv(x,y), \quad u(x,y) = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

となる．

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} = v_y, \quad u_y = \frac{y}{x^2+y^2} = -v_x$$

であるのでコーシー＝リーマンの関係式が成り立つ．よって，定理 2.6 より，

$$(\log z)' = u_x + iv_x = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

となる．$y \neq 0$ のとき，

$$\log(iz) = \mathrm{Log}|iz| + i\arg iz = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} - i\left(\arctan\frac{x}{y} + 2n\pi\right)$$

であるので，上と同様にコーシー＝リーマンの関係式が確かめられ，

$$\{\log(iz)\}' = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(-\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$$

となる．一方，

$$\log(iz) = \mathrm{Log}|z| + i\arg(iz) = \mathrm{Log}|z| + i(\arg z + \arg i) = \log z + \log i$$

であるので，$y \neq 0$ のときは，

$$(\log z)' = \{\log(iz) - \log i\}' = \{\log(iz)\}' = \frac{1}{z}$$

となる．以上より，$z \neq 0$ のとき，$(\log z)' = \frac{1}{z}$ である．

演習 2.8 $(e^z)' = e^z$, $(\log z)' = \frac{1}{z}$ と合成関数の微分法より，$(z^w)' = (e^{w\log z})' = e^{w\log z}(w\log z)' = z^w\frac{w}{z} = wz^{w-1}$ となる．

演習 2.9 各関数の実部・虚部をそれぞれ u, v とおく．

(1) $u = x^3 - y^3$, $v = 2x^2y^2$ である．$u_x = 3x \neq v_y = 4xy^2$ であるので，$x^3 - y^3 + 2x^2y - 2i$ は正則でない．

(2) $u = e^{-y}\cos x$, $v = e^{-y}\sin x$ である．$u_x = v_y = -e^{-y}\sin x$, $u_y = -v_x = -e^{-y}\cos x$ であるので，$e^{-y}(\cos x + i\sin x)$ は正則である．

(3) $u = \arg z$, $v = 0$ である．u は定数関数でないので，明らかに $u_x \neq v_y$ である．よって，$\arg z$ は正則でない．

演習 2.10 f は正則であるので $f'(z) = u_x + iv_x (= v_y - iu_y)$ である．コーシー＝リーマンの関係式を用いて，

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

となる．

演習 2.11 以下の (1), (2) は命題 2.1 のそれらに相当する．

(1) 仮定より f は $z = a$ の近傍で $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n$ $(c_{-k} \neq 0)$ と書ける．$(z-a)^k f(z) = \displaystyle\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k}$ となり，$z = a$ の近傍で収束する．収束域内では何回でも項別微分可能であるので，

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\} = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)z^{n+1}$$

となる．$n = -k, -k+1, \cdots, -2$ のとき，$(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2) = 0$

であるので，$z \to a$ のとき、

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left\{(z-a)^k f(z)\right\} = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)z^{n+1}$$
$$\to c_{-1}(k-1)! = (k-1)!\mathrm{Res}(f;a)$$

となる．

(2)　仮定より，a の近傍で正則で $p(a) \neq 0$ となる関数 $p(z)$ が存在して，その近傍で $g(z) = (z-a)p(z)$ と書ける．よって，その近傍内の a を除く点で，

$$(z-a)f(z) = \frac{(z-a)h(z)}{(z-a)p(z)} = \frac{h(z)}{p(z)}$$

となる．最右辺は $z = a$ の近傍で正則である．また，$h(a) \neq 0$ より，$\frac{h(a)}{p(a)} \neq 0$ である．ゆえに a は f の 1 位の極であり，(1) より

$$\mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \frac{h(a)}{p(a)}$$

である．一方，$g'(z) = p(z) + (z-a)p'(z)$ より，$p(a) = g'(a)$ である．

演習 2.12　(1)　$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$ であるので，$R > 1$ のとき C_R で囲まれる領域内の f の極は $z = i$ のみで 2 位である．留数は,

$$\mathrm{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$$
$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{-\frac{2e^{iz}}{(z+i)^3} + \frac{ie^{iz}}{(z+i)^2}\right\} = -\frac{2e^{-1}}{(2i)^3} + \frac{ie^{-1}}{(2i)^2} = -\frac{i}{2e}$$

である．よって,

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+1)^2} + \int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i\mathrm{Res}(f;i) = \frac{\pi}{e}$$

となる．$\frac{1}{(x^2+1)^2}$ は偶関数であるので,

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+1)^2} = i\int_{-R}^{R}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

である．また，Γ_R は $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるので，$\sin\theta \geqq 0$ となるので,

$$|e^{iz}| = |e^{iRe^{i\theta}}| = e^{-R\sin\theta} \leqq 1$$

である．従って,

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{iRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta}{\{(Re^{i\theta})^2+1\}^2}\right|$$

$$\leqq \int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta}{(R^2-1)^2} = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$ である．

(2)　$f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+2i)\,(z^2-2i)}$ であるので，$R > \sqrt{2}$ のとき C_R で囲まれる領域内の f の極は $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 1+i$ と $\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i} = -1+i$ で共に 1 位である．$g(z) = z^4+1$, $h(z) = ze^{iz}$ とおくと，命題 2.1(2) の仮定が満たされるので，極 a における留数は，

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{h(a)}{g'(a)} = \frac{ae^{ia}}{4a^3} = \frac{e^{ia}}{4a^2}$$

となる．よって，

$$\mathrm{Res}(f;1+i) = \frac{e^{i(1+i)}}{4(1+i)^2} = \frac{e^{i-1}}{8i},$$
$$\mathrm{Res}(f;-1+i) = \frac{e^{i(-1+i)}}{4(-1+i)^2} = -\frac{e^{-i-1}}{8i}$$

となる．よって，

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}dx}{x^4+1} + \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}dz}{z^4+1} = 2\pi i \left(\frac{e^{i-1}}{8i} - \frac{e^{-i-1}}{8i} \right) = \frac{\pi i \sin 1}{2e}$$

となる．$\frac{1}{x^4+1}$ は偶関数であるので，

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}dx}{x^4+1} = i\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x\,dx}{x^4+1}$$

となる．また，Γ_R 上 $|e^{iz}| \leqq 1$ であるので，

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}dz}{z^4+1} \right| \leqq \int_0^{\pi} \frac{R^2 d\theta}{R^4-1} = \frac{\pi R^2}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となる．ゆえに，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi \sin 1}{2e}$ となる．

第 3 章

問 3.1.1　f は奇関数であるので，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

である．部分積分により，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

となる．ゆえに，フーリエ級数は，

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

である．

問 3.1.2 $\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)x}dx$ である．$m = n$ のとき被積分関数は 1 であるので $\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = 1$ となる．$m \neq n$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(m-n)x}}{m-n}\right] = 0$ である．

問 3.1.3

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sqrt{2\pi}(\phi_n(x)+\phi_{-n}(x))}{2}\,dx = \frac{c_{-n}+c_n}{\sqrt{2\pi}}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sqrt{2\pi}(\phi_n(x)-\phi_{-n}(x))}{2i}\,dx = \frac{c_{-n}-c_n}{\sqrt{2\pi}\,i}
\end{aligned}$$

となる．$n \in \mathbb{N}$ のとき，

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_n - ib_n)
\end{aligned}$$

となる．$-n \in \mathbb{N}$ のとき，

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\{\cos(-n)x + i\sin(-n)x\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_{-n} + ib_{-n})
\end{aligned}$$

となる．$n = 0$ のとき，

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_0(x)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

が成り立つ．

問 3.5.1 $\xi \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-|x|) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-x) \cos x\xi \, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{(1-x)\sin x\xi}{\xi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin x\xi}{\xi} \, dx \right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{\cos x\xi}{\xi^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}
\end{aligned}$$

となる．$\xi = 0$ のときは，

$$(\mathscr{F}f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-|x|) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

である．

問 3.5.2 $f(x) = e^{-|x|}$ は偶関数であるので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-2e^{-x} \right]_0^{\infty} = 2 < \infty$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-1-i\xi)x} dx \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-1-i\xi)x}}{-1-i\xi} \right]_0^{\infty} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\xi} - \frac{1}{-1-i\xi} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2+1}
\end{aligned}$$

である．

問 3.7.1 $f(x) = e^{-|x|}$ とすると，$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2+1}$ であった (問 3.5.2)．$c > 0$ に

対し，$f_c(x)=f(cx)$ とすると，定理 3.12 より $\hat{f}_c(\xi)=c^{-1}\hat{f}(c^{-1}\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c}{\xi^2+c^2}$ となる．ポアソンの和公式に f_c を適用して，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|2\pi ck|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c}{n^2+c^2}=\frac{c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+c^2}$$

となる．ここで，等比級数の和の公式より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|2\pi ck|} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{2\pi ck}+1+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\pi ck}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\pi ck}\\ &=1+\frac{2e^{-2\pi c}}{1-e^{-2\pi c}}=1+\frac{2e^{-\pi c}}{e^{\pi c}-e^{-\pi c}}=\frac{e^{\pi c}+e^{-\pi c}}{e^{\pi c}-e^{-\pi c}}\\ &=\frac{2\cosh\pi c}{2\sinh\pi c}=\coth\pi c\end{aligned}$$

となる．

問 3.8.1 (1) $|e^{-at}f(t)|\leqq e^{-(\mathrm{Re}\,a)t}Ce^{At}=Ce^{(A-\mathrm{Re}\,a)t}$.

(2) $|f(ct)|\leqq Ce^{A(ct)}=Ce^{cAt}$.

(3) 任意の $\epsilon>0$ に対して $t^n\leqq C_{\epsilon,n}e^{\epsilon t}$ $(t>0)$ となる定数 $C_{\epsilon,n}$ が存在する．ここで，$C_{\epsilon,n}$ は ϵ と n に応じて決まる．ゆえに，$|t^nf(t)|\leqq C_{\epsilon\,n}Ce^{\epsilon t}Ce^{At}=CC_{\epsilon,n}e^{(A+\epsilon)t}$ となる．

問 3.8.2 (1) $B\geqq A$ であるので，$|f(t)|\leqq Ce^{At}\leqq Ce^{Bt}$ が成り立つ．

(2) $|f(t)|\leqq C_1e^{At}$, $|g(t)|\leqq C_2e^{Bt}$ とする．(1) と同様に，$|af(t)+bg(t)|\leqq|a||f(t)|+|b||g(t)|\leqq(|a|C_1+|b|C_2)e^{\max\{A,B\}t}$ となる．

問 3.8.3 t^n のラプラス変換を $L_n(z)$ とおく．$L_n(z)=\frac{n!}{z^{n+1}}$ $(\mathrm{Re}\,z>0)$ を n に関する帰納法で示す．例 3.16 より，$L_0(z)=\frac{1}{z}=\frac{0!}{z^{0+1}}$ より正しい．$n-1$ のとき正しいとする．$\mathrm{Re}\,z>0$ のとき，部分積分により，

$$\begin{aligned}L_n(z)&=\int_0^\infty t^ne^{-zt}dt=\left[-\frac{t_n}{z}e^{-zt}\right]_0^\infty+\frac{1}{z}\int_0^\infty nt^{n-1}e^{-zt}dt\\ &=\frac{n}{z}L_{n-1}(z)=\frac{n}{z}\frac{(n-1)!}{z^n}=\frac{n!}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

となり，n のときも正しい事が分かる．

問 3.8.4 (1) $(\mathcal{L}(\cos t))(z)=\int_0^\infty(\cos t)e^{-zt}dt=\int_0^\infty\frac{(e^{it}+e^{-it})e^{-zt}}{2}dt=\left[\frac{e^{(i-z)t}}{2(i-z)}+\frac{e^{(-i-z)t}}{2(-i-z)}\right]_0^\infty=\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{2(z+i)}=\frac{z}{z^2+1}$.

(2) $(\mathcal{L}(\cos t))(z)=\left(\mathcal{L}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)\right)(z)=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{it})\right)(z)+\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{-it})\right)(z)=\frac{1}{2(z-i)}+\frac{1}{2(z+i)}=\frac{z}{z^2+1}$.

問 3.8.5 前問と同様に 2 種類の方法で計算してみよう．

(1) $(\mathcal{L}(\sin t))(z) = \int_0^\infty (\sin t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty \frac{(e^{it}-e^{-it})e^{-zt}}{2i}dt = \left[\frac{e^{(i-z)t}}{2i(i-z)} + \frac{e^{(-i-z)t}}{2(i+z)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)} = \frac{1}{z^2+1}$.

(2) $(\mathcal{L}(\sin t))(z) = \left(\mathcal{L}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\right)(z) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}(e^{it})\right)(z) - \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}(e^{-it})\right)(z) = \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)} = \frac{1}{z^2+1}$.

問 3.8.6 定理 3.21(2) と問 3.8.5 より，$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して，

$$(\mathcal{L}(\sin \omega t))(z) = \frac{1}{\omega}(\mathcal{L}(\sin t))\left(\frac{z}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega\left\{\left(\frac{z}{\omega}\right)^2+1\right\}} = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$$

となる．

問 3.8.7 n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは，例 3.19 より正しい事が分かる．$\left(\mathscr{L}(t^{n-1}e^{-at})\right)(z) = \frac{(n-1)!}{(z+a)^n}$ とする．定理 3.21(3) より，

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{L}(t^n e^{-at})\right)(z) &= \left(\mathscr{L}(t\cdot t^{n-1}e^{-at})\right)(z) = -\frac{d}{dz}\left(\mathscr{L}(t^{n-1}e^{-at})\right)(z) \\ &= -\frac{d}{dz}\frac{(n-1)!}{(z+a)^n} = \frac{n!}{(z+a)^{n+1}}\end{aligned}$$

となり，n の場合も正しい．

問 3.8.8 n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは，定理 3.21(5) である．$n-1$ のとき，

$$\left(\mathscr{L}(f^{(n-1)})\right)(z) = z^{n-1}(\mathscr{L}f)(z) - \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-2-k}f^{(k)}(0) \quad (\mathrm{Re}\, z > A)$$

が正しいとする．これと定理 3.21(5) を $f^{(n-1)}$ に対して用いて，

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{L}(f^{(n)})\right)(z) &= z\left(\mathscr{L}(f^{(n-1)})\right)(z) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z\left(z^{n-1}(\mathscr{L}f)(z) - \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-2-k}f^{(k)}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z^{n-1}(\mathscr{L}f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}f^{(k)}(0)\end{aligned}$$

を得る．

問 3.8.9 $\sin \omega t = -\frac{(\sin \omega t)''}{\omega^2}$ であるので，問 3.8.8 より，

$$(\mathscr{L}(\sin \omega t))(z) = -\frac{1}{\omega^2}\left(\mathscr{L}((\sin \omega t)'')\right)(z)$$

$$= -\frac{1}{\omega^2}\left(z^2\left(\mathscr{L}(\sin\omega t)\right)(z) - z\sin\omega 0 - (\sin\omega t)'|_{t=0}\right)$$
$$= -\frac{1}{\omega^2}\left(z^2\left(\mathscr{L}(\sin\omega t)\right)(z) - \omega\right)$$

となる．これを $\left(\mathscr{L}(\sin\omega t)\right)(z)$ について解くと，

$$\left(\mathscr{L}(\sin\omega t)\right)(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$$

を得る．

問 3.8.10 $(f*f)(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)}e^{-as}ds = \int_0^t e^{-at}ds = te^{-at}$.

問 3.8.11 $\left(\mathscr{L}\left(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{a-b}\right)\right)(z) = -\left(\mathscr{L}(e^{-at}*e^{-bt})\right)(z) = -\left(\mathscr{L}(e^{-at})\right)(z)\times\left(\mathscr{L}(e^{-bt})\right)(z) = -\frac{1}{(z+a)(z+b)}$.

演習 3.1 (1) (a) $a_n = 0$, $b_n = \frac{2\{1-(-1)^n\}}{n\pi}$ であるので，$n = 2m-1$ と置くと，$f(x) \sim \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$ となる．

(b) $x = \frac{\pi}{2}$ と置けばよい．

(c) パーセバルの等式より $\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = 2$ である．

(2) (a) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $n \neq 0$ のとき $a_n = -\frac{2\{1+(-1)^n\}}{n^2}$, $b_n = 0$ であるので，$n = 2m$ と置くと，$f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{m^2}$ となる．

(b) それぞれ $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ と置けばよい．

(c) パーセバルの等式より $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{3}\right)^2 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{\pi^4}{15}$ である．これを整理すればよい．

(3) (a) $a_n = 0$, $b_n = \frac{4\{1-(-1)^n\}}{n^3\pi}$ であるので，$n = 2m-1$ と置くと，$f(x) \sim \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}$ となる．

(b) $x = \frac{\pi}{2}$ と置けばよい．

(c) パーセバルの等式より $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{64}{(2m-1)^6} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{\pi^4}{15}$ である．

演習 3.2 $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ とすると，問題

の仮定より，$\frac{1}{2}|a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$ は収束する事がパーセバルの等式から分かる．特に，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ である．

演習 3.3 $\phi_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ とし，f を指数関数系 $\{\phi_n\}$ でフーリエ級数展開する．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ より，$c_0 = 0$ である．よって，

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} c_n\phi_n(x), \quad f'(x) \sim \sum_{n\neq 0} inc_n\phi_n(x)$$

となる．後者は定理 3.6 を用いた．ここで $\sum_{n\neq 0}$ は 0 以外の整数 n に関する和の意味である．パーセバルの等式と問題の仮定より，

$$\sum_{n\neq 0}|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx < \infty, \quad \sum_{n\neq 0} n^2|c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx < \infty$$

である．よって，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx - \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n\neq 0}\left(n^2-1\right)|c_n|^2$$

となる．0 以外の整数 n に対して $n^2-1 \geqq 0$ であるので，

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx - \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \geqq 0$$

を得る．等号は，

$$\sum_{n\neq 0}\left(n^2-1\right)|c_n|^2 = 0$$

が成り立つときに限る．$|n| > 1$ のとき $n^2-1 > 0$ であるので，上が成り立つためには $c_n = 0$ が必要である．一方，$n = \pm 1$ のときは $\left(n^2-1\right)|c_n|^2 = 0$ となるので，c_{-1}, c_1 は任意にとれる．従って，

$$f(x) = c_{-1}\phi_{-1}(x) + c_1\phi_1(x) = \frac{c_{-1}e^{-ix}+c_1e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}$$

となる．逆に, f が e^{ix} と e^{-ix} の一次結合である場合は, $n = \pm 1$ 以外の n について $c_n = 0$ であるので，$\sum_{n\neq 0}\left(n^2-1\right)|c_n|^2 = 0$ となる．すなわち，このときに限り不等式の等号が成り立つ．オイラーの公式を用いれば $\cos x$ と $\sin x$ の一次結合である場合と言ってもよい．

演習 3.4 f を奇関数として定義域を $[-\pi,\pi]$ に拡張する．これを三角関数系でフーリエ級数に展開する．奇関数であるので $a_n = 0$ となる．よって，

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx \quad \left(b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$$

である．パーセバルの等式より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2$$

となる．$|f(x)|^2$, $|f'(x)|^2$ は共に偶関数であるので，

$$\int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx - \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - 1\right) |b_n|^2$$

となる．自然数 n に対して $n^2 - 1 \geqq 0$ であるので，

$$\int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx - \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \geqq 0$$

となる．等号は $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2-1\right)|b_n|^2 = 0$ となるときであるので，b_1 は任意，$n \geqq 2$ のとき $b_n = 0$ が必要十分条件である．従って，$f(x) = b_1 \sin x$, すなわち $\sin x$ の定数倍の場合に限り等号が成立する．

演習 3.5 閉曲線 C を弧長媒介変数 s で $C = \{(x(s), y(s)) \,|\, 0 \leqq s \leqq L\}$ と表示する．閉曲線であるので，$x(0) = x(L)$, $y(0) = y(L)$ となる．よってこれらを周期 L の関数として拡張しておく．$z(s) = x(s) + iy(s)$ と置くと周期 L の複素数値関数となる．これは C を複素平面上の閉曲線と見なした事に相当する．$\phi_n(s) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2n\pi i s}{L}}$ とおき，$\{\phi_n\}$ で z を

$$z(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(s), \quad c_n = \int_0^L z(s)\overline{\phi_n(s)}\,ds$$

とフーリエ級数に展開する．s が弧長媒介変数であるので，$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ である．これは $|z'(s)|^2 = 1$ と書ける．

$$z'(s) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n\pi i c_n}{L} \phi_n(s)$$

であるので，パーセバルの等式より，

$$L = \int_0^L |z'(s)|^2 ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n^2\pi^2 |c_n|^2}{L^2}$$

となる．C 上の点 $(x(s), y(s))$ において，$(x'(s), y'(s))$ が単位接ベクトルであり，それを時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させた $(y'(s), -x'(s))$ が外向き単位法ベクトルである．問 1.6.2 より，

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^L (x(s), y(s)) \cdot (y'(s), -x'(s))\, ds = \frac{1}{2}\int_0^L \Big(x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\Big)\, ds$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} x(s)y'(s) - y(s)x'(s) &= (x(s) + iy(s))(y'(s) + ix'(s)) - i(x(s)x'(s) + y(s)y'(s)) \\ &= iz(s)\overline{z'(s)} - \frac{i}{2}\left(|z(s)|^2\right)' \end{aligned}$$

となる．$|z(s)|^2$ も周期 L の関数であるので，$\displaystyle\int_0^L \left(|z(s)|^2\right)' ds = 0$ となる．ゆえに，

$$|D| = \frac{i}{2}\int_0^L z(s)\overline{z'(s)} ds$$

となる．パーセバルの等式より，

$$|D| = \frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{\frac{2n\pi i c_n}{L}} = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\pi |c_n|^2$$

となる．よって，

$$L^2 - 4\pi|D| = \frac{4\pi^2}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)|c_n|^2$$

となる．n が整数のとき，$n(n-1) \geqq 0$ であるので，

$$L^2 - 4\pi|D| \geqq 0$$

を得る．等号は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)|c_n|^2 = 0$ となるときであるので，

$$z(s) = c_0\phi_0(s) + c_1\phi_1(s) = \frac{c_0}{\sqrt{L}} + \frac{c_1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i s}{L}}$$

となる．$|z'(s)| = 1$ であるので，c_1 は $|c_1| = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{2\pi}$ でなければならない．s_0 を $c_1 = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{2\pi} e^{-\frac{2\pi i s_0}{L}}$ を満たす実数とすると，

$$z(s) = \frac{c_0}{\sqrt{L}} + \frac{L}{2\pi} e^{\frac{2\pi i}{L}(s - s_0)}$$

となる．これは，複素平面上の $\frac{c_0}{\sqrt{L}}$ を中心とする半径 $\frac{L}{2\pi}$ の円である．

演習 3.6 $j = m$ のときは，示すべき不等式は自明であるので，$j < m$ とする．$\phi_n = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ とし，f を $\{\phi_n\}$ を用いてフーリエ級数に展開する．フーリエ係数を c_n とすると，定理 3.6 より，

$$f^{(j)}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^j c_n \phi_n(x)$$

となる．パーセバルの等式より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(j)}(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2j}|c_n|^2$$

となる．級数に関するヘルダー (Hölder) の不等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n b_n| \leqq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

を $a_n = |c_n|^{\frac{2(m-j)}{m}}$, $b_n = |n|^{2j}|c_n|^{\frac{2j}{m}}$, $p = \frac{m}{m-j}$, $q = \frac{m}{j}$ として用いると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2j}|c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^{\frac{2(m-j)}{m}} |n|^{2j}|c_n|^{\frac{2j}{m}} \\
&\leqq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{|c_n|^{\frac{2(m-j)}{m}}\right\}^{\frac{m}{m-j}}\right]^{\frac{m-j}{m}} \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|n|^{2j}|c_n|^{\frac{2j}{m}}\right)^{\frac{m}{j}}\right\}^{\frac{j}{m}} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2m}|c_n|^2\right)^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}$$

となる．再びパーセバルの等式を用いて，

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2m}|c_n|^2\right)^{\frac{j}{m}} \\
&\quad = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}$$

となる．

演習 3.7　(1)　$\xi \neq 0$ のとき，

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{\sqrt{2\pi}\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\xi}{\xi}$$

となる．$\xi = 0$ のとき，$(\mathscr{F}f)(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ である．

(2)　f は $x = 0$ では連続であるので，定理 3.10(1) より，

$$1 = f(0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} (\mathscr{F}f)(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi$$

となる．

(3) プランシュレルの定理より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F} f)(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \pi$$

となる．

演習 3.8 $\varphi(x; \mu_i, \sigma_i^2) = \varphi_i(x)$ とおくと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y; \mu_1, \sigma_1^2)\varphi(y; \mu_2, \sigma_2^2)\, dy = (\varphi_1 * \varphi_2)(x)$$

である．定理 3.15 より，

$$\left(\mathscr{F}(\varphi_1 * \varphi_2)\right)(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{\varphi}_1(\xi)\hat{\varphi}_2(\xi)$$

となる．$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおくと，$\varphi_i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} f\left(\dfrac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)$ である．$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ (例 3.7) と定理 3.12 より，

$$\hat{\varphi}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_i \xi} \hat{f}(\sigma_i \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\mu_i \xi} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_i \xi)^2}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\hat{\varphi}_1(\xi)\hat{\varphi}_2(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi} \hat{f}\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\xi\right) \end{aligned}$$

となる．これをフーリエ逆変換すると，

$$\begin{aligned} (\varphi_1 * \varphi_2)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}^{-1}\left[e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi} \hat{f}\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\xi\right)\right](x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\xi\right)\right](x-(\mu_1+\mu_2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} f\left(\frac{x-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right) \\ &= \varphi(x; \mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2) \end{aligned}$$

となる．

演習 3.9 2 通りの方法で示そう．

解法 1. 演習 3.6 の解答のフーリエ級数，パーセバルの等式を用いる箇所をフーリエ変換，プランシュレルの定理に置き換える方法．$j = m$ のときは，示すべき不等式は自明であるので，$j < m$ とする．f をフーリエ変換する．定理 3.13 より，

$$\left(\mathscr{F}(f^{(j)})\right)(\xi) = (i\xi)^j (\mathscr{F} f)(\xi)$$

となる．プランシュレルの定理より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(j)}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\left(\mathscr{F}(f^{(j)})\right)(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2j} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi$$

となる．積分に関するヘルダーの不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)\psi(\xi)|\, d\xi \leqq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

を $\varphi(\xi) = |(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2(m-j)}{m}}$, $\psi(\xi) = |\xi|^{2j}|(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2j}{m}}$, $p = \frac{m}{m-j}$, $q = \frac{m}{j}$ として用いると，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2j} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2(m-j)}{m}} |\xi|^{2j} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2j}{m}} d\xi \\
&\leqq \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left(|(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2(m-j)}{m}}\right)^{\frac{m}{m-j}}\right\}^{\frac{m-j}{m}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\xi|^{2j}|(\mathscr{F}f)(\xi)|^{\frac{2j}{m}}\right)^{\frac{m}{j}}\right\}^{\frac{j}{m}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2m} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}$$

となる．再びプランシュレルの定理を用いて，

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2m} |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{j}{m}} \\
&\quad = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}$$

となる．

解法 2. 演習 3.6 の結果を利用する方法．$|y| \leqq \pi$ に対し，$g(y) = f\left(\frac{L}{\pi}y\right)$ とおき，g に対して演習 3.6 の結果を利用すると，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{d^j g}{dy^j}(y)\right|^2 dy \leqq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(y)|^2 dy\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{d^m g}{dy^m}(y)\right|^2 dy\right)^{\frac{j}{m}}$$

となる．

$$\frac{d^j g}{dy^j}(y) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^j \frac{d^j f}{dx^j}\left(\frac{L}{\pi}y\right)$$

であるので，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{d^j g}{dy^j}(y)\right|^2 dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j} \left|\frac{d^j f}{dx^j}\left(\frac{L}{\pi}y\right)\right|^2 dy$$

$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j} \int_{-L}^{L} |f^{(j)}(x)|^2 \frac{\pi}{L}\, dx$$
$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j-1} \int_{-L}^{L} |f^{(j)}(x)|^2 dx$$

となる．よって，g の不等式を f で記述すると，

$$\left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j-1} \int_{-L}^{L} |f^{(j)}(x)|^2 dx$$
$$\leqq \left\{\left(\frac{L}{\pi}\right)^{-1} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx\right\}^{1-\frac{j}{m}} \left\{\left(\frac{L}{\pi}\right)^{2m-1} \int_{-L}^{L} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right\}^{\frac{j}{m}}$$
$$= \left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j-1} \left(\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-L}^{L} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{j}{m}}$$

となる．両辺を $\left(\frac{L}{\pi}\right)^{2j-1}$ で割って，右辺の積分範囲を全区間に拡げると，

$$\int_{-L}^{L} |f^{(j)}(x)|^2 dx \leqq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1-\frac{j}{m}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx\right)^{\frac{j}{m}}$$

となる．$L \to \infty$ とすれば示すべき不等式が得られる．

解法 1 と解法 2 を比較すれば，g に対するパーセバルの等式を $L \to \infty$ とすると f に対するプランシュレルの定理になる事が感覚的に理解できると思う．

演習 3.10 関数 f に対し，$f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, $f_{\lambda,c}(x) = f_\lambda(x+c)$ とおく．定理 3.12 より

$$\hat{f}_{\lambda,c}(\xi) = \hat{f}_\lambda(\xi)e^{ic\xi} = \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)e^{ic\xi}$$

となる．$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\lambda = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, $c = 2\pi\alpha$ とおく．

$$f_\lambda(x) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda x)^2} = e^{-\frac{tx^2}{4\pi}}, \quad f_{\lambda,c}(x) = e^{-\frac{t}{4\pi}(x+c)^2} = e^{-\frac{t}{4\pi}(x+2\pi\alpha)^2}$$

である．$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ (例 3.7) であるので，

$$\hat{f}_{\lambda,c}(\xi) = \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)e^{ic\xi} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{t}}\xi\right)^2}e^{2\pi\alpha i\xi} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}+2\pi\alpha i\xi}$$

となる．よって，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\lambda,c}(2k\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{4\pi}(2k\pi+2\pi\alpha)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(k+\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\lambda,c}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-\frac{\pi n^2}{t}+2n\alpha\pi i} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}+2n\alpha\pi i}$$

となる．ポアソンの和公式 (定理 3.18) により

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(k+\alpha)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}+2n\alpha\pi i}$$

を得る．

演習 3.11　区間 (a,b) は問題のものとする．

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) &= \int_a^b f(x-y)(g*h)(y)\,dy \\ &= \int_a^b f(x-y)\left(\int_a^b g(y-z)h(z)\,dz\right)dy\end{aligned}$$

となる．問題の仮定より，ルベーグ積分論のフビニ (Fubini) の定理が使えて，積分順序が交換できる．よって，

$$(f*(g*h))(x) = \int_a^b \left(\int_a^b f(x-y)g(y-z)\,dy\right)h(z)\,dz$$

となる．y に関する積分について z を固定して $w=y-z$ と置換すると，

$$\int_a^b f(x-y)g(y-z)\,dy = \int_{a-z}^{b-z} f(x-z-w)g(w)\,dw$$

となる．(i) の場合，$(a-z,b-z)=(-\pi-z,\pi-z)$ である．被積分関数は周期 2π であるので，$(-\pi-z,\pi-z)$ 上の積分は $(-\pi,\pi)=(a,b)$ 上の積分に等しい．(ii) の場合，$a=-\infty$, $b=\infty$ であるので，$(a-z,b-z)=(-\infty,\infty)=(a,b)$ である．よって，

$$\int_a^b f(x-y)g(y-z)\,dy = \int_a^b f(x-z-w)g(w)\,dw = (f*g)(x-z)$$

となる．これを上に代入して，

$$(f*(g*h))(x) = \int_a^b (f*g)(x-z)h(z)\,dz = ((f*g)*h)(x)$$

を得る．

演習 3.12　ラプラス変換を定義する積分区間を $[kL,(k+1)L]$ の和集合に分割して考える．但し $k=0,\,1,\,2,\,\cdots$ である．f の周期性より $f(t+kL)=f(t)$ である事を利用して，

$$(\mathscr{L}f)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kL}^{(k+1)L} e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^L e^{-s(t+kL)} f(t+kL)\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skL} \int_0^L e^{-st} f(t)\,dt$$

となる．$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき $|e^{-sL}| < 1$ であるので，等比級数の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skL} = \frac{1}{1-e^{-sL}}$$

となる．

第 4 章

問 4.1.1 e^{ix}, e^{-ix} が共に $y''(x) + y(x) = 0$ を満たす事を確かめればよい．

問 4.1.2 4 つの関数が解である事は代入すれば確かめられるので詳細は略す．$y(x) = \frac{1}{x+ce^x} + 1$ を一般解の表示としたとき，$y(x) = \frac{1}{x}$ は $c = 0$ としたときの特殊解，$y(x) \equiv 1$ は特異解である．$y(x) = \frac{c}{cx+e^x} + 1$ を一般解の表示としたとき，$y(x) = \frac{1}{x}$ は特異解，$y(x) \equiv 1$ は $c = 0$ としたときの特殊解である．

問 4.2.1 $y_k(x) = c_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \to c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $z_k(x) = -c_1 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \to -c_1 \sin x + c_2 \cos x$ $(k \to \infty)$.

問 4.3.1 $y = \pm i$ は解である．それ以外の解は $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$ を計算して，

$$\arctan y = \arctan x + c$$

となる．$C = \tan c$ とおくと，

$$y = \tan(\arctan x + c) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

となる．

問 4.3.2 $y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ と変形し，$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$z' = \frac{\frac{1+z}{1-z} - z}{x} = \frac{1+z^2}{x(1-z)}$$

となる．まず，$z = \pm i$ は解である事が分かる．y で表せば，$y(x) = \pm ix$ となる．その他に

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{dx}{x} + c$$

の各辺を計算して，

$$\arctan z - \frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log x + c$$

となる．y で記して，

$$\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

が解である．

問 4.3.3　$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \frac{a\sqrt{1+z^2}+bz}{b}$$

となる．よって，

$$z' = \frac{a\sqrt{1+z^2}}{bx}$$

となる．$z=\pm i$ は解であるが，今求めているのは，$x=c$ のとき，$z=0$ となる実数解であるので適さない．よって，

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a}{bx}$$

を積分して，

$$\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{a}{b}\log x + C$$

である．$x>0$ である事と，$x=c$ のとき，$z=0$ である事を考慮すると，

$$\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{a}{b}\log\frac{x}{c}$$

となる．y に戻して，

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = x\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{a}{b}}$$

となる．

問 4.3.4

$$y'(x) = f\left(\frac{ax+by+c}{r}\right)$$

である．

- $b=0$ であれば，初めから変数分離形である．
- $b\neq 0$ のときは，$u=ax+by$ とおく．

$$u' = a+by' = a+bf\left(\frac{u+c}{r}\right)$$

　となり，未知関数 u に関して変数分離形である．

問 4.3.5　$q=0$ のとき，

$$y' = f\left(\alpha + \frac{\beta}{px+r}\right)$$

となり，変数分離形である．

$q \neq 0$ のときは，$u = px + qy$ とおくと，

$$y' = \frac{u'-p}{q}$$

であるので，方程式は，

$$u' = qf\left(\alpha + \frac{\beta}{u+r}\right) + p$$

に帰着される．これは u に関して変数分離形である．

問 4.3.6 (1) <u>変数分離形としての解法</u>. $y \equiv 0$ は解である．それ以外の解は $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int (x+1)\,dx$ を計算して，

$$\log y = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

となる．$C = e^c$ とおくと，$C \neq 0$ であり，

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+x}$$

となる．$y \equiv 0$ は $C = 0$ の場合に相当する．

<u>線形としての解法</u>. $y' - (x+1)y = 0$ と変形し，両辺に $e^{-\frac{1}{2}x^2+x}$ を掛けると，

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2+x}y\right) = 0$$

となる．よって，$e^{-\frac{1}{2}x^2+x}y = c$ となる．y について解いて，$y = ce^{\frac{x^2}{2}+x}$ を得る．

(2) <u>変数分離形としての解法</u>. $y \equiv 1$ は解である．それ以外の解は $\displaystyle -\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ を計算して，

$$-\log(y-1) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$$

となる．$C = e^{\mp c}$ とおくと，$C \neq 0$ であり，$(y-1)\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = C$ となる．$y \equiv 1$ は $C = 0$ の場合に相当する．

<u>線形としての解法</u>. $y' \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ と変形し，両辺に $x + \sqrt{1+x^2}$ を掛けると，

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)y\right\} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

となる．積分して，

$$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)y = \sqrt{1+x^2} + x + c$$

となる．ゆえに，$(y-1)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=c$ を得る．

(3)　$u=y+\dfrac{1}{x}$ とおくと，u は，

$$u'+\frac{2u}{x}+u^2=0$$

を満たす．$u\equiv 0$ は解である．それ以外の解を求めるため，$v=\frac{1}{u}$ とおくと，

$$v'-\frac{2v}{x}=1$$

となる．両辺に x^{-2} を掛けると，

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-2}v\right)=x^{-2}$$

となる．積分して，その結果を v について解くと，

$$v=-x+cx^2$$

となる．よって，u は $u\equiv 0$, $u=\dfrac{1}{-x+cx^2}$ となる．y は，$y=-\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{-x+cx^2}-\dfrac{1}{x}$ となる．

問 4.3.7　(1)　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^3+2xy\right)=2x=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y\right)$ であるので完全微分方程式である．解は，

$$\int_{x_0}^{x}\left(x^3+2xy\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(x_0^2-y\right)dy=c$$

で与えられる．$x_0=y_0=0$ として計算すると，

$$\frac{x^4}{4}+x^2y-\frac{y^2}{2}=c$$

となる．

(2)　$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x-2y+3)=-2=\dfrac{\partial}{\partial x}(-2x+4y+1)$ であるので完全微分方程式である．解は，

$$\int_{x_0}^{x}(2x-2y+3)\,dx+\int_{y_0}^{y}(-2x_0+4y+1)\,dy=c$$

で与えられる．$x_0=y_0=0$ として計算すると，

$$x^2-2xy+3x+2y^2+y=c$$

となる．

問 4.3.8　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3yx^2\right)=3x^2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{-\left(x^3-4y^3\right)\right\}=-3x^2$ で，これらは等しくない

ので，与えられた方程式は完全微分方程式ではない．$x^m y^n$ を方程式の両辺に掛けて，

$$x^m y^n \left(3yx^2\right) dx - x^m y^n \left(x^3 - 4y^3\right) dy = 0$$

となる．

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ x^m y^n \left(3yx^2\right) \right\} = 3(n+1) y^n x^{m+2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -x^m y^n \left(x^3 - 4y^3\right) \right\} = -(m+3) x^{m+2} y^n + 4m x^{m-1} y^{n+3}$$

である．これらは $m = 0$, $n = -2$ であれば恒等的に等しくなる．よって，y^{-2} が積分因子である．まず，$y \equiv 0$ は元の微分方程式の解である．これ以外の解を求めるため，方程式の両辺に y^{-2} を掛けた

$$3y^{-1} x^2 dx - \left(x^3 y^{-2} - 4y\right) dy = 0$$

を考える．これは完全微分方程式で，解は，

$$\int_{x_0}^{x} 3y^{-1} x^2 dx - \int_{y_0}^{y} \left(x_0^3 y^{-2} - 4y\right) dy = c$$

で与えられる．$x_0 = 0$, $y_0 = 1$ で計算し，$c + 2$ を改めて c と書くと，

$$\frac{x^3}{y} + y^2 = c$$

となる．以上より解は，$y \equiv 0$, $x^3 + 2y^3 = cy$ である．

問 4.5.1

$$\begin{aligned} y_2'(x) = & \, y_1'(x) \int^x (y_1(t))^{-2} \exp\left(-\int^x P_1(\tau)\, d\tau\right) \\ & + (y_1(x))^{-1} \exp\left(-\int^x P_1(t)\, dt\right) \\ = & \, (y_1(x))^{-1} \left\{ y_2(x) y_1'(x) + \exp\left(-\int^x P_1(t)\, dt\right) \right\} \end{aligned}$$

である．従って，

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & (y_1(x))^{-1} \left\{ y_2(x) y_1'(x) + \exp\left(-\int^x P_1(t)\, dt\right) \right\} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ 0 & (y_1(x))^{-1} \exp\left(-\int^x P_1(t)\, dt\right) \end{pmatrix} \\ & \qquad [\text{第 } 2 \text{ 行} - \text{第 } 1 \text{ 行} \times (y_1(x))^{-1} y_1'(x)] \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\int^x P_1(t)\,dt\right)$$

となる．

問 4.5.2　(1)　代入すればよいので略．

(2)　$y(x) = xu(x)$ の形で求める．方程式に代入して整理すると，

$$u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)u' = 0$$

となる．両辺に $x^2\left(1-x^2\right)$ を掛けると，$\left\{x^2\left(1-x^2\right)u'\right\}' = 0$ となる．よって，

$$u' = c_1\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\right\}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} y = xu &= x\int c_1\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\right\}dx \\ &= c_1\left(-1 + \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right) + c_2 x \end{aligned}$$

となる．

問 4.6.1　$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ であるので，

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} + (D+1)^{-2}(D-2)^{-1}x$$

である．$|\lambda| < 2$ のとき等比級数の和の公式より，

$$(\lambda-2)^{-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \cdots\right)$$

となる．よって，

$$(D-2)^{-1}x = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}D\right)x = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

となる．$|\lambda| < 1$ のとき等比級数の和の公式より，

$$(\lambda+1)^{-1} = \frac{1}{1+\lambda} = 1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \cdots$$

となる．$|\lambda| < 1$ においては項別微分出来るので，

$$(\lambda+1)^{-2} = -\frac{d}{d\lambda}(1+\lambda)^{-1} = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \cdots$$

となる．従って，

$$(D+1)^{-2}(D-2)^{-1}x = (D+1)^{-2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = (1-2D)\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + 1 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

となる．ゆえに，求める一般解は，$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$ である．

問 4.7.1 (1) $A^k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$ であるので，

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(dx)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{dx} \end{pmatrix}$$

となる．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるので，$A^2 = E$ となる．よって，$A^{2k} = E$, $A^{2k+1} = A$ である．従って，

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} A = (\cosh x)E + (\sinh x)A$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

となる．

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ であるので，$A^2 = O$ となる．$k \geqq 2$ に対して $A^k = O$ となるので，

$$e^{xA} = E + xA = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$$

となる．

(4) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$A = E + B$ である．$B^2 = O$ であるので，

$$A^2 = (E+B)(E+B) = E + 2B + B^2 = E + 2B,$$
$$A^3 = A^2A = (E+2B)(E+B) = E + 3B + B^2 = E + 3B$$

となる．以下，同様に

$$A^k = E + kB$$

となる．ゆえに，

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(E+kB) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}B$$
$$= e^x E + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}B = e^x E + xe^x B = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

となる．

問 4.7.2 $AB = BA$ のとき，積級数に関するコーシーの定理 (定理 2.5) より，

$$e^A e^B = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{m} \frac{A^\ell}{\ell!}\frac{B^{m-\ell}}{(m-\ell)!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{m} \frac{{}_mC_\ell A^\ell B^{m-\ell}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = e^{A+B}$$

となる．

問 4.7.3 A と $-A$ は $A(-A) = (-A)A$ を満たす．よって，問 4.7.2 と例 4.34 より，

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^O = E$$

となる．同様に，$e^{-A}e^A = E$ が成り立つ．

問 4.7.4 $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ である．問 4.7.1(1) より，

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

となる．$A^2 = B^2 = O$ であるので，

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．よって，

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，$e^{A+B} \neq e^A e^B$ である．

問 4.7.5 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の形となる．

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)(-4) = (\lambda-3)(\lambda+2)$$

であるので，一般解は，

$$y_1 = \alpha_1 e^{3x} + \beta_1 e^{-2x}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{3x} + \beta_2 e^{-2x}$$

の形である．これらを方程式に代入すると，

$$\begin{cases} 3\alpha_1 e^{3x} - 2\beta_1 e^{-2x} = & 2(\alpha_1 e^{3x} + \beta_1 e^{-2x}) - (\alpha_2 e^{3x} + \beta_2 e^{-2x}), \\ 3\alpha_2 e^{3x} - 2\beta_2 e^{-2x} = & -4(\alpha_1 e^{3x} + \beta_1 e^{-2x}) - (\alpha_2 e^{3x} + \beta_2 e^{-2x}) \end{cases}$$

となる．e^{3x}, e^{-2x} の係数を比較すると，$\alpha_2 = -\alpha_1$, $\beta_2 = 4\beta_1$ を得る．α_1, β_1 を改めて c_1, c_2 と書いて，一般解は $y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$, $y_2 = -c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-2x}$ (c_1, c_2 は任意定数) となる．

問 4.7.6 前問が対応する同次方程式の一般解である．その結果から非同次方程式の解を，

$$y_1 = u_1 e^{3x} + u_2 e^{-2x}, \quad y_2 = -u_1 e^{3x} + 4u_2 e^{-2x}$$

の形で求める．ここで u_1, u_2 は関数である．方程式に代入すると，

$$u_1' e^{3x} + u_2' e^{-2x} = e^{2x}, \quad -u_1' e^{3x} + 4u_2' e^{-2x} = x^2 e^x$$

となる．これより，

$$u_1' = \frac{1}{5}\left(4e^{-x} - x^2 e^{-2x}\right), \quad u_2' = \frac{1}{5}\left(e^{4x} + x^2 e^{3x}\right)$$

となる．積分して，

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{4}{5}e^{-x} + \frac{1}{10}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c_1, \\ u_2 &= \frac{1}{20}e^{4x} + \frac{1}{135}e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + c_2 \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} y_1 = & \left\{-\frac{4}{5}e^{-x} + \frac{1}{10}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c_1\right\} e^{3x} \\ & + \left\{\frac{1}{20}e^{4x} + \frac{1}{135}e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + c_2\right\} e^{-2x} \\ = & \, c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + e^x\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x + \frac{7}{108}\right), \\ y_2 = & -\left\{-\frac{4}{5}e^{-x} + \frac{1}{10}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c_1\right\} e^{3x} \\ & + 4\left\{\frac{1}{20}e^{4x} + \frac{1}{135}e^{3x}\left(9x^2 - 6x + 2\right) + c_2\right\} e^{-2x} \\ = & -c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{-2x} + e^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{1}{108}\right) + e^{2x} \end{aligned}$$

が一般解である．

問 4.8.1 方程式の両辺をラプラス変換して

$$z(\mathscr{L}y)(z) - y_0 - a(\mathscr{L}y)(z) = (\mathscr{L}f)(z)$$

となる．$(\mathscr{L}y)(z)$ について解いて，

$$(\mathscr{L}y)(z) = \frac{1}{z-a}\left(y_0 + (\mathscr{L}f)(z)\right)$$

となる．ラプラス逆変換して，

$$\begin{aligned}
y(x) = &\left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-a}\left(y_0 + (\mathscr{L}f)(z)\right)\right)\right)(x) \\
&= y_0\left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-a}\right)\right)(x) + \left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-a} \times (\mathscr{L}f)(z)\right)\right)(x) \\
&= y_0 e^{ax} + \left(\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-a}\right) * f\right)(x) \\
&= y_0 e^{ax} + \int_0^x e^{a(x-t)} f(t)\, dt
\end{aligned}$$

となる．

問 4.8.2 $y''(x) = f(x)$ を積分して $y'(x) = c_1 + \int_0^x f(t)\,dt$ (c_1 は定数) となる．$y'(0) = 0$ となるためには $c_1 = 0$ が必要である．このとき，$y'(1) = \int_0^1 f(x)\,dx$ となるので，解が存在するためには $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ が必要である．$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ とする．$y'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ を積分して $y(x) = c_2 + \int_0^x \int_0^t f(s)\,dsdt$ となる．これが真の解である．但し，c_2 は任意定数である．真の解と形式解が一致する事を確かめる．$\{\cos n\pi x\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を用いて真の解のフーリエ係数を計算する．

$$y_0 = \int_0^1 y(x)\,dx = c_2 + \int_0^1 \int_0^x \int_0^t f(s)\,dsdtdx$$

である．c_2 は任意に選べるので y_0 も任意定数である．$n \geqq 1$ については部分積分により，

$$\begin{aligned}
y_n = &\left(\int_0^1 \cos^2 n\pi x\,dx\right)^{-1} \int_0^1 y(x)\cos n\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{n\pi}\left(c_2 + \int_0^x \int_0^t f(s)\,dsdt\right)\sin n\pi x\right]_0^1\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\sin n\pi x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx\right\} \\
&= -\frac{f_n}{(n\pi)^2}
\end{aligned}$$

となる．y は 2 回連続的微分可能であるので，フーリエ級数は元の関数と各点で一致

する．ゆえに，

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos n\pi x = y_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \cos n\pi x}{(n\pi)^2} \quad (y_0 \text{ は任意定数})$$

となる．

問 4.8.3 f を $x=0$ で偶関数になるように定義域を $[-1,1]$ に拡張する．すなわち，

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in[0,1]), \\ f(-x) & (x\in[-1,0]) \end{cases}$$

とおく．

$$y''+ay=\tilde{f}, \quad y(-1)=y(1)=0$$

を満たす形式解で $x=0$ に関して偶関数となるものを構成すればよい．両端で 0 となる場合の結果を区間が $[0,1]$ でなく $[-1,1]$ である事を考慮して利用すれば，$\left\{\sin\frac{m\pi(x+1)}{2}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ を用いて解を構成する事ができる．$x=0$ に関して，$\sin\frac{2n\pi(x+1)}{2}$ は奇関数，$\sin\frac{(2n+1)\pi(x+1)}{2}$ は偶関数である．$\tilde{f}$ が $x=0$ に関して偶関数であるので，$\sin\frac{2n\pi(x+1)}{2}$ のフーリエ係数は 0 となる．ゆえに，$\left\{\sin\frac{(2n+1)\pi(x+1)}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ を用いればよい事が分かる．

$$\begin{aligned}\sin\frac{(2n+1)\pi(x+1)}{2} &= \sin\left\{\frac{(2n+1)\pi x}{2}+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right\} \\ &= (-1)^{n-1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\end{aligned}$$

である．三角関数系の符号はフーリエ係数に吸収されるので，結局，$\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right\}_{n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ を用いればよい事が分かる．実際，これらは境界条件 $\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right\}'\Big|_{x=0}=0$, $\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\Big|_{x=1}=0$ を満たす．

次のように考えてもよい．f を $x=1$ で奇関数になるように定義域を $[0,2]$ に拡張したい．但し $f(1)=0$ とは限らないので

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in[0,1]), \\ -f(2-x) & (x\in(1,2]) \end{cases}$$

とする．

$$y''+ay=\tilde{f}, \quad y'(0)=y'(2)=0$$

を満たす形式解で $x=1$ に関して奇関数となるものを構成すればよい．両端で微分係数が 0 となる場合の結果を区間が $[0,1]$ でなく $[0,2]$ である事を考慮して利用すれば，$\left\{\cos\frac{m\pi x}{2}\right\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を用いて解を構成する事ができる．$x=1$ に関して，$\cos\frac{2n\pi x}{2}$ は偶関数，$\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$ は奇関数である．$\tilde{f}$ が $x=1$ に関して奇関数であるので，$\cos\frac{2n\pi x}{2}$ のフーリエ級数は 0 となる．結局，$\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を用いればよい事が分かる．実際，これらは $\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right\}'\Big|_{x=0}=0$, $\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\Big|_{x=1}=0$ で

あり境界条件を満たす．

問 4.8.4 $f = e^{im\theta}$ のときポアソン方程式の解は $u = r^{|m|}e^{im\theta}$ であるので，ポアソンの公式より，

$$r^{|m|}e^{im\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta-\vartheta)e^{im\vartheta}d\vartheta$$

となる．或いは

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} P(\theta-\vartheta)e^{im\vartheta}d\vartheta \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n e^{in(\theta-\vartheta)}e^{im\vartheta}d\vartheta + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n e^{-in(\theta-\vartheta)}e^{im\vartheta}d\vartheta \\
&\quad = 2\pi r^{|m|}e^{im\theta}
\end{aligned}$$

としてもよい．

問 4.8.5 $u(x,0) = e^0\sin nx = u_0(x)$, $u(0,t) = e^{-(n\pi)^2t}\sin 0 = 0$, $u(1,t) = e^{-(n\pi)^2t}\sin n\pi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -(n\pi)^2e^{-(n\pi)^2t}\sin n\pi x = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)$ であるので真の解である．

問 4.8.6 $u(x,t) = e^{-(\lambda\pi)^2t}\cos\lambda\pi x.$

問 4.8.7 略．

問 4.8.8 積分順序の交換により，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} E(x-z,t_1)\left(\int_{-\infty}^{\infty} E(z-y,t_2)u_0(y)\,dy\right)dz \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} E(x-z,t_1)E(z-y,t_2)\,dz\right)u_0(y)\,dy
\end{aligned}$$

となる．y を固定して $w = z-y$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} E(x-z,t_1)E(z-y,t_2)\,dz &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y-w,t_1)E(w,t_2)\,dw \\
&= E(x-y,t_1+t_2)
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} E(x-z,t_1)E(z-y,t_2)\,dz\right)u_0(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y,t_1+t_2)u_0(y)\,dy$$

となる．

問 4.8.9 例 4.46 と同様に $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ とし，$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ を考える

事で，$u(x,t) = \phi(x+t) + \psi(x-t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \phi'(x+t) - \psi'(x-t)$ となる．これらに $t=0$ を代入して，$0 = \phi(x) + \psi(x)$, $u_1(x) = \phi'(x) - \psi'(x)$ となる．後者より，$\psi(x) = \phi(x) - \int_0^x u_1(y)\,dy + c$ (c は定数) となる．前者に代入して，$0 = 2\phi(x) - \int_0^x u_1(y)\,dy + c$ となる．ゆえに，$\phi(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x u_1(y)\,dy - c\right)$, $\psi(x) = -\frac{1}{2}\left(\int_0^x u_1(y)\,dy - c\right)$ となる．以上より，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \phi(x+t) + \psi(x-t)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{x+t} u_1(y)\,dy - c\right) - \frac{1}{2}\left(\int_0^{x-t} u_1(y)\,dy - c\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,dy
\end{aligned}$$

を得る．

演習 4.1 (1) $\displaystyle\int (y-b)\,dy = -\int (x-a)\,dx$ を計算して，$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ となる．

(2) $z = y + x$ とおくと $z' = y' + 1$ であるので，方程式は $z(z'-1) = 1$ となる．これより，$z' = \dfrac{1+z}{z}$ となるので，まず $z \equiv -1$ が解である事が分かる．これ以外の解は $\displaystyle\int \frac{z}{1+z}\,dz = \int dx$ を計算して，$z - \log(1+z) = x + c$ となる．y で表すと $y = -x - 1$ と $y - \log(1+y+x) = c$ となる．後者は e^{-c} を改めて c と書くと，$c \neq 0$ であり，$y + x + 1 = ce^y$ と書ける．$y = -x - 1$ は $c = 0$ の場合に相当する．ゆえに解は $y + x + 1 = ce^y$ (c は任意定数) である．

(3) $z = y'$ とおくと，$z' = z^2 - 1$, $z(0) = 0$ となる．$z \equiv \pm 1$ は前者を満たすが後者を満たさない．これ以外の解は $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2-1} = \int dx$ を計算して，$-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z} = x + C$ となる．$z(0) = 0$ を満たすのは $C = 0$ のときである．この場合，$z = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1 - \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ となる．ゆえに，$y = \int z\,dx = x - \log\left(1+e^{2x}\right) + c$ となる．

(4) $z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$xz' = 1 + z^2$ となる．これより，$z \equiv \pm i$ は解である．それ以外の解は $\displaystyle\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$ を計算して，$\arctan z = \log x + c$ となる．ゆえに，$y = zx = \pm ix$ と $y = zx = x\tan(\log x + c)$ が解である．

(5) $z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$\left(1-z^2\right)xz' = z(z^2+1)$ となる．よって，$z \equiv 0$, $z \equiv \pm i$ は解である．ゆえに，$y \equiv 0$, $y = \pm ix$ は元の方程式の解である．これら以外の解は，$\displaystyle\int \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$ を計算して，$\log\dfrac{x\left(z^2+1\right)}{z} = C$ となる．$\pm e^C = c$ とおき，y で表せば，$x^2 + y^2 = cy$ ($c \neq 0$) となる．先に求めた

$y=\pm ix$ は $c=0$ の場合に相当する．ゆえに，$y\equiv 0$, $x^2+y^2=cy$ (c は任意定数) が解である．

演習 4.2 ヒントで与えられた z の微分方程式を積分して，

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-a}{r}$$

となる．左辺を計算するため，$z=\tan\theta$ とおく．$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ で考えればよいので，$\cos\theta>0$ としてよい．

$$1+z^2=\frac{1}{\cos^2\theta},\ dz=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

であるので，

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\pm\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

となる．よって，

$$\pm\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{x-a}{r}$$

を得る．両辺を平方して整理すると，

$$z^2=\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2}$$

となる．従って，

$$y=\int z\,dx=\pm\int \frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}dx=\mp\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$$

となる．ゆえに，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

を得る．

演習 4.3 (1) $\rho=\dfrac{p}{k}$ より，$\dfrac{dp}{dh}=-\dfrac{g}{k}p$ となる．これは変数分離形である．$p\equiv 0$ と $\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{g}{k}\,dh$ より得られる $p=ce^{-\frac{g}{k}h}$ が解である．従って，$p(0)=p_0>0$ となる解は，$p(h)=p_0e^{-\frac{g}{k}h}$ である．

(2) $\rho=\left(\dfrac{p}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ より，$\dfrac{dp}{dh}=-g\left(\dfrac{p}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ となる．これは変数分離形である．$p\equiv 0$ と $\displaystyle\int p^{-\frac{1}{\gamma}}dp=-\int\frac{g}{k^{\frac{1}{\gamma}}}\,dh$ より得られる $p=\left(-\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{gh}{k^{\frac{1}{\gamma}}}+c\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ が解である．従って，$p(0)=p_0>0$ となる解は，$p(h)=\left(p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{gh}{k^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ である．

演習 4.4 時刻を t とすると，ニュートン (Newton) の運動法則から，(1) の場合は，$m\dfrac{dv}{dt} = mg$, (2) の場合は，$m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ という微分方程式が得られる．これらを $v(0) = 0$ の下で解いて，(1) の場合，$v = gt$, (2) の場合，$v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ となる．すなわち，空気抵抗が無ければ，運動は，質量に依らないが，抵抗を考慮すると，軽い物体ほど緩やかに落下する事が分かる．

演習 4.5 (1) u が満たす偏微分方程式と初期条件を x_2 についてフーリエ変換する．積分と微分の順序交換が行えるとする．また，定理 3.13 より，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ のフーリエ変換が $-\xi_2^2\hat{u}$ になる事に注意すると，

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(x_1, \xi_2, t) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1^2}(x_1, \xi_2, t) - \xi_2^2\hat{u}(x_1, \xi_2, t) + \hat{f}(x_1, \xi_2, t),$$
$$\hat{u}(x_1, \xi_2, 0) = \hat{u}_0(x_1, \xi_2)$$

となる．

(2) 上記を ξ_2 を固定して変数 (x_1, t) の偏微分方程式の初期値問題と考えると，4.8.2 項の熱方程式の項の結果より，形式解は，

$$\begin{aligned}\hat{u}(x_1, \xi_2, t) &= e^{-\xi_2^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} E(x_1 - y_1, t)\hat{u}_0(y_1, \xi_2, t)\, dy_1 \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1 - y_1, t - s)e^{-\xi_2^2(t-s)}\hat{f}(y_1, \xi_2, s)\, dy_1 ds\end{aligned}$$

となる．

(3) 上の式の両辺を ξ_2 についてフーリエ逆変換する．ξ_2 についてフーリエ逆変換を $\mathscr{F}_{\xi_2}^{-1}$ で表す．積分の順序交換が行えるとすると，

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1 - y_1, t)\left(\mathscr{F}_{\xi_2}^{-1}\left(e^{-\xi_2^2 t}\hat{u}_0(y_1, \xi_2)\right)\right) dy_1 \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1 - y_1, t - s)\left(\mathscr{F}_{\xi_2}^{-1}\left(e^{-\xi_2^2(t-s)}\hat{f}(y_1, \xi_2, s)\right)\right) dy_1 ds\end{aligned}$$

となる．x_2 についてのフーリエ変換，たたみ込みをそれぞれ $\mathscr{F}_{x_2}$，$*_{x_2}$ で表すと，

$$\begin{aligned}e^{-\xi_2^2 t}\hat{u}_0(y_1, \xi_2) &= \mathscr{F}_{x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x_2^2}{4t}}\right)\mathscr{F}_{x_2}\left(u_0(y_1, x_2)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_{x_2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x_2^2}{4t}}\right) *_{x_2} u_0(y_1, x_2)\right)\end{aligned}$$

となるので，

$$\mathscr{F}_{\xi_2}^{-1}\left(e^{-\xi_2^2 t}\hat{u}_0(y_1, \xi_2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x_2^2}{4t}}\right) *_{x_2} u_0(y_1, x_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E(x_2 - y_2, t) u_0(y_1, y_2)\, dy_2$$

を得る．同様に，

$$\mathscr{F}_{\xi_2}^{-1}\left[e^{-\xi_2^2(t-s)}\hat{f}(y_1, \xi_2, s)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E(x_2 - y_2, t-s) f(y_1, y_2, s)\, dy_2$$

となる．ゆえに，

$$E(x_1, x_2, t) = E(x_1, t)E(x_2, t) = \frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4t}\right)$$

とおくと，形式解は，

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) = &\int_{\mathbb{R}^2} E(x_1 - y_1, x_2 - y_2, t) u_0(y_1, y_2, t)\, dy_1 dy_2 \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} E(x_1 - y_1, x_2 - y_2, t) f(y_1, y_2, s)\, dy_1 dy_2 ds \end{aligned}$$

となる．

上の議論を繰り返せば，n 次元の熱方程式の形式解の表示が得られる．$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, $dy = dy_1 \cdots dy_n$ とし，

$$E(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

と置くと，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + f(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)),$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

の形式解は，

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y, t) u_0(y, t)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y, t - s) f(y, s)\, dyds$$

で与えられる．

演習 4.6 (1) $v = e^{bt}u$ を t で 2 回微分して

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = e^{bt}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2be^{bt}\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 e^{bt} u = e^{bt}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t}\right) + b^2 v$$

となる．ゆえに，u の方程式に e^{bt} を掛けると，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a + b^2)v + e^{bt} f$$

となる．$\frac{\partial v}{\partial t} = be^{bt}u + e^{bt}\frac{\partial u}{\partial t}$ であるので，初期条件は，

$$v(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0) = bu_0(x) + u_1(x)$$

となる．

(2) 4.8.2 項の波動方程式の項の結果より，$\lambda_b = \xi^2 - a - b^2$ とおくと，

$$v(x,t) = \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\hat{u}_0 \cos\sqrt{\lambda_b}t\right)\right)(x) + \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{(b\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\sin\sqrt{\lambda_b}t}{\sqrt{\lambda_b}}\right)\right)(x)$$
$$+ \int_0^t \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{e^{bs}\hat{f}(s)\sin\sqrt{\lambda_b}(t-s)}{\sqrt{\lambda_b}}\right)\right)(x)\,ds$$

となる．

(3) $u = e^{-bt}v$ であるので，

$$u(x,t) = e^{-bt}\mathscr{F}^{-1}\left(\hat{u}_0\cos\sqrt{\lambda_b}t\right)(x)$$
$$+ e^{-bt}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{(b\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\sin\sqrt{\lambda_b}t}{\sqrt{\lambda_b}}\right)\right)(x)$$
$$+ e^{-bt}\int_0^t \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{e^{bs}\hat{f}(s)\sin\sqrt{\lambda_b}(t-s)}{\sqrt{\lambda_b}}\right)\right)(x)\,ds$$

となる．

演習 4.7 方程式と初期条件の両辺を x についてフーリエ変換すると，

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -i\xi^2\hat{u}(\xi,t) + \hat{f}(\xi,t), \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi)$$

となる．ξ を固定して，変数 t の常微分方程式の初期値問題を解いて，

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-i\xi^2(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\,ds$$

となる．両辺をフーリエ逆変換する．

$$S(x,t) = \left(\mathscr{F}^{-1}\left(e^{-i\xi^2 t}\right)\right)(x)$$

とおくと，

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)u_0(y)\,dy + \int_0^t S(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds$$

を得る．なお，$e^{-i\xi^2 t}$ は $\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-i\xi^2 t}|\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{-i\xi^2 t}|^2 d\xi = \infty$ であるので，本書で述べた範囲ではフーリエ逆変換は定義されない．超関数としてフーリエ逆変換を定義する事で，

$$S(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi i t}}e^{-\frac{x^2}{4it}}$$

となる事が知られている．熱核を用いれば，$S(x,t) = E(x,it)$ である．詳細はフーリエ解析の専門書を参照せよ．