ガイダンス 微分方程式（サイエンス社）
問と演習問題の解答

緒方秀教

2022 年 5 月 25 日

第 1 章　演習問題

1.1. 微小時間 $\varDelta t$ における生物個体数の変化 $\varDelta n$ は

$$\varDelta n = an(1-bn)\varDelta t \quad (b \text{ は正の定数}).$$

すると，生物個体数 $n(t)$ が従う微分方程式は次になる．

$$\frac{dn}{dt} = an(1-bn). \tag{1}$$

この微分方程式は**ロジスティック方程式**という名前がついている．

微分方程式 (1) の解は次のようにして求まる．(1) を次のように変形する．

$$\frac{1}{an(1-bn)}\frac{dn}{dt} = \left(\frac{1}{n} + \frac{b}{1-bn}\right)\frac{dn}{dt} = a,$$

両辺の不定積分をとって，

$$\int \left(\frac{1}{n} + \frac{b}{1-bn}\right)\frac{dn}{dt}dt = \int \left(\frac{1}{n} + \frac{b}{1-bn}\right)dn = at + c \quad (c \text{ は定数}),$$

n についての不定積分を実行して，

$$\log|n| - \log|1-bn| = \log\left|\frac{n}{1-bn}\right| = at + c,$$

両辺の指数関数 exp をとって，

$$\frac{n}{1-bn} = Ce^{at} \quad (\, C = \pm e^{c}\,), \quad n(t) = \frac{Ce^{at}}{1+bCe^{at}}.$$

時刻 $t = 0$ における個体数を $n(0) = n_0$ とすると，定数 C は $C = \dfrac{n_0}{1-bn_0}$ と定まり，結局次の解を得る．

$$n(t) = \frac{n_0}{bn_0 + (1-bn_0)e^{-at}}. \tag{2}$$

図 1 に解 (2) のグラフを示す．ただし，$bn_0 = 0.2$ とおいている．縦軸は $n(t)/n_0$，横軸は at である．グラフより，生物個体数 $n(t)$ は最初は増加するが，十分時間が経った後一定値 $1/b$ に落ち着いていることがわかる．

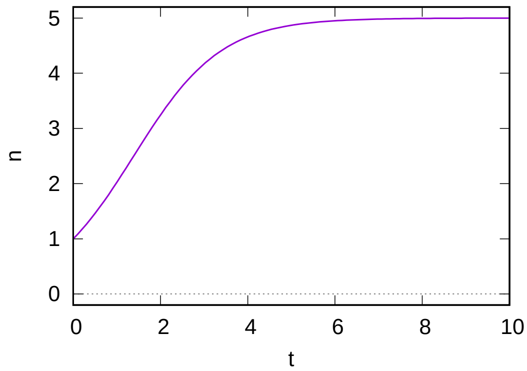

図 1: ロジスティック方程式 (1) の解.

第 2 章　問 2.1 以下，C は任意定数とする．

(1). 一般解は $y = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

初期条件を満たす解は $y = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

(2). 一般解は $y^2 = x^2 + C$.

初期条件を満たす解は $y^2 = x^2 + 1$.

(3). 一般解は $\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = C\exp\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

初期条件を満たす解は $\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

(4). 一般解は $y = -x - 1 + Ce^x$.

初期条件を満たす解は $y = -x - 1e^x$.

演習問題

2.1. (1) $y = xz$ の両辺を微分して $y' = xz' + z$. これをもとの微分方程式に代入して，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

これは変数分離形である．

(2) 題意の微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a + b(y/x)}{c + d(y/x)}\right)$$

と表せるから．

(3) $z = y/x$ が満たす微分方程式は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$$

であり，これは変数分離形である．

$$\int \frac{1+z}{2-(1+z)^2}dz = \int \frac{dx}{x},$$
$$-\frac{1}{2}\log|1-(1+z)^2| = \log|x| + c \quad (c \text{ は任意定数}),$$
$$2-(1+z)^2 = 1-2z-z^2 = Cx^{-2} \quad (\, C = \pm e^{-2c}\,).$$

$z = y/x$ を代入して次を得る．

$$x^2 - 2xy - y^2 = C \quad (C \neq 0 \text{ は任意定数}).$$

2.2. ヒントに従って題意の微分方程式の解を

$$y = C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right)$$

とおいて代入する．

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = \frac{dC}{dx}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right) = b(x),$$
$$\frac{dC(x)}{dx} = b(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right),$$
$$C(x) = C_0 + \int_{x_0}^{x} b(\xi)\exp\left(\int_{x_0}^{\xi} a(\xi_1)d\xi_1\right)d\xi \quad (C_0 \text{ は任意定数}).$$

ゆえに，題意の微分方程式の一般解は次の通り．

$$C(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right) \times \left\{C_0 + \int_{x_0}^{x} b(\xi_1)\exp\left(\int_{x_0}^{\xi_1} a(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1\right\}.$$

2.3. (1) 題意の微分方程式の両辺を y^n で割って，

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + a(x)y^{1-n} = b(x),$$
$$\frac{d}{dx}(y^{1-n}) - (n-1)a(x)y^{1-n} = -(n-1)b(x),$$

$z = y^{1-n}$ とおくと，

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)a(x)z = -(n-1)b(x).$$

これは前問と同じ形の方程式である．一般解は，

$$z(x) = \exp\left[(n-1)\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right]\left\{C_0 - (n-1) \times \int_{x_0}^{x} b(\xi_1)\exp\left(-(n-1)\int_{x_0}^{\xi_1} a(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1\right\}$$

（C_0 は任意定数，x_0 は任意）．

(2) $y = y_0 + z$ を題意の微分方程式に代入すると，

$$\frac{dz}{dx} + [q(x) + 2r(x)y_0(x)]z = -2r(x)z^2$$

を得る．これは，ベルヌーイ型微分方程式で $n = 2$ とおいた場合に相当する．

（後半の方程式）$y = x + z$ とおくと，z は次の方程式を満たす．

$$\begin{aligned} 3x\frac{dz}{dx} - 3z + 2xz + z^2 &= 0, \\ \frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{3x}z^2. \end{aligned}$$

両辺を z^2 で割って，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{z} = \frac{1}{3x}$$

を得るから，$v = 1/z$ は

$$\frac{dv}{dx} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right)v = \frac{1}{3x} \tag{3}$$

を満たす．

(3) を解くために，まず $v' - (2/3 - 1/x)v = 0$（変数分離形）の解を求めると $v = (C/x)e^{2x/3}$（C は任意定数）．定数変化法により，(3) の解を $v = (C(x)/x)e^{2x/3}$ とおくと，

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{3}e^{-2x/3}, \quad C(x) = \frac{1}{2}(C_0 - e^{-2x/3})$$

（C_0 は任意定数），よって，

$$v(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{C_0e^{2x/3} - 1}{2x}, \quad z(x) = \frac{2x}{C_0e^{2x/3} - 1}$$

を得る．ゆえに，題意の微分方程式の一般解は

$$y = x + z = x\frac{C_0e^{2x/3} + 1}{C_0e^{2x/3} - 1} \quad (C_0 \text{ は任意定数}).$$

第 3 章　問 3.1　部分積分により

$$\begin{aligned} \int e^{\lambda x}\cos\mu x dx &= \frac{1}{\lambda}\int (e^{\lambda x})'\cos\mu x dx \\ &= \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\cos\mu x + \frac{\mu}{\lambda}\int e^{\lambda x}\sin\mu x dx, \\ \int e^{\lambda x}\sin\mu x dx &= \frac{1}{\lambda}\int (e^{\lambda x})'\sin\mu x dx \\ &= \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\sin\mu x - \frac{\mu}{\lambda}\int e^{\lambda x}\cos\mu x dx, \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \lambda\int e^{\lambda x}\cos\mu x dx - \mu\int e^{\lambda x}\sin\mu x dx &= e^{\lambda x}\cos\mu x, \\ \mu\int e^{\lambda x}\cos\mu x dx + \lambda\int e^{\lambda x}\sin\mu x dx &= e^{\lambda x}\sin\mu x \end{aligned}$$

を得る．この 2 式を $\int e^{\lambda x}\cos\mu x dx$, $\int e^{\lambda x}\sin\mu x dx$ について解けば所望の結果を得る．

問 3.2

(1). $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ を方程式に代入すると，$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$ となり $\lambda = 1, 3$ を得る．ゆえに一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

(2). $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ を方程式に代入すると，$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$ となり $\lambda = 1$（重解）を得る．ゆえに一般解は $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

(3). $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ を方程式に代入すると $\lambda^2 + 9 = 0$ となり $\lambda = \pm 3i$ を得る．ゆえに一般解は $y = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix}$. オイラーの公式より $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

(4). $y = e^{\lambda x}$ を方程式に代入すると $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ より $\lambda = -3 \pm i$ を得る．ゆえに一般解は $y = C_1 e^{(-3+i)x} + C_2 e^{(-3-i)x}$. オイラーの公式より $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

問 3.3 以下，C_1, C_2 を任意定数とする．

(1). 対応する斉次方程式 $y'' + 3y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x$. 題意の方程式は多項式の特解をもつ．$\deg(y'' + 3y) = \deg y = 3$ より特解は 3 次多項式である．未定係数法により，$y = x^3 + x + 1$. 一般解は $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + x^3 + x + 1$.

(2). 対応する斉次方程式 $y'' + 3y' + 3 = 0$ の一般解は $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. 題意の方程式は多項式を特解にもつ．$\deg(y'' + 3y' + 2y) = \deg y = 2$ より特解は 2 次多項式である．未定係数法により，$y = x^2 + 2$. 一般解は $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x^2 + 2$.

(3). 対応する斉次方程式 $y'' - y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$．特解を $y = e^x z$ とおく．

$$y'' - y = e^x(z'' + 2z') = e^x$$

より $z'' + 2z' = 1$. これは解 $z = x/2$ を持つことが直ちにわかる．よって，特解 $y = (x/2)e^x$ を得る．一般解は，$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (x/2)e^x$.

(4). 対応する斉次方程式 $y'' + 2y' + 2y = 0$ の一般解は $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$．特解は

$$y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$$

の特解の虚部をとることにより求める．$y = e^{(-1+i)x} z$ とおくと

$$y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}(z'' + 2iz') = e^{(-1+i)x}$$

より $z'' + 2iz' = 1$ を得，特解 $z = x/(2i)$，すなわち，$y = (x/(2i))e^{(-1+i)x}$ を得る．虚部をとって $y = -(x/2)e^{-x}\cos x$. 一般解は

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{x}{2} e^{-x} \cos x.$$

演習問題

3.1. 運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega t \quad \left(\alpha = \frac{\mu}{2m} < \omega_0,\ A_0 = \frac{F_0}{m}\right)$$

となる．対応する斉次方程式 $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解は

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t)$$

$$\left(\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2},\ C_1, C_2 \text{ は任意定数}\right)$$

特解は,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 e^{i\omega t}$$

の特解の実部である．$x(t) = y(t)e^{i\omega t}$ とおくと,

$$\ddot{y} + 2(\alpha + i\omega)\dot{y} + (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega)y = A_0$$

を得る．これは特解

$$y = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} = \frac{A_0 e^{-i\theta_0}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

を持つ．よって，もとの x についての微分方程式は特解

$$x = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \theta_0)}$$

を持つ．実部をとって特解

$$x = \frac{A_0 \cos(\omega t - \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

を得る．ゆえに，もとの運動方程式の一般解は次のとおりである．

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t) + \frac{A_0 \cos(\omega t - \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}). \tag{4}$$

このように，空気抵抗がある場合は強制振動と同じ角振動数 ω で一定振幅で振動する解を得る．振幅

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

のグラフを図 2 に示す．ただし，縦軸は A_0/ω_0^2，横軸は ω/ω_0 であり，$\alpha = 0.1\omega_0$ ととっている．$A(\omega)$ はバネ振り子の固有振動数 ω_0 付近で最大となる．

3.2. (1) 特解を定数変化法により求める．

$$y = C_1(x)e^{ikx} + C_2(x)e^{-ikx}, \tag{5}$$

ただし，条件

$$C_1'(x)e^{ikx} + C_2'(x)e^{-ikx} = 0 \tag{6}$$

を課す．(5) を微分方程式に代入して

$$-kC_1'e^{ikx} + kC_2'e^{-ikx} = f(x) \tag{7}$$

を得る．(6), (7) を $C_1'(x), C_2'(x)$ について解いて,

$$C_1'(x) = -\frac{e^{-ikx}}{k} f(x), \quad C_2'(x) = \frac{e^{ikx}}{k} f(x) \cos kx,$$

よって,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2ik}\int^x e^{-ik\xi} f(\xi) d\xi, \quad C_2(x) = \frac{1}{2ik}\int^x e^{ik\xi} f(\xi) d\xi$$

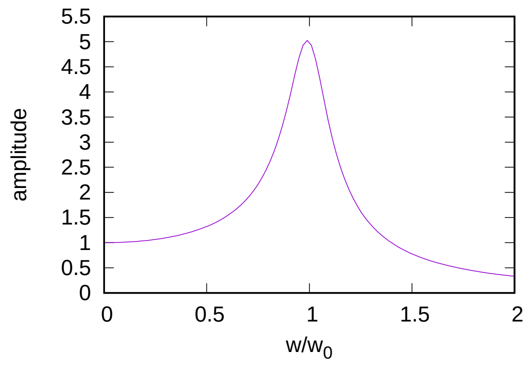

図 2: (4) の特解の振幅 $A(\omega)$.

を得る．ゆえに，特解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2ik}\int_{x_0}^{x}[e^{ik(x-\xi)} - e^{-ik(x-\xi)}]f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}\sin k(x-\xi)f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

を得る．

(2) 前項の解答において $f(x) = \sec x,\ k = 1$ とおくと，次の特解を得る．

$$\begin{aligned} y &= \int^{x}\sin(x-\xi)\sec\xi d\xi \\ &= \int^{x}(\sin x\cos\xi - \cos x\sin\xi)\frac{d\xi}{\cos\xi} \\ &= \sin x\int^{x}d\xi - \cos x\int^{x}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}d\xi \\ &= x\sin x + \cos x\int^{x}\frac{(\cos\xi)'}{\cos\xi}d\xi \\ &= x\sin x + \cos x\log|\cos x|. \end{aligned}$$

ゆえに，題意の微分方程式の一般解は

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\log|\cos x| \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

3.3. (1) 電気回路の方程式から I を消去すると，

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{R}{2L},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right).$$

初期条件 $Q(t=0) = Q_0,\ I(t=0) = \dot{Q}(t=0) = 0$ の下で解を求めると，

- $\omega_0 > \alpha$ の場合，$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ とおくと

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\Omega t + \frac{\alpha}{\Omega}\sin\Omega t\right),$$
$$I(t) = \dot{Q}(t) = -Q_0\frac{\omega_0^2}{\Omega}e^{-\alpha t}\sin\Omega t.$$

- $\omega_0 < \alpha$ の場合，$\alpha_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ とおくと，

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\alpha_+ - \alpha_-}(\alpha_+ e^{-\alpha_- t} - \alpha_- e^{-\alpha_+ t}),$$
$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{\omega_0^2 Q_0}{\alpha_+ - \alpha_-}(e^{-\alpha_+ t} - e^{-\alpha_- t}).$$

- $\omega_0 = \alpha$ の場合，

$$Q(t) = Q_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}, \quad I(t) = \dot{Q}(t) = -\alpha^2 Q_0 t e^{-\alpha t}.$$

(2) 電気回路の方程式から I を消去して，

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = A_0 e^{i\omega t}. \tag{8}$$

(8) の解で初期条件 $Q(t=0)=0$, $\dot{Q}(t=0)=0$ を満たすものを求めて，実部を取ればよい．

$\omega_0 \neq \alpha$ の場合，初期条件を満たす (8) の解を求めると，

$$Q(t) = \frac{Ae^{-i\theta_0}}{\alpha_+ - \alpha_-}[(\alpha_- + i\omega)e^{-\alpha_+ t} - (\alpha_+ + i\omega)e^{-\alpha_- t}] + Ae^{i(\omega t - \theta_0)}$$

ここで，

$$\alpha_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}},$$
$$\theta_0 = \arctan\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

とおいた．これらの解の実部をとって，

- $\omega_0 > \alpha$ の場合，$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned}Q(t) = &-\frac{A}{\Omega}e^{-\alpha t}\left[(\alpha\cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)\sin\Omega t + \Omega\cos\theta_0\cos\Omega t\right] \\ &+ A\cos(\omega t - \theta_0), \\ I(t) = &\,\dot{Q}(t) \\ = &\,\frac{A}{\Omega}e^{-\alpha t}\left[(\omega_0^2\cos\theta_0 + \alpha\omega\sin\theta_0)\sin\Omega t - \omega\Omega\sin\theta_0\cos\Omega t\right] \\ &- \omega A\sin(\omega t - \theta_0).\end{aligned}$$

- $\omega_0 < \alpha$ の場合，

$$Q(t) = \frac{A}{\alpha_+ - \alpha_-}\left[(\alpha_-\cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)e^{-\alpha_+ t}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (\alpha_+ \cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)e^{-\alpha_- t}\big] + A\cos(\omega t - \theta_0), \\
I(t) &= \dot{Q}(t) \\
&= \frac{A}{\alpha_+ - \alpha_-}\big[-\alpha_+(\alpha_- \cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)e^{-\alpha_+ t} \\
&\quad + \alpha_-(\alpha_+ \cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)e^{-\alpha_- t}\big] - \omega A\sin(\omega t - \theta_0).
\end{aligned}
$$

$\omega_0 = \alpha$ の場合，初期条件を満たす (8) の解は

$$
Q(t) = -Ae^{-i\theta_0}[1 + (\alpha + i\omega)t]e^{-\alpha t} + Ae^{i(\omega t - \theta_0)},
$$

実部をとって，

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= -Ae^{-\alpha t}[\cos\theta_0 + (\alpha\cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)t] \\
&\quad + A\cos(\omega t - \theta_0), \\
I(t) &= \dot{Q}(t) \\
&= Ae^{-\alpha t}[-\omega\sin\theta_0 + \alpha(\alpha\cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0)t] \\
&\quad - \omega A\sin(\omega t - \theta_0).
\end{aligned}
$$

3.4. (1) $y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると

$$
\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0, \quad \lambda = 1, -2, 4
$$

を得る．ゆえに，一般解は

$$
y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{4x} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数}).
$$

(2) $y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると

$$
\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2 = 0, \quad \lambda = \pm 2 \quad \text{（いずれも二重解）}
$$

を得る．ゆえに，一般解は

$$
y = (C_0^{(1)} + C_1^{(1)}x)e^{2x} + (C_0^{(2)} + C_1^{(2)}x)e^{-2x} \quad (C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, C_0^{(2)}, C_1^{(2)} \text{ は任意定数}).
$$

第 4 章　問 4.1

(1).

$$
\begin{aligned}
(D - \alpha)y &= (D - \alpha)^{-2}0 = (D - \alpha)^{-2}(e^{\alpha x} \cdot 0) \\
&= e^{\alpha x}D^{-2}0 = e^{\alpha x}(C_0 + C_1x) \quad \text{（C_1, C_2 は任意定数）}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= (D - \alpha)^{-1}0 + (D - \alpha)^{-1}(C_0 + C_1x)e^{\alpha x} \\
&= C_2e^{\alpha x} + e^{\alpha x}D^{-1}(C_0 + C_1x) \quad \text{（C_2 は任意定数）} \\
&= C_2e^{\alpha x} + e^{\alpha x}\int (C_0 + C_1x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_2 e^{\alpha x} + e^{\alpha x}\left(C_3 + C_0 x + \frac{C_1}{2}x^2\right) \quad (C_3\text{ は任意定数}) \\
&= e^{\alpha x}\left(C_2 + C_3 + C_0 x + \frac{C_1}{2}x^2\right).
\end{aligned}
$$

$C_2 + C_3$, C_0, $C_1/2$ を改めてそれぞれ C_0, C_1, C_2 と書き直して，

$$
y = e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2) \quad (C_0, C_1, C_2\text{ は任意定数}).
$$

(2).

$$
\begin{aligned}
(D-\beta)^{-2}y = (D-\alpha)^{-2}0 &= (D-\alpha)^{-2}(e^{\alpha x}\cdot 0) \\
&= e^{\alpha x}D^{-2}0 = e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x)
\end{aligned}
$$

（C_0, C_1 は任意定数）.

$$
\begin{aligned}
y &= (D-\beta)^{-2}0 + (D-\beta)^{-2}\{e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x)\} \\
&= e^{\beta x}(C_2 + C_3 x) + e^{\alpha x}(D + \alpha - \beta)^{-2}(C_0 + C_1 x) \\
&= e^{\beta x}(C_2 + C_3 x) \\
&\quad + e^{\alpha x}\{C_4 e^{(\beta-\alpha)x} + (\text{一次多項式})\} \quad (C_2, C_3, C_4\text{ は任意定数}).
\end{aligned}
$$

任意定数を書き直して次の解を得る.

$$
y = e^{\alpha x}(C_0 + C_1 x) + e^{\beta x}(C_2 + C_3 x) \quad (C_0, C_1, C_2, C_3\text{ は任意定数}).
$$

問 4.2

(1).

$$
\mathscr{L}[x^n e^{ax}](s) = \mathscr{L}[x^n](s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.
$$

(2).

$$
\mathscr{L}[e^{ax}e^{i\omega x}](s) = \mathscr{L}[e^{(a+i\omega)x}](s) = \frac{1}{s-(a+i\omega)}.
$$

実部をとって，

$$
\mathscr{L}[e^{ax}\cos\omega x](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.
$$

(3). $\mathscr{L}[e^{ax}e^{i\omega x}](s) = \dfrac{1}{s-(a+i\omega)}$ の虚部をとって $\mathscr{L}[e^{ax}\sin\omega x](s) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$.

演習問題

4.1. $P(D)\{P(\lambda)^{-1}e^{\lambda x}\} = e^{\lambda x}$ を示せばよい． $P(D)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}$ であるから，

$$
P(D)\{P(\lambda)^{-1}e^{\lambda x}\} = P(\lambda)^{-1}P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}
$$

により示せた.

4.2. $P(x)=a\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$（$a\neq 0$ は定数）と因数分解されるから，

$$\frac{1}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{x-a_k}$$

の両辺に $P(x)=a\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$ を掛けて，

$$1=a\sum_{k=1}^{n}c_k\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n}(x-a_l)$$

を得る．よって，演算子の等式

$$a\sum_{k=1}^{n}c_k\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n}(D-a_l)=1$$

が成立する．各 $k=1,\ldots,n$ に対し

$$P(D)(D-a_k)^{-1}f(x)=ac_k\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n}(D-a_l)f(x)$$

であるから，

$$P(D)\sum_{k=1}^{n}c_k(D-a_k)^{-1}f(x)=a\sum_{k=1}^{n}c_k\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n}(D-a_l)f(x)=f(x)$$

を得る．

4.3. (1) 題意の方程式を微分演算子を用いて表すと，

$$(D-1)(D-2)y=x^2+x+1$$

となる．斉次方程式 $(D-1)(D-2)y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ （C_1,C_2 は任意定数）．特解を演算子法により求める．

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

より

$$\begin{aligned}
y&=(D-2)^{-1}(x^2+x+1)-(D-1)^{-1}(x^2+x+1),\\
(D-2)^{-1}(x^2+x+1)&=-\frac{1}{2}(1-\frac{D}{2})^{-1}(x^2+x+1)\\
&=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)(x^2+x+1)\\
&=-\frac{1}{2}\left[(x^2+x+1)+\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{4}\cdot 2+0+\cdots\right]\\
&=-\frac{1}{2}(x^2+2x+2),\\
(D-1)^{-1}(x^2+x+1)&=-(1-D)^{-1}(x^2+x+1)\\
&=-(1+D+D^2+\cdots)(x^2+x+1)\\
&=-\left[(x^2+x+1)+(2x+1)+2+0+\cdots\right]\\
&=-(x^2+3x+4),
\end{aligned}$$

$$y=-\frac{1}{2}(x^2+2x+2)+(x^2+3x+4)=\frac{1}{2}x^2+2x+3.$$

ゆえに，一般解は

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+3+C_1e^x+C_2e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(2) 題意の方程式を微分演算子を用いて表すと，

$$(D-1)(D-2)(D-3)y=x^2$$

となる．斉次方程式 $(D-1)(D-2)(D-3)y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$ （C_1, C_2 は任意定数）．特解を演算子法により求める．

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1/2}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1/2}{x-3}$$

より

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(D-1)^{-1}x^2-(D-2)^{-1}x^2+\frac{1}{2}(D-3)^{-1}x^2,\\
(D-1)^{-1}x^2 &= -(1-D)^{-1}x^2\\
&= -(1+D+D^2+\cdots)x^2\\
&= -(x^2+2x+2+0+\cdots)\\
&= -(x^2+2x+2),\\
(D-2)^{-1}x^2 &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1}x^2\\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)x^2\\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{4}\cdot 2+0+\cdots\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right),\\
(D-3)^{-1}x^2 &= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{D}{3}\right)^{-1}x^2\\
&= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{D}{3}+\frac{D^2}{9}+\cdots\right)x^2\\
&= -\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{1}{3}\cdot 2x+\frac{1}{9}\cdot 2+0+\cdots\right)\\
&= -\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{2}(x^2+2x+2)+\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)\\
&= -\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{18}x-\frac{77}{108}.
\end{aligned}$$

ゆえに，一般解は

$$y=-\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{18}x-\frac{77}{108}+C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数}).$$

4.4. (1) 題意の方程式のラプラス変換をとる．$Y(s) = \mathscr{L}[y](s)$ とおくと，

$$-y(0) + sY(s) + 4Y(s) + \frac{4}{s}Y(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dx = \frac{1}{s},$$
$$Y(s) = \frac{1+y(0)s}{(s+2)^2} = \frac{y(0)}{s+2} + \frac{1-2y(0)}{(s+2)^2}.$$

公式

$$\mathscr{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathscr{L}[e^{-ax}f(x)](s) = \mathscr{L}[f](s+a)$$

より，

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2x}, \quad \mathscr{L}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

であるから，

$$y(x) = \frac{1}{2}[1-2y(0)]x^2e^{-2x} + f(0)e^{-2x}.$$

(2) 左辺は畳み込み積である．

$$(e^{-ax} * y)(x) = \cos\omega x.$$

両辺のラプラス変換をとると，公式

$$\mathscr{L}[f*g](s) = \mathscr{L}[f](s)\cdot\mathscr{L}[g](s),$$

より

$$\frac{Y(s)}{s+a} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad Y(s) = \frac{\omega s}{s^2+\omega^2} + \frac{a\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$y(x) = \omega\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right](x) + a\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right](x) = \omega\cos\omega x + a\sin\omega x.$$

第 5 章　問 5.1

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0} \tag{9}$$

とおくと，両辺に A を左から掛けて，

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}. \tag{10}$$

$(10) - \lambda_1 \times (9)$ を作って，

$$(\lambda_2-\lambda_1)c_2\boldsymbol{p}_2 + (\lambda_3-\lambda_1)c_3\boldsymbol{p}_3 + \cdots + (\lambda_n-\lambda_1)c_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}. \tag{11}$$

この両辺に A を左から掛けて，

$$(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2c_2\boldsymbol{p}_2 + (\lambda_3-\lambda_1)\lambda_3c_3\boldsymbol{p}_3 + \cdots + (\lambda_n-\lambda_1)\lambda_nc_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}. \tag{12}$$

$(12) - \lambda_2 \times (11)$ を作って，

$$(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)c_3\boldsymbol{p}_3 + \cdots + (\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)c_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}.$$

以下，同様にして $\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-1}$ の項を順次消去して，

$$(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})c_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}$$

を得る．

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\cdots(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \neq 0, \quad \boldsymbol{p}_n \neq \mathbf{0}$$

より $c_n = 0$ となる．そして，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{p}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

この方程式に対し上と同様の操作を行って，$c_{n-1} = 0$，そして，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{n-2}\boldsymbol{p}_{n-2} = \mathbf{0}$$

を得る．こうやって結局 $c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_1 = 0$ を得，$\{\,\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\,\}$ が一次独立であることが示された．

問 5.2

(1).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

とおくと，題意の連立常微分方程式は次で表される．

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}.$$

行列 A の固有値 λ は，

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -5 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda + 2)(\lambda - 7) = 0$$

より $\lambda = -2, 7$ である．固有値 -2 に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1 = [1\ -1]^t$，固有値 7 に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_2 = [4\ 5]^t$ である．

$$P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

ベクトル $\boldsymbol{z} = [z_1\ z_2]^t$ を $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ により導入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}, \quad \begin{cases} z_1' = -2z_1 \\ z_2' = 7z_2, \end{cases}$$

$$z_1 = C_1e^{-2x}, \quad z_2 = C_2e^{7x} \quad (C_1, C_2\ \text{は任意定数}).$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ に代入して，

$$y_1 = C_1e^{-2x} + 4C_2e^{7x}, \quad y_2 = -C_1e^{-2x} + 5e^{7x}.$$

(2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

とおくと，題意の連立常微分方程式は次で表される．

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}.$$

行列 A の固有値 λ は,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

より $\lambda = 1 \pm i$．固有値 $1+i$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1 = [1\ -i]^t$，固有値 $1-i$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_2 = [1\ i]^t$ である．$P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

ベクトル $\boldsymbol{z} = [z_1\ z_2]^t$ を $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ により導入すると,

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}, \quad \begin{cases} z_1' = (1+i)z_1 \\ z_2' = (1-i)z_2, \end{cases}$$

z_1, z_2 についての一般解は

$$z_1 = C_1 e^{(1+i)x}, \quad z_2 = C_2 e^{(1-i)x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ に代入して,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^x(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}) \\ -ie^x(C_1 e^{ix} - C_2 e^{-ix}) \end{bmatrix} \\ &= e^x \begin{bmatrix} (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x \\ -i(C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$C_1 + C_2$, $-i(C_1 - C_2)$ を改めて C_1, C_2 と記して,

$$\begin{cases} y_1 = e^x(C_1 \cos x - C_2 \sin x) \\ y_2 = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \end{cases} \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(3). 題意の連立常微分方程式を行列・ベクトルで表すと,

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

となる．行列 A の固有値を求める．

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$$

より，固有値は $\lambda = 1$ (二重解), 4 である．固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = [1\ 0\ -1]^t$, $\boldsymbol{p}_2 = [0\ 1\ -1]$, 固有値 $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = [1\ 1\ 1]^t$ がとれる．よって，

$$P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，行列 A は

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

と対角化される．ベクトル $\boldsymbol{z} = [z_1\ z_2\ z_3]^t$ を $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ ($\boldsymbol{z} = P^{-1}\boldsymbol{y}$) により導入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \Lambda\boldsymbol{z}, \quad \begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = z_2 \\ z_3' = 4z_3. \end{cases}$$

よって，z_1, z_2, z_3 についての一般解は

$$z_1(x) = C_1e^x, \quad z_2(x) = C_2e^x, \quad z_3(x) = C_3e^{4x}$$

（C_1, C_2, C_3 は任意定数）と求まる．$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ に代入して，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^x + C_3e^{4x} \\ C_2e^x + C_3e^{4x} \\ -C_1e^x - C_2e^x + C_3e^{4x} \end{bmatrix}.$$

(4). 題意の連立常微分方程式を行列・ベクトルで表すと，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

となる．行列 A の固有値を求める．

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

より，固有値 $\lambda = 2$（二重解）を得る．これに対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1 = [1\ 2]^t$ （のスカラー倍）のひとつしか求まらないから，行列 A はジョルダン標準形化される．

$$(A - 2I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{p}_2$ として $\boldsymbol{p}_2 = [0\ 1]^t$ を得る．よって，行列 A は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

とジョルダン標準形化される．ベクトル $\boldsymbol{z} = [z_1\ z_2]^t$ を $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ （$\boldsymbol{z} = P^{-1}\boldsymbol{y}$）により導入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} z_1' = 2z_1 + z_2 \\ z_2' = 2z_2. \end{cases}$$

第 2 式より $z_2 = C_2 e^{2x}$（C_2 は任意定数）．第 1 式に代入して

$$z_1' - 2z_1 = C_2 e^{2x}.$$

これを $z_1(x) = c(x)e^{2x}$ とおいて解いて

$$z_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \quad (C_1 \text{ は任意定数}).$$

これを $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ に代入してもとの y_1, y_2 についての解を求めると，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (C_1 + C_2 x)e^{2x} \\ (2C_1 + C_2)e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}). \end{aligned}$$

問 5.3

$$A = \lambda I + N, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく．

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O,$$

$$N^3 = N^4 = \cdots = O$$

により，

$$\begin{aligned} A^2 &= (\lambda I + N)^2 = \lambda^2 I + 2\lambda N + N^2, \\ A^3 &= (\lambda I + N)^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N + 3\lambda N^2 + N^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 N + 3\lambda N^2, \\ A^4 &= (\lambda I + N)^4 = \lambda^4 I + 4\lambda^3 N + 6\lambda^2 N^2, \end{aligned}$$

一般に $n = 2, 3, \ldots$ に対し，

$$A^n = (\lambda I + N)^n = \lambda^n I + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}N + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}N^2 = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2$$

が成り立つ．よって，

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(\lambda I + N)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= I + x(\lambda I + N) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(\lambda I + N)^n \\
&= I + x(\lambda I + N) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left\{\lambda^n I + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2\right\} \\
&= I + x(\lambda I + N) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^n I + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\lambda^{n-1}N \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}\lambda^{n-2}N^2 \\
&= I + x(\lambda I + N) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^n I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\lambda^n N \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}\lambda^n N^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^n I + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^n N + \frac{1}{2}x^2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^n N^2 \\
&= e^{\lambda x} I + xe^{\lambda x} N + \frac{x^2}{2}e^{\lambda x}N^2 \\
&= e^{\lambda x}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + xe^{\lambda x}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2}e^{\lambda x}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

ゆえに次を得る．

$$
e^{xA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & (x^2/2)e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix}.
$$

演習問題

5.1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とおく．

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
\end{aligned}
$$

一方，λ_0 は $\det(\lambda I - A) = 0$ の二重解であるから，解と係数の関係により

$$
a_{11} + a_{22} = 2\lambda_0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_0^2
$$

が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda_0 I)^2 \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_0^2 - 2a_{11}\lambda_0 + a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22} - 2\lambda_0) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22} - 2\lambda_0) & \lambda_0^2 - 2a_{22}\lambda_0 + a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であり，上の解と係数の関係から得られた等式を用いると，上の行列のすべての成分が 0 であることが示される．

5.2. $\boldsymbol{y} = e^{xA}\boldsymbol{C}(x)$ とおいて題意の微分方程式に代入すると，

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = e^{xA}\frac{d\boldsymbol{C}}{dx} + Ae^{xA}\boldsymbol{C}$$

により，

$$e^{xA}\frac{d\boldsymbol{C}}{dx} = \boldsymbol{f}(x)$$

を得る．両辺に左から行列 $e^{-xA} = (e^{xA})^{-1}$ を掛けて，

$$\frac{d\boldsymbol{C}}{dx} = e^{-xA}\boldsymbol{f}(x),$$
$$\boldsymbol{C}(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\xi A}\boldsymbol{f}(\xi)d\xi + \boldsymbol{C}_0$$

（$\boldsymbol{C}_0$ は任意定数ベクトル，x_0 は任意）

を得る．これを $\boldsymbol{y} = e^{xA}\boldsymbol{C}(x)$ に代入して所望の結果を得る（下記より $e^{xA}e^{\xi A} = e^{(x+\xi)A}$ が成り立つことに注意）．

なお，e^{-Ax} が e^{Ax} の逆行列であることは，

$$e^{xA}e^{yA} = e^{(x+y)A} \quad （x, y \text{ はスカラー}） \tag{13}$$

からわかる．式 (13) の証明は次の通り．

$$\begin{aligned} e^{xA}e^{yA} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}A^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}A^m\right) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x^n y^m}{n!m!}A^{n+m} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{k=0}^{l-k}\frac{l!}{k!(l-k)!}x^{l-k}y^k\right)A^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(x+y)^l}{l!}A^l = e^{(x+y)A}, \end{aligned}$$

4 番目の等号で二項定理

$$(x+y)^l = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}x^{l-k}y^k, \quad \binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$$

を用いた．

5.3. 運動方程式は次のように書き直される．

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x + qE \\ m\frac{dv_z}{dt} = 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

第 3 式と $v_z(t=0)$ より $v_z(t)=\dot{z}(t)=0$．$z(t=0)=0$ より $z(t)=0$．よって，荷電粒子は (x,y)-平面上を運動する．

第 1 式と第 2 式より

$$\frac{dv_x}{dt}=\omega v_y,\quad \frac{dv_y}{dt}=-\omega\left(v_x-\frac{E}{B}\right)\quad \left(\omega=\frac{qB}{E}\right).$$

$\widetilde{v_x}=v_x-E/B$ とおくと，

$$\frac{d\widetilde{v_x}}{dt}=\omega v_y,\quad \frac{dv_y}{dt}=-\omega\widetilde{v_x}.$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\omega J\boldsymbol{u},\quad J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\widetilde{v_x}\\ v_y\end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)&=e^{\omega tJ}\boldsymbol{u}(t=0)\\ &=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-E/B\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(E/B)\cos\omega t\\ (E/B)\sin\omega t\end{bmatrix},\\ v_x(t)=\dot{x}(t)&=\frac{E}{B}(1-\cos\omega t),\quad v_y(t)=\dot{y}(t)=\frac{E}{B}\sin\omega t.\end{aligned}$$

これを積分すると，$x(t=0)=y(t=0)=0$ より

$$x(t)=\frac{E}{\omega B}(\omega t-\sin\omega t),\quad y(t)=\frac{E}{\omega B}(1-\cos\omega t)$$

を得る．

図 3 に荷電粒子の軌道を示す．横軸は $(\omega B/E)x(t)$，縦軸は $(\omega B/E)y(t)$ である．この軌道の曲線は**サイクロイド**とよばれる．

5.4. 運動方程式は

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-\omega_0^2(1+\epsilon)x_1+\omega_0^2\epsilon x_2\\ \ddot{x}_2=\omega_0^2\epsilon x_1-\omega_0^2(1+\epsilon)x_2\end{cases}\qquad \left(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \epsilon=\frac{k'}{k}\right)$$

と書き直される．行列・ベクトルを用いて表すと，

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=-\omega_0^2A\boldsymbol{x},\quad A=\begin{bmatrix}1+\epsilon & -\epsilon\\ -\epsilon & 1+\epsilon\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

となる．A の固有値を求める．

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-A)&=\begin{vmatrix}\lambda-(1+\epsilon) & \epsilon\\ \epsilon & \lambda-(1+\epsilon)\end{vmatrix}\\ &=[\lambda-(1+\epsilon)]^2-\epsilon^2\\ &=(\lambda-1)[\lambda-(1+2\epsilon)]=0\end{aligned}$$

より，A の固有値は $\lambda=1,1+2\epsilon$ である．固有値 1 に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_1=[1\ 1]^t$，固有値 $1+2\epsilon$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}_2=[1\ -1]^t$ である．よって，

$$P=[\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{p}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

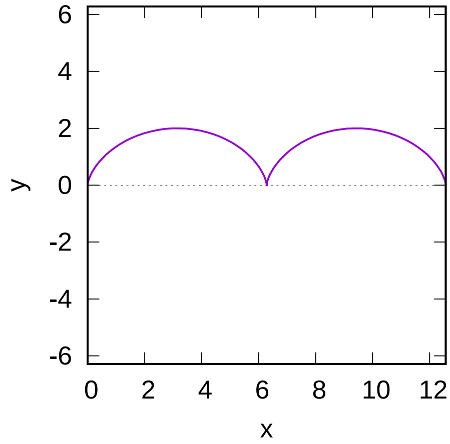

図 3: 電磁場中の荷電粒子の軌道.

とおくと，行列 A は

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2\epsilon \end{bmatrix}$$

と対角化される．ベクトル $\boldsymbol{y} = [y_1\ y_2]^t$ を $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$) により導入すると，$\boldsymbol{z}$ は次の方程式を満たす.

$$\frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2} = -\omega_0^2 P^{-1}AP\boldsymbol{y} = -\omega_0^2 \Lambda \boldsymbol{z},$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega_0^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 = -{\omega_0'}^2 y_2 \end{cases} \qquad (\,\omega_0' = \omega_0\sqrt{1+2\epsilon}\,).$$

$\boldsymbol{y}$ に対する初期条件は，$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ より

$$y_1(0) = y_2(0) = \frac{a}{2}, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$$

であるから，

$$y_1(t) = \frac{a}{2}\cos\omega_0 t, \quad y_2(t) = \frac{a}{2}\cos\omega_0' t.$$

$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ により，

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_0 t + \cos\omega_0' t), \quad x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega_0' t).$$

二質点を結ぶバネの強さが弱いとき，$0 < \epsilon \ll 1$ であるから

$$\sqrt{1+2\epsilon} \simeq 1+\epsilon, \quad \omega_0' \simeq \omega_0(1+\epsilon)$$

となり[1]，

$$x_1(t) \simeq a\cos\left(\frac{\epsilon}{2}\omega_0 t\right)\cos\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)\omega_0 t,$$

[1] $(1+x)^a$ のテイラー級数展開 $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots$ より，$|x|$ が小さいとき $(1+x)^a \simeq 1 + ax$.

$$x_2(t) \simeq a \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\omega_0 t\right) \sin\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)\omega_0 t$$

となる[2]．したがって，$x_1(t), x_2(t)$ は，角振動数 $(\epsilon/2)\omega_0$ で大きくうねりながら角振動数 $(1+\epsilon/2)\omega_0$ で細かく振動する．図 4 に $\epsilon = 0.1$ の場合の $x_1(t), x_2(t)$ のグラフを示す．ただし，縦軸は $x_1(t)/a$, $x_2(t)/a$，横軸は $\omega_0 t$ である．グラフより，$x_1(t)$ が大きく振動しているときは $x_2(t)$ は小さく振動する，逆に，$x_1(t)$ が小さく振動しているときは $x_2(t)$ は大きく振動するというふうに，二つの質点は互いに振動を「キャッチボール」し合いながら振動している様子が読み取れる．

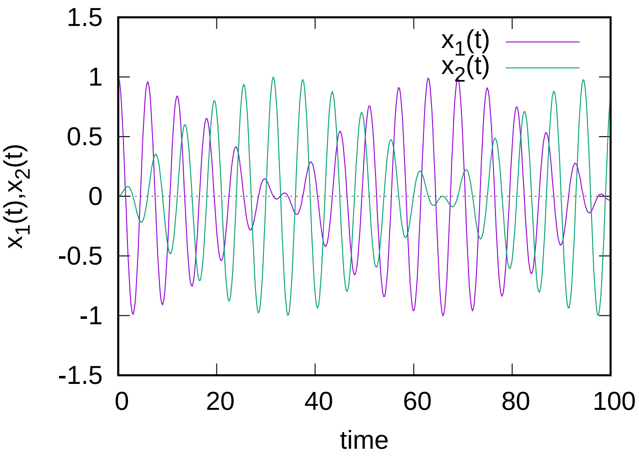

図 4: 弱いバネで繋がれたバネ振り子の運動.

第 6 章　問 6.1 $x = 0$ は正則点であるから整級数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ をもつ．これを微分方程式に代入して，

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + 2\nu\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(\nu - n)c_n]x^n. \end{aligned}$$

各ベキの係数=0 より，

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(\nu - n)c_n = 0 \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[2]公式

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を用いる．

これより，$n=2m$（偶数，$m=0,1,2,\ldots$）の場合，

$$c_{2m}=\frac{2^m\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2(m-1))}{(2m)!}c_0,$$

$n=2m+1$（奇数，$m=0,1,2,\ldots$）の場合，

$$c_{2m+1}=\frac{2^m(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-(2m-1))}{(2m+1)!}c_1$$

を得るので，解

$$y=\underbrace{c_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2(m-1))}{(2m)!}x^{2m}}_{\text{(A)}}+\underbrace{c_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-(2m-1))}{(2m+1)!}x^{2m+1}}_{\text{(B)}}$$

を得る．

なお，$\nu=n$ が偶数の場合ベキ級数 (A) は $m=n/2+1$ から先の項が消えて多項式となる．$\nu=n$ が奇数の場合ベキ級数 (B) は $m=(n+1)/2$ から先の項が消えて多項式となる．$\nu=n$ が偶数の場合，(A) において $c_0=(-1)^{n/2}n!/(n/2)!$ とおいて得られる多項式

$$H_n(x):=(-1)^{n/2}n!\sum_{m=0}^{n/2}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!(n/2-m)!},$$

$\nu=n$ が奇数の場合，(B) において $c_1=(-1)^{(n-1)/2}2n!/((n-1)/2)!$ とおいて得られる多項式

$$H_n(x):=(-1)^{(n-1)/2}n!\sum_{m=0}^{(n-1)/2}\frac{(2x)^{2m+1}}{(2m)!((n-1)/2-m)!}$$

を**エルミート多項式**とよぶ．

問 6.2

(1). 部分積分により

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)&=\int_0^\infty t^se^{-t}dt=-\int_0^\infty t^s(e^{-t})'dt\\&=-\Big[t^se^{-t}\Big]_{t=0}^{\infty}+\int_0^\infty(t^s)'e^{-t}dt=s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt=s\Gamma(s).\end{aligned}$$

(2).

$$J_{-n}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

であるが，任意の正の整数 n に対し

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{\Gamma(s+n)}$$

となるので，$s = 0, -1, -2, \ldots$ に対して $1/\Gamma(s) = 0$ となり，$m-n+1 = -n+1, -n+2, \ldots, 0$，すなわち，$m = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し $(x/2)^{2m-n}$ の係数は 0 となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)-n} \\ &= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

を得る．

問 6.3 まず，$\log(1-x)$ のテイラー級数展開は

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

である．次に，

$$\begin{aligned} F(1,1;2;x) &= 1 + \frac{1^2}{1 \cdot 2}x + \frac{(1 \cdot 2)^2}{(1 \cdot 2)(2 \cdot 3)}x^2 + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 4)}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \end{aligned}$$

である．ゆえに題意の表示が成り立つ．

問 6.4

(1). $x = \pm 1$ に確定特異点をもつことはすぐわかる．$x = \infty$ を調べる．$x = 1/t$ とおくとルジャンドルの微分方程式は

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt} + \nu(\nu+1)y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2t}{t^2-1}\frac{dy}{dt} + \frac{\nu(\nu+1)}{t^2(t^2-1}y = 0$$

となるから，$t = 0$ ($x = \infty$) に確定特異点をもつ．

(2). $\xi = (1-x)/2$ ($x = 1-2\xi$) とおくと，ルジャンドルの微分方程式は

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (1-2\xi)\frac{dy}{d\xi} + \nu(\nu+1)y = 0$$

と変換される．これは超幾何微分方程式で $\alpha = \nu+1, \beta = -\nu, \gamma = 1$ とおいた場合に相当するから，解

$$y = F(\nu+1, -\nu; 1; \xi) = F\left(\nu+1, -\nu; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

をもつ．

(3). 超幾何関数の定義から，

$$P_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)\cdots(\nu+m)(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+m-1)}{(m!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^m .$$

$\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$ の場合，右辺の級数は $m = n+1$ の項から先が消えて多項式となる．$P_n(x)$ を書き下すと，

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+1)\cdots(n+m)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m!)^2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+m)!}{(m!)^2(n-m)!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^m \end{aligned}$$

となる．

演習問題

6.1. （$x=1$ まわりの級数解）$\xi = 1-x$ とおくと，

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + [\alpha+\beta-\gamma+1-(\alpha+\beta+1)\xi]\frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0.$$

これは超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma-(\alpha+\beta-1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

で $\gamma \to \alpha+\beta-\gamma+1$ としたものに相当する．したがって，超幾何微分方程式の $x=0$ まわりでの級数解の知識が使えて，$x=1$ まわりでの級数解として

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta; \gamma-\alpha-\beta; 1-x), \\ y_2 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-x) \end{aligned}$$

を得る．

（$x=\infty$ まわりの級数解）$t = 1/x$ の微分方程式に書き直して，$t=0$ まわりの級数解を求めればよい．

超幾何微分方程式を $t = 1/x$ について書き直すと，

$$t^2(t-1)\frac{dy}{dt} + t[\alpha+\beta-1+(2-\gamma)t]\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0$$

となる．一方，$\lambda = \beta$ とすると，もう一つの独立解

$$y = c_0 x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1; \beta-\alpha+1; \frac{1}{x}\right)$$

を得る（超幾何微分方程式は α, β について対称なので，もうひとつの解は α と β を入れ替えれば得られる）．

6.2. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$ とおいて微分方程式に代入すると，6.2 節はじめの問題で $\nu = 0$ とおいた計算を行うことになるから，

$$\lambda^2 c_0 x^{\lambda-2} + (\lambda+1)^2 c_1 x^{\lambda-1} + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+\lambda)^2 c_n + c_{n-2}]x^{n+\lambda-2} = 0$$

を得,

$$\lambda = 0\ (\text{重解}),\quad c_1 = 0,\quad (n+\lambda)^2 c_n + c_{n-2} = 0\quad (\ n = 2, 3, \dots\ )$$

を得る．第 1〜 第 3 の式から，6.2 節はじめの問題のようにして 1 つ目の解 $y_1 = J_0(x)$ を得る．2 つ目の解を求める．第 1 の式を無視して第 2，第 3 の式からは，$n = 2m+1$（奇数，$m = 0, 1, 2, \dots$）に対して $c_{2m+1} = 0$. $n = 2m$（偶数，$m = 0, 1, 2, \dots$）に対して

$$\begin{aligned} c_{2m}(\lambda) &= \frac{(-1)^m c_0}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\cdots(\lambda+2m)^2} \\ &= \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(\lambda/2+1)^2(\lambda/2+2)^2\cdots(\lambda/2+m)^2} \end{aligned}$$

を得る．とくに $c_0 = \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda/2+1)^2}$ とおくと[3],

$$\begin{aligned} c_{2m}(\lambda) &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+\lambda}\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}, \\ y(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\lambda) x^{2m+\lambda} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}. \end{aligned}$$

フロベニウスの方法によれば，$y = \left.\dfrac{\partial y(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}$ が第 2 の解である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\lambda)}{\partial \lambda} &= \log\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{1}{\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda} \\ &= \log\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda} - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\psi(\lambda/2+m+1)}{\Gamma(\lambda/2+m+1)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}, \end{aligned}$$

ここで,

$$\psi(s) := \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

は**ディガンマ関数**である．ゆえに，第 2 の解として

$$y_2 = \left.\frac{\partial y(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \log\left(\frac{x}{2}\right)J_0(x) - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\psi(m+1)}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

を得る（正の整数 n に対し $\Gamma(n) = (n-1)!$ となることに注意）．これに $2/\pi$ を掛けたもの

$$Y_0(x) := \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{x}{2}\right)J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\psi(m+1)}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{14}$$

は **0 次の第二種ベッセル関数**または，**0 次のノイマン関数**とよばれる[4].

なお，(14) はさらに次のように書き直される．

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\log\left(\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \gamma\right] - \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \tag{15}$$

[3] $y''(\lambda) + x^{-1}y'(\lambda) + y(\lambda) = \lambda^2 c_0 x^{\lambda-2}$ であるから，c_0 を λ の関数としても $\partial y/\partial\lambda|_{\lambda=0}$ が題意の微分方程式の解であることには影響しない．

[4] $Y_0(x)$ は $N_0(x)$ と記されることもある．

ここで，γ はオイラー定数

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5722\,15664\,90153\ldots$$

である．(14) から (15) への書き直しは，ディガンマ関数に関する公式

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \quad (\,n=2,3,\ldots\,) \tag{16}$$

を用いればできる．公式 (16) はガンマ関数の無限積表示[5]

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right]$$

から得られる．

6.3. $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$ とおいて微分方程式に代入すると，6.2 節はじめの問題で $\nu = n$ とおいた計算を行うことになるから，

$$(\lambda-n)(\lambda+n)c_0x^{\lambda-2} + (\lambda+1-n)(\lambda+1+n)c_1x^{\lambda-1} \\ + \sum_{n=2}^{\infty}[(\lambda+m-n)(\lambda+m+n)c_m + c_{m-2}]x^{\lambda+m-2} = 0$$

を得，

$$\lambda = \pm n, \quad c_1 = 0, \quad (\lambda+m-n)(\lambda+m+n)c_n + c_{n-2} = 0 \quad (\,n=2,3,\ldots\,)$$

を得る．$\lambda = n$ に対しては，第 1～第 3 の式から，6.2 節はじめの問題のようにして $y_1 = J_n(x)$ を得る．$\lambda = -n$ に対する解 y_2 をフロベニウスの方法により求める．第 1 の式を無視して第 2，第 3 の式からは，$m = 2\mu+1$（奇数，$\mu = 0,1,2,\ldots$）に対して $c_{2\mu+1} = 0$. $m = 2\mu$（偶数，$\mu = 0,1,2,\ldots$）に対して

$$c_{2\mu}(\lambda) = \frac{(-1)^{\mu}c_0(\lambda)}{2^{2\mu}(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+1)_{\mu}(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_{\mu}}$$

を得る．ここで，$c_0(\lambda) = (\lambda+n)\widetilde{C_0}(\lambda)$ （$\widetilde{C_0}(\lambda)$ は $\lambda = 0$ で有限な関数）とおく．そして，$C_{\mu}(\lambda) = c_{2\mu}(\lambda)$ と記すことにする．

$$C_m(\lambda) = \frac{(-1)^m(\lambda+n)\widetilde{C_0}(\lambda)}{2^{2m}(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+1)_m(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_m}.$$

フロベニウスの方法によれば，

$$y(x;\lambda) := \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\lambda)x^{2m+\lambda}$$

とおけば，

$$y_2 := \left.\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=-n} = \log x\sum_{m=0}^{\infty}C_m(-n)x^{2m-n} + \sum_{m=0}^{\infty}C'_m(-n)x^{2m-n}$$

[5]特殊関数の教科書，例えば，時弘哲治「工学における特殊関数」（共立出版，2006 年）を参照すること．

が第 2 の解である．$C_m(-n), C'_m(-n)$ を求める．まず，$C_m(-n)$ の計算結果は以下の通り．

$$C_m(-n) = \begin{cases} 0 & (\, m \leq n-1\,) \\ -\dfrac{\widetilde{C_0}(-n)}{2^{2n-1}n!(n-1)!} \neq 0 & (\, m = n\,) \\ \dfrac{(-1)^{m-n}n!C_n(-n)}{2^{2(m-n)}(m-n)!m!} & (\, m \geq n+1\,), \end{cases}$$

ただし，$\widetilde{C_0}(-n) \neq 0$ となるように関数 $\widetilde{C_0}(\lambda)$ を選んでおく．よって，

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(-n)x^{2m-n} &= 2^n n! C_n(-n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \\ &= 2^n n! C_n(-n) J_n(x) \end{aligned}$$

を得る．これは，はじめからわかっていた結果である．$C'_m(-n)$ を計算する．まず，$m \leq n-1$ に対しては，

$$\begin{aligned} C'_m(\lambda) &= \frac{(-1)^m \widetilde{C_0}(\lambda)}{2^{2m}(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+1)_m(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_m} + (\lambda = -n \text{ で } 0 \text{ になる項}), \\ C'_m(-n) &= \frac{(n-m-1)!\widetilde{C_0}(-n)}{2^{2m}m!(n-1)!} \\ &= -2^{2n-1-2m}n!C_n(-n)\frac{(n-m-1)!}{m!} \end{aligned}$$

を得る．$m = n$ に対しては，

$$\begin{aligned} C'_n(\lambda) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}(\frac{\lambda}{2}-\frac{n}{2}+1)_{n-1}(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_n} \\ &\quad \times \left\{ \widetilde{C_0}'(\lambda) - \widetilde{C_0}(\lambda)\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda-n+2+2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda+n+2+2k}\right)\right\}, \\ C'_n(-n) &= \frac{-1}{2^{2n}(n-1)!n!}\left\{2\widetilde{C_0}'(-n) - \widetilde{C_0}(-n)[\phi(n)-\phi(n-1]\right\} \\ &= -\frac{1}{2}C_n(-n)\left\{2\frac{\widetilde{C_0}'(-n)}{\widetilde{C_0}(-n)} - [\phi(n)-\phi(n-1)]\right\}, \end{aligned}$$

ただし，

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (\, n = 1, 2, \ldots\,)$$

である．ここで，

$$2\frac{\widetilde{C_0}'(-n)}{\widetilde{C_0}(-n)} - [\phi(n)-\phi(n-1)] = \phi(n),$$

すなわち，

$$\frac{\widetilde{C_0}'(-n)}{\widetilde{C_0}(-n)} = \phi(n) - \frac{1}{2}\phi(n-1)$$

となるように関数 $\widetilde{C_0}(\lambda)$ を選ぶことにする．すると，

$$C'_n(-n) = -\frac{1}{2}C_n(-n)\phi(n)$$

となる．$m \geq n+1$ に対しては，

$$
\begin{aligned}
C_n(\lambda) &= \frac{(-1)^{m-n} C_n(\lambda)}{2^{2(m-n)}(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_{m-n}(\frac{\lambda}{2}+\frac{3n}{2}+1)_{m-n}}, \\
C_n'(\lambda) &= \frac{(-1)^{m-n}}{2^{2(m-n)}(\frac{\lambda}{2}+\frac{n}{2}+1)_{m-n}(\frac{\lambda}{2}+\frac{3n}{2}+1)_{m-n}} \\
&\quad \times \left\{ C_n'(\lambda) - C_n(\lambda) \left(\sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{\lambda+n+2+2k} + \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{\lambda+3n+2+2k} \right) \right\}, \\
C_m'(-n) &= \frac{(-1)^{m-n}}{2^{2(m-n)}(m-n)!(n+1)_{m-n}} \\
&\quad \times \left\{ C_n'(-n) - C_n(-n) \left(\sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{2+2k} + \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{2n+2+2k} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{m-n} n!}{2^{2(m-n)}(m-n)!n!} C_n(-n)[\phi(m-n)+\phi(m)]
\end{aligned}
$$

となる．以上より，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} C_m'(-n) x^{2m-n} \\
&= -2^{n-1} n! C_n(-n) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \\
&\quad - 2^{n-1} n! C_n(-n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} [\phi(m)+\phi(n+m)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}
\end{aligned}
$$

となる．

これまでの計算をまとめて，第 2 の解として次を得る．

$$
\begin{aligned}
y_2 = 2^n n! C_n(-n) &\left\{ \log x J_n(x) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \right. \\
&\left. -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} [\phi(m)+\phi(n+m)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \right\}.
\end{aligned}
$$

これを $(\pi/2)2^n n! C_n(-n)$ で割って $(2/\pi)(\gamma - \log 2)J_n(x)$ を足したもの

$$
\begin{aligned}
Y_n(x) := \frac{2}{\pi} \left[\log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] J_n(x) &- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} [\phi(m)+\phi(n+m)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}
\end{aligned}
$$

は n **次の第二種ベッセル関数**または，n **次のノイマン関数**とよばれる．

第 7 章　演習問題

7.1. (1)~(2) では各問の力学系を行列・ベクトルを用いて

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A\ :\ 2 \times 2 \text{ 行列}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

と表す．

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値 λ は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

であり，符号の異なる実固有値である．ゆえに，特異点 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ は鞍点である．

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値 λ は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm i$$

であり，純虚数（実部 0）である．ゆえに，特異点 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ は渦心点である．

(3)

$$x_1 + 3\sin x_2 = x_1 + 3\left(x_2 - \frac{x_2^3}{3!} + \cdots\right) \simeq x_1 + 3x_2,$$
$$1 - e^{-4x_1} + 9x_2 = 1 - \left[1 - 4x_1 + \frac{1}{2!}(-4x_1)^2 + \cdots\right] + 9x_2 \simeq 4x_1 + 9x_2$$

により，題意の力学系は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

で線形近似される．A の固有値 λ を求めると，

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ -4 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 33 = (\lambda - 3)(\lambda - 11) = 0, \quad \lambda = 3, 11$$

と正の異なる固有値であるから，特異点 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ は不安定な結節点である．

(4)

$$1 - e^{5x_2} + 3\tan x_2 = 1 - \left[1 + 5x_2 + \frac{1}{2!}(5x_1)^2 + \cdots\right] + 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_2^3 + \cdots\right) \simeq -5x_1 + 3x_2,$$
$$3x_1 - \sin 2x_2 = 3x_1 - \left[2x_2 - \frac{1}{3!}(2x_2)^3 + \cdots\right] \simeq 3x_1 - 2x_2$$

により，題意の力学系は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

と線形近似される．A の固有値 λ を求めると，

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & 3 \\ 3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{3})$$

と負の異なる固有値である．ゆえに，特異点 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ は安定かつ漸近安定な結節点である．

7.2. $x_1 = \xi_1 + c/d, x_2 = \xi_2 + b/a$ とおくと，題意の連立微分方程式は次のように書き直される．

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -(bc/d)\xi_2 - b\xi_1\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = (ad/b)\xi_1 + d\xi_1\xi_2. \end{cases}$$

この方程式の線形近似は

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

となる．行列 A の固有値 λ は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & bc/d \\ -ad/b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ac = 0, \quad \lambda = \pm i\sqrt{ac}$$

と純虚数（実部 0）となる．したがって，平衡点 $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$，すなわち，$(x_1, x_2) = (c/d, a/b)$ は渦心点となる．生物 A, B の数 x_1, x_2 は平衡点 $(x_1, x_2) = (c/d, a/b)$ の近くにあるならば平衡点付近を推移し，大きく増加あるいは減少することはない．

7.3. 題意の力学系は行列・ベクトルを用いて

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

と表せる．そして，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla L(\boldsymbol{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$$

である．A は実対称行列であるから，ある 2×2 直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} =: \Lambda$$

（λ_1, λ_2 は A の固有値）と対角化できる．よって，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ とおくと

$$\boldsymbol{f} \cdot \nabla L = \boldsymbol{y}^T P^T AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \Lambda \boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

が成り立つ．したがって，$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ならば $\boldsymbol{f} \cdot \nabla L \leq 0$，そして，$\boldsymbol{x} \neq (0,0)^T$，すなわち，$\boldsymbol{y} \neq (0,0)^T$ ならば $\boldsymbol{f} \cdot \nabla L < 0$ が成り立つので，原点 $\boldsymbol{x} = (0,0)^T$ は安定な特異点である．

第 8 章　問 8.1

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1.$$

両辺の絶対値[6]をとると，$e^x = 1$, $x = 0$．よって

$$\cos y + i \sin y = 1.$$

両辺の実部・虚部を比較して，

$$\cos y = 1, \quad \sin y = 0.$$

第 1 式より $y = 2n\pi$（n は整数）．これは第 2 式を満たす．

[6]複素数 $z = x + iy$ の絶対値は $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．