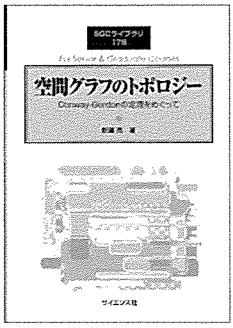
空間グラフのトポロジー
Conway–Gordon の定理をめぐって

新國亮著，B5 判，192 頁，本体 2300 円，サイエンス社



本書は，グラフの重要な性質の一つである結び目内在性/絡み目内在性およびその一般化や亜種に焦点を当てている．ここで，グラフ G が結び目内在であるとは，G をどのように 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込んでも，ほどけない結び目成分を部分集合として含むということであり，G が絡み目内在であるとは，G をどのように $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込んでも，分離不能な 2 成分絡み目成分を部分集合として含むということである．グラフの結び目内在性/絡み目内在性については，1980 年代に発表された Conway–Gordon の定理を発端に研究が盛んに行われており，彼らの定理の精密化および一般化，結び目内在性/絡み目内在性の一般化や亜種が様々に研究されるようになった．以下の定理 1 が Conway–Gordon の定理であり，(1) は絡み目内在であるグラフが存在すること，(2) は結び目内在であるグラフが存在することを表している．

定理 1（Conway–Gordon の定理）(1)　完全グラフ K_6 の任意の空間グラフ $f(K_6)$ において，

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_{3,3}(K_6)} \mathrm{lk}_2(f(\lambda)) \equiv 1 \pmod 2.$$

(2)　完全グラフ K_7 の任意の空間グラフ $f(K_7)$ において，

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_7(K_7)} \mathrm{Arf}(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod 2.$$

本書の特徴について簡潔に述べる．Conway–Gordon の定理をめぐる諸性質の解説は，本格的には第 3 章から始まる．第 3 章で，空間グラフの内在的性質の研究の発端となった Conway–Gordon の定理およびその証明が与えられている．第 4 章では，結び目内在性/絡み目内在性に関してマイナーミニマルなグラフが紹介されている．特に，絡み目内在性に関してマイナーミニマルなグラフは，Petersen 族に属する 7 個のグラフのみであるという性質は興味深い．一方，結び目内在性に関してマイナーミニマルなグラフの決定は未解決問題として紹介されている．第 5 章では，結び目内在性/絡み目内在性の一般化および亜種が紹介されている．例えば，“3 成分絡み目または既約な空間手錠グラフ内在性” など，含まれる非自明空間グラフの位相型の制限を緩めて得られる内在性が紹介されており，空間グラフの内在性は多種多様であることを知ることができる．第 6 章で，Conway–Gordon の定理の精密化である整数持ち上げや，一般化が与えられている．この拡張によって，含まれる Hamilton 結び目や絡み目の様々な特徴が見えてくる．例えば，完全グラフ K_n の空間グラフ内の分離不能な Hamilton 絡み目の個数に関する評価などを見ることができる．また，グラフの何らかの非自明内在性を導くような性質が Conway–Gordon 型定理として紹介されている．Conway–Gordon の定理の精密化や一般化が進んだことにより，応用の幅が広くなった．第 7 章では，Conway–Gordon（型）定理を利用したいくつかの応用が紹介されている．特に，高分子化学との関連で書かれていることが興味深い内容となっている．

本書では，グラフの結び目内在性/絡み目内在性およびその一般化や亜種についてのこれまでの研究内容が，基本的なことから応用まで一冊に丁寧に纏められている．そのため，当該分野の研究を進めている識者にとっては，とても有難いテキストになっていると考えられる．また，空間グラフ理論全般におけるいくつかの重要な不変量が丁寧に解説され，頻繁に使われるテクニックが随所に盛り込まれているため，これからこの分野の勉強を始める初学者にとっても，研究に必要な知識や技術を広く習得できるものであろう．実のところ，私自身は空間グラフを扱った研究は行っているものの，空間グラフ理論のあらゆる分野に精通しているわけではない．特に Conway–Gordon の定理およびその周辺については，この本を協力者と共にセミナーを行いながら読み進めることにより，基本的なことから応用まで幅広い知識や技術を習得することができ，様々な方面への研究の広がりを知ることができたと感じている．

大城　佳奈子（上智大学理工学部）