力学講義ノート (サイエンス社刊) 付録

北野正雄 2024年12月18日

本資料は「力学講義ノート — 基礎から解析力学入門へ」 (サイエンス社, 2024) [1] へ の補足 (オンライン付録) として準備されたものである.サイエンス社のページからダ ウンロードできる.本文への正誤表を含め,随時アップデートする予定である.

目 次

目次		2
付録 A	単位系	3
A.1	国際単位系 SI	3
A.2	質量とプランク定数	5
A.3	量と単位の表記	6
付録 B	双対構造	8
B.1	双対空間とコベクトル	8
	B.1.1 コベクトルの幾何学的イメージ	9
B.2	斜交座標系と双対基底	10
B.3	テンソル積と線形演算子	12
	B.3.1 線形演算子	13
B.4	基底と成分の変換則	14
	B.4.1 曲線座標系における基底と双対基底	16
B.5	対称演算子	17
	B.5.1 2次形式	19
	B.5.2 計量	20
B.6	添字記法	21
付録 C	Python I-F	24
C.1	微分方程式ソルバ solve_ivp	24
C.2	ニュートンのゆりかご	26
C.3	摩擦	27
C.4	非線形連成ふりこ	27
C.5	パラメトリック励振	28
C.6	2 重ふりこ	28

参考文献

2

付録 A 単位系

数と量の違いは普段意識されることは少ないが,大きく異なる概念である.電話やメー ルなどで数を伝えるのは簡単であるが,量を知らせることは容易ではない.通販で服や 靴を買う場合,サイズの選択に迷うのは,量を伝えることのむずかしさの例である.量 を数値化して,その大きさを共有するための取り決めが「単位」である.さらに多様な 種類の量を物理法則に基づいて整理し,対応する単位もそれに応じて系統的に整備する のが「単位系」の考え方である.

A.1 国際単位系 SI

単位系においては, まず, 少数の基本となる種類の量が選定される. これらは「次元」 とよばれる. 力学に関係する次元は「質量」*M*,「長さ」*L*, 「時間」*T*の3つである. (質量の代わりに「力」を採ることが検討されたこともある.) 各次元に対応する量の大 きさを, 数値として表す基準となる〈基本単位〉が定められる. 現在の国際単位系 SI [2, 3, 4] の前身である, MKS 単位系では, キログラム kg, メートル m, 秒 s が基本単位 に選ばれた. その後, 表 A.1 のように, アンペア A をはじめとする 4 つの次元と基本単 位が追加されている.

その他の種類の量の次元は、その物理的定義にしたがって、これらの組み合わせ (積, 商, べき乗) で表される. 例えば、速度の次元は L/T, 力の次元は ML/T^2 などであ る. 対応する単位も m/s, kg m/s² と自動的に定められる. これらは組立単位とよばれ る. いくつかの組立単位には固有の記号が割り当てられている. 例えば、力については N := kg m/s²、エネルギーについては J := kg m²/s² が充てられている.

重要なことは,組立単位を作る際に,「1 以外の数値定数を用いない」ということで ある.これによって,次元から単位が一意に決まる.このルールに従うものを「一貫した (coherent) 単位系」という.¹

単位から隔たった小さい量や大きい量を表すために,表 A.2 のように, n := 10⁻⁹ (ナ ノ), G := 10⁹ (ギガ) などの, SI 接頭語 (prefix) が準備されている.²

¹単位系の肝要である.このルールを破ると,1つの量に,大きさの異なる複数の単位を割り当てることが 可能になってしまう.そして,換算係数表を管理する必要が生ずる.

表 A.1 SI 基本单位

次元		基本単位	単位記号
時間	Т	秒	S
長さ	L	メートル	m
質量	М	キログラム	kg
電流	Ι	アンペア	А
温度	Θ	ケルビン	Κ
物質量	Ν	モル	mol
光度	J	カンデラ	cd

表 A.2 SI 接頭語

	名称	記号	因子	名称	記号	因子
-	デカ (deca)	da	10^{1}	デシ (deci)	d	10^{-1}
	ヘクト (hecto)	h	10^{2}	センチ (centi)	c	10^{-2}
	キロ (kilo)	k	10^{3}	ミリ (milli)	m	10^{-3}
	メガ (mega)	Μ	10^{6}	マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
	ギガ (giga)	G	10^{9}	ナノ (nano)	n	10^{-9}
	テラ (tera)	Т	10^{12}	ピコ (pico)	р	10^{-12}
	ペタ (peta)	Р	10^{15}	フェムト (femto)	f	10^{-15}
	エクサ (exa)	Е	10^{18}	アト (atto)	a	10^{-18}
	ゼタ (zetta)	Z	10^{21}	ゼプト (zepto)	\mathbf{Z}	10^{-21}
	ヨタ (yotta)	Υ	10^{24}	ヨクト (yocto)	У	10^{-24}
	ロナ (ronna)	R	10^{27}	ロント (ronto)	r	10^{-27}
	クエタ (quetta)	Q	10^{30}	クエクト (quecto)	q	10^{-30}

基本単位の具体的な大きさを決めるために「標準」が定められる. 当初, MKS 単位 系では, 水の密度に基づいたキログラム原器, 地球の子午線の長さに基づいたメートル 原器, そして, 地球の自転 (あるいはそれで校正されたふりこ) が標準として用いられた が, その後, 計測技術の進歩に合わせて, 再現性と正確さの高い手法が導入されてきた. 2018 年に採択, 2019 年 5 月に施行された国際単位系 (SI) の改定は 18 世紀以来使わ れてきたキログラム原器の廃止を含む本格的なものである.

な単位を設定する提案もなされたが,残念ながら採択には至らなかった. (計算間違いの原因になるので十分 注意が必要である.)



図 A.1 キッブル天秤

A.2 質量とプランク定数

1967年からセシウム原子のマイクロ波遷移の周波数によって「秒」が定義されるよう になった. 具体的にはセシウム原子時計が時間の基準として使われる. 1983年には,光 速を m/s で計った場合の数値を 299 792 418 と定義値化することで,原子時計の「秒」 と組み合わせて,「メートル」の大きさを示すようになった.

さらに, 2019年には, 質量の標準であるキログラム原器が廃止され, 代わりに, プラン ク定数を Js = m² kg/s で計った場合の数値を $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ に固定することで, 「キログラム」の大きさを示すことになった.

その他, アンペア A, ケルビン K, モル mol の定義が大きく変わった. そのために新たに 4 つの物理定数, すなわちプランク定数 h, 素電荷 e, ボルツマン定数 $k_{\rm B}$, アボガドロ定数 $N_{\rm A}$ を表す数値の固定 (定義値化) が行われた (表 A.3).

キッブル天秤 物体の質量をプランク定数に関連付ける方法 (の一部) を担うものが, キッブル天秤 (Kibble balance) である (図 A.1). ワットバランスともよばれ, 質量を電

物理定数	記号 A	定義値 {A}	単位 [A]
セシウム遷移周波数	$\Delta \nu_{\rm Cs}$	9192631770	$Hz = s^{-1}$
光速	$c_0, \ c$	299792458	m/s
プランク定数 *	h	6.62607015×10^{-34}	$Js=m^2kgs^{-1}$
素電荷 *	e	$1.602176634\times10^{-19}$	C = s A
ボルツマン定数 *	$k_{\rm B}$	1.380649×10^{-23}	$J/K = m^2 \mathrm{kg} \mathrm{s}^{-2} \mathrm{K}^{-1}$
アボガドロ定数 *	$N_{\rm A}$	6.02214076×10^{23}	mol^{-1}
発光効率	$K_{\rm cd}$	683	$\rm lm/W = m^{-2} kg^{-1} s^3 cd sr$

表 A.3 新 SI で定義値化された物理定数 (* は今回新たに定義値化).

気的に量る装置である.天秤の一方には物体が置かれ,他方は磁場 B の中に置かれたコ イル (長さ l) になっている.磁場の方向は径方向である.天秤は2つのモードで動作す る.まず,空の天秤を速度 v で動かした場合のコイルの起電力

$$V = Blv \tag{A.1}$$

を測定する (電圧モード).次に,質量 m の物体を載せた状態で,釣り合いを維持するようコイルに電流 I を流す (電流モード).釣り合い条件は

$$mg = IBl$$
 (A.2)

これらの式から

$$m = \frac{IV}{gv} \tag{A.3}$$

が得られる. 曖昧さの要因となりうる. 磁場やコイルの影響, つまり *Bl* が除かれており, 右辺の4つの量から質量が定まる. *g* と *v* はレーザー干渉計を用いて精度よく定められる.

現在, 電気的な量の標準は, ジョセフソン効果と量子ホール効果によって実現されている. つまり, これらの効果に関する定数である, ジョセフソン定数 $K_{\rm J} = 2e/h \stackrel{\rm SI}{\sim} ({\rm V}\,{\rm s})^{-1}$, フォン・クリッツィング定数 $R_{\rm K} = h/e^2 \stackrel{\rm SI}{\sim} \Omega$ は h, e に関連付けられている. 現在の SI によれば, e, h はいずれも定義値化されている量であり, 電圧も電流も正確に定める ことができるのである. 特に, 電力は, $(K_{\rm J}^2 R_{\rm K})^{-2} = 4h$ のように h と関係づけられる. 質量は式 (A.3) を通して電気的に定められるのである.

A.3 量と単位の表記

量は、例えば、 $g = 9.8 \times 1 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$ のように、数と単位 (基準となる量) を用 いて 〈量〉 = 〈数〉 × 〈単位〉 のように積の形であたえられる.単位は基本単位またはそれ らの組み合わせである.

物理量 A の単位とそれで表した数を表すために,

 $A = \{A\}[A]$

という記法が一般的に用いられる.[3]³ つまり, {*A*} が数値, [*A*] が単位を表す. (この分 離は単位系に依存するが, ここでは SI に固定して考える.) 例えば, *g* = 9.8 m/s² に対

³似て非なるものとして, c_0 [m/s], 3.0×10^8 [m/s] のように, 単位記号を (亀甲) 括弧で囲む記法が高校 の教科書などで用いられる.これは量や単位の理論や国際的な規約を無視した不合理なものであり, 使用すべきでない.[5]

して, $\{g\} = 9.8$, $[g] = m/s^2$ と書く. 関係

$$A/[A] = \{A\}, \quad A/\{A\} = [A],$$
$$[[A]] = [A], \quad \{\{A\}\} = \{A\}, \quad [\{A\}] = \{[A]\} = 1$$

などが成り立つ. $[g] = [kg], \{g\} = 10^{-3}$ であることに注意する.

物理量の同値関係通常,量の単位を明示する必要がある場合は, $[g] = m/s^2$ と書かれることが多い.上記の記号は必ずしも使いやすいものではなく,誤った使い方に陥るおそれも多い.そこで,本書では,量の単位を表示する必要がある場合は, $g \stackrel{\text{SI}}{\sim} m/s^2$ などのように表すことにする.

一般に, 量 A, B の比が (SI において) 数である場合, つまり, ある数 (無次元) k に対して A = kB のとき,

$$A \stackrel{\rm s_{I}}{\sim} B \tag{A.4}$$

と書くことにする. これは, [A] = [B], あるいは, $A \ge B$ が同じ物理次元を持つということである.

関係 $\stackrel{SI}{\sim}$ は数学的な同値関係である. つまり, $A \stackrel{SI}{\sim} A$ (反射律); $A \stackrel{SI}{\sim} B$ なら $B \stackrel{SI}{\sim} A$ (対称律); $A \stackrel{SI}{\sim} B$ かつ $B \stackrel{SI}{\sim} C$ なら $A \stackrel{SI}{\sim} C$ (推移律) が成り立つ. この関係によって, 量 全体を次元でクラス分けできる.

普及はしていないが、この記法を使うと、「角運動量を *J* とする. ただし [J] = Js である.」の代わりに「角運動量を $J \stackrel{st}{\sim} Js$ とする.」と簡単に書け、さらに、「角運動量を J [Js] とする.」という悪弊に陥るのを回避できる.

付録 B 双対構造

双対性は広範な分野で重要な役割を演じているが,詳しく説明されることは少ない.[6] 線形空間の双対構造は力学を理解する上で非常に有用な概念である.ここでは力学の文脈 に沿って双対空間について詳しく述べたい.参考文献をいくつか挙げておく.[7, 8, 9, 10]

B.1 双対空間とコベクトル

ベクトル空間 V(n 次元) からその係数体である \mathbb{R} への線形関数 $\phi(\mathbf{x})$ を考える. つまり, 任意の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ について,

$$\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2), \quad \phi(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \phi(\boldsymbol{x})$$
(B.1)

を満たす関数 ϕ を考える. これを線形汎関数 (linear functional) という.

V上の線形汎関数全体は線形空間をなす. つまり, 和を $(\phi_1 + \phi_2)(\Box) = \phi_1(\Box) + \phi_2(\Box)$, スカラー倍を $(\alpha\phi)(\Box) = \alpha\phi(\Box)$ で定義できるからである. この空間を V の双対空間 (dual space) とよび V^* と表す. V^* の次元は V のそれと同じである.

線形汎関数が,新たなベクトル空間の要素であることを意識して,ボールド体で $a := \phi(\Box)$ のように表すことにする.ただし,Vの要素である通常のベクトルと区別するために,双対ベクトルあるいは**コベクトル** (co-vector) とよぶ.

コベクトル $\phi(\Box) = a \in V^*$ のベクトル $x \in V$ への作用を

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \tag{B.2}$$

と表し, **双対ペアリング** (dual pairing) とよぶ.¹ ベクトル $x_1, x_2 \in V$ の内積あるいはス カラー積 (x_1, x_2) = $x_1 \cdot x_2$ に類似しているが, 対象が異なるので区別する必要がある.

 $(V^*)^*$ は V と同一視できる. $x \in V$ を固定すると, $\phi \in V^*$ に対して実数 $\phi(x)$ を与える線形関数と見なせるからである. つまり, ベクトルはコベクトルに対する線形汎関数として働く. 「双対」とよばれるゆえんである.

 $^{^{1}\}langle a, x \rangle$ とも書かれる.本書では,量子論におけるブラ・ケットのペアリング $\langle \phi | \psi \rangle$ に類似した a + x を用いることにする.コベクトルを左,ベクトルを右に書くことにする.

表 B.1 力学におけるベクトル・コベクトル対

ベクトル			コベクトル		
変位	r	$\stackrel{\rm si}{\sim} m$	力	f	$\stackrel{\rm si}{\sim} J/m$
速度	v	$\stackrel{\rm \tiny SI}{\sim} \rm m/s$	運動量	p	$\stackrel{\rm si}{\sim} J/(m/s)$

コベクトルの例 質点に力がかかっているとする. 変位ベクトル r に対する仕事 W(r)は線形汎関数を与える. 任意の変位 r, r_1, r_2 とスカラー c に対して,

$$W(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = W(\boldsymbol{r}_1) + W(\boldsymbol{r}_2), \quad W(c\boldsymbol{r}) = cW(\boldsymbol{r})$$
(B.3)

が成り立つ. 仕事 W の変位 r への依存性を通して力が定量されていると考えられる. 例えば, 手のひらの物体の重さ (力) は微小な変位に要する筋肉でのエネルギー消費を 通して, はじめて感得されている. 最初から空間内に力の矢印が見えるわけではない.

線形汎関数 $W(_{\sqcup})$ を「コベクトル」である力 f と同一視できる. すなわち、

$$W(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r} \tag{B.4}$$

が成り立つ. 2 つの仕事 $W_1(\sqcup), W_2(\sqcup)$ の和 $(W_1 + W_2)(\sqcup)$ はコベクトルの和 $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$ に対応づけられる.

表 B.1 に示すように, 力 f はコベクトルに, 変位 r はベクトルに対応づけられる. 同様に, 運動量 p と速度 v も同様に双対関係にある. 双対ペアリング (1/2)p + v は運動 エネルギーを与える.

B.1.1 コベクトルの幾何学的イメージ

ベクトル *x* とコベクトル *a* の関係を幾何学的に考えてみよう. 位置の変化 (変位) で あるベクトルは矢印でよく表される. 矢印の長さと向きがベクトルの大きさ, 方向をそ れぞれ表している. 一方, コベクトル *a* の幾何学イメージは, 図 B.2 に示すような「層 状平面」である. すなわち, ベクトル空間上の線形関数は, その値が一定になる面の集 まりでよく表すことができる. 等電位面 (*N* = 3), 等高線 (*N* = 2) などがその例であ る.² 双対ペアリング

$$x_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \tag{B.5}$$

²平面波の波数 $\mathbf{k} \stackrel{\text{SI}}{\sim} 1/\text{m}$ もコベクトルと理解でき, 空間ベクトル $\mathbf{x} \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{m}$ との双対ペアリング $\phi = \mathbf{k} + \mathbf{x} \stackrel{\text{SI}}{\sim} 1$ は位相差を与えている.



図 B.1 ベクトルとコベクトルの幾何学的イメージ

はベクトル *x* が貫く面の数 (実際には連続量) に対応している. 層の密度が大きいほど, 同一のベクトル *x* に対するスカラー量 *x_a* は大きくなる. ベクトルの向きと面の向きの 関係によってスカラー量は変化する. 関数の値が増加する方向を示すために小さい矢印 を添えているベクトルの矢印と一致する場合に正の値を与えることになる. 「コベクト ルの向きは面の法線に, 大きさは面の線密度に対応する.」コベクトルは実空間のベクト ルと同じように矢印で描かれることも多いが, 平行面群と考える方が理にかなっている.

B.2 斜交座標系と双対基底

図 B.2 のような平面上の斜交座標系を考える. 2 次元ベクトルに対する非正規・非直 交基底 $\{g_i\}$ (i = 1, 2) が与えられているとする. ベクトル x の成分を求めるためには, 図に示されているグラフ用紙のパターンが役に立つ. g_2 に平行で, g_1 を基準 (単位) と した間隔で引かれた線群のうち何本を, x が横切っているかを見ることで, x_1 を知るこ とができる. この平行線群がコベクトル h_1 に相当する. x_2 も同様にコベクトル h_2 を 表す平行線群で求めることができる.

一般のベクトル空間 V の基底 $\{g_i\}$ (i = 1, ..., n) に対して, 双対空間の基底 $\{h_j\}$, $h_j \in V$ (j = 1, ..., n) は

$$\boxed{\boldsymbol{h}_{i} \cdot \boldsymbol{g}_{j} = \delta_{ij}} \tag{B.6}$$

を満たすように選ばれる. δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.³ これを**双対基底** (dual base) という.

双対基底は、〈内積が定義されないベクトル空間〉においても意味を持つ. つまり, 内 積とは無関係に定義することができる.

 $^{^{3}}h_{1}$ は g_{1} だけから決まるものではないことに注意する.他のすべての g_{i} $(i \geq 2)$ と直交するように選ぶ必要がある.結晶における逆格子ベクトル基底は双対基底の例である.



図 B.2 斜交座標系に対する方眼紙と双対基底

これらの基底によってコベクトル $a \in V^*$, ベクトル $x \in V$ をそれぞれ展開することができる.

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i} a_{i} \boldsymbol{h}_{i}, \quad \boldsymbol{x} = \sum_{j} \boldsymbol{g}_{j} x_{j}$$
 (B.7)

双対ペアリングは

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i} \sum_{j} a_{i} x_{j} (\boldsymbol{h}_{i} \cdot \boldsymbol{x}_{j}) = \sum_{i} \sum_{j} a_{i} x_{j} \delta_{ij} = \sum_{i} a_{i} x_{i}$$
(B.8)

となる. 行列表記と対応させるために, 式 (B.7) を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdots \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
(B.9)

と書くと, 双対ペアリング (B.8) は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdots \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{h}_n + \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
(B.10)

となる. $oldsymbol{h}_i$ $oldsymbol{g}_j=\delta_{ij}$ を用いた.

B.3 テンソル積と線形演算子

ベクトル $y \in V$ とコベクトル $b \in V^*$ を双対ペアリングとは逆の順序に並べた $yb = y \otimes b$ はテンソル積とよばれるものである. これをベクトル x に〈左から作用〉 させると、

$$(\mathbf{y}\mathbf{b})\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{b} \mid \mathbf{x}) \tag{B.11}$$

のような **y** に比例する新たなベクトルを生ずる. V から V への演算子の一種である. 一般の演算子はテンソル積の線形和として表せる.同じテンソル積をコベクトル **a** に 〈右から作用〉させることもでき、

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{b} \tag{B.12}$$

となる. この場合は新たな **b** に比例するコベクトルを生ずる. *V** から *V** への演算子 である.⁴

式 (B.7) の各式と $\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{h}_l$ それぞれの双対ペアリング

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}_k = \sum_i a_i (\boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{g}_k) = a_k, \quad \boldsymbol{h}_l \cdot \boldsymbol{x} = \sum_j (\boldsymbol{h}_l \cdot \boldsymbol{g}_j) x_j = x_l$$
(B.13)

をそれぞれ、もとの展開式 (B.7) に代入すると、

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{g}_{i}) \boldsymbol{h}_{i} = \boldsymbol{a} \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{x} = \sum_{j} \boldsymbol{g}_{j} (\boldsymbol{h}_{j} + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \boldsymbol{x}$$
 (B.14)

ここで,

$$I = \sum_{i} g_{i} h_{i} \tag{B.15}$$

は恒等演算子であり、「1の分解」ともよばれる.

テンソル積 xa は行列記法では

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{1} \cdots \boldsymbol{g}_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ \vdots \\ x_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1} \cdots a_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_{1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{1} \cdots \boldsymbol{g}_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1}a_{1} \cdots x_{1}a_{n} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n}a_{1} \cdots x_{n}a_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_{1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{n} \end{bmatrix}$$
(B.16)

と書ける.

⁴式 (B.11), (B.12) の左辺はそれぞれ (**yb**) + **x**, **a** + (**yb**) のように "」"を挿入してもよい. 演算子 A の ベクトル, コベクトルに対する作用は A**x**, **a** A と書くことにならって, 省略することにする.



図 B.3 ベクトル空間 V と双対ベクトル空間 V* の間の線形演算子

B.3.1 線形演算子

2 つの空間 V, V^* があるので, 図 B.3 に示すように, 線形演算子には始域, 終域の組 み合わせで 4 つの種類がある. 本節では $V \rightarrow V, V^* \rightarrow V^*$ について考える. $(V \rightarrow V^*, V^* \rightarrow V$ については B.5 節で調べる.)

まず, 線形演算子 $A: V \rightarrow V$ を考える. x' = Ax を1の分解 (B.15) を用いて変形 する:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \left(\sum_{i} \boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{h}_{i}\right)\boldsymbol{A}\left(\sum_{j} \boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{h}_{j}\right)\boldsymbol{x}$$
$$= \sum_{i}\sum_{j} \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{h}_{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_{j})\boldsymbol{h}_{j} + \boldsymbol{x} = \sum_{i}\sum_{j}(\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{h}_{j})\boldsymbol{x}$$
(B.17)

 $A_{ij} := h_i A g_j = h_i | (A g_j) = (h_i A) | g_j$ とおいた. つまり, 演算子は基底を用いて

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i} \sum_{j} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{h}_{j} \tag{B.18}$$

と書ける. A_{ii} は「行列要素」とよばれる. 演算子の作用の行列表記は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdots \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_n \end{bmatrix}$$
(B.19)

である. 2 つの演算子 A, B の積 (合成) C = AB が定義でき, その行列要素は $C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$ となることは簡単に確かめられる.

次に演算子 $A: V^* \rightarrow V^*$ は左作用と考えて, a' = aA とする. 式 (B.17) の場合と同様に変形すると,

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}) = \sum_{i} \sum_{j} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{h}_{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_{j})\boldsymbol{h}_{j} = \sum_{i} \sum_{j} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{h}_{j})$$
(B.20)

ただし, $A_{ij} = h_i A g_j$ とおいた. 基底で表すと,

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i} \sum_{j} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{h}_{j} \tag{B.21}$$

(B.26)

となり, (左作用と右作用を使い分けるという前提で,) $V \to V$ の演算子と同じ形になる. これは,

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \tag{B.22}$$

が成り立つことを意味するので好都合である. さらに, (すでに利用しているが) 演算の 合成則 (AB)C = A(BC) もなりたつ. いずれにせよカッコはなくてもよい.

B.4 基底と成分の変換則

座標系は絶対的なものではなく,同じ系についてでも異なった座標系を使って計算が 行われることがある.異なった座標系の基底と成分,それぞれの間は一定の関係がある. 一方の(新)座標系に関する量には,上線"⁻⁻"をつけることにする.

新しい基底をなすベクトル, コベクトル $\{\bar{g}_i\}$, $\{\bar{h}_j\}$ をそれぞれ元の基底 $\{g_i\}$, $\{h_j\}$ で展開すると

$$\bar{\boldsymbol{g}}_{j} = \sum_{l} \boldsymbol{g}_{l} V_{lj}, \quad \bar{\boldsymbol{h}}_{i} = \sum_{k} W_{ik} \boldsymbol{h}_{k}$$
(B.23)

となる. V_{lj} , W_{ik} はいずれも可逆 (正則) 行列である.

新基底の双対ペアリングは

$$\bar{\boldsymbol{h}}_{i} + \bar{\boldsymbol{g}}_{j} = \sum_{l} \sum_{k} W_{ik} V_{lj} \boldsymbol{h}_{k} + \boldsymbol{g}_{l}$$
$$= \sum_{l} \sum_{k} W_{ik} V_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k} W_{ik} V_{kj}$$
(B.24)

であるが, 双対基底の条件を満たすためには

$$\sum_{k} W_{ik} V_{kj} = \delta_{ij}, \quad \texttt{すなわち} \ W V = I \tag{B.25}$$

でなければならない.⁵ すなわち, $W = V^{-1}$ になることが必要である. V. W は基底を用いて、それぞれ

$$egin{aligned} \mathcal{V} &= \sum_j ar{m{g}}_j m{h}_j = \sum_j \sum_l m{g}_l V_{lj} m{h}_j \ \mathcal{W} &= \sum_i m{g}_i ar{m{h}}_i = \sum_i \sum_k m{g}_i W_{ik} m{h}_k \end{aligned}$$

⁵WV = Iなら VW = Iも成り立つ. なぜなら, (VW)(VW) = V(WV)W = VW (べき等性) の両辺に, 正則行列 VW の逆を作用させると, VW = Iとなる.

表 B.2 基底と成分の変換則

対象	基底	成分
ベクトル $x \in V$	$oldsymbol{g}_i = \sum_j oldsymbol{ar{g}}_j V_{ji}^{-1}$	$x_i = \sum_j V_{ij} \bar{x}_j$
コベクトル $f \in V^*$	$oldsymbol{h}_i = \sum_j V_{ij} ar{oldsymbol{h}}_j$	$a_i = \sum_j \bar{a}_j V_{ji}^{-1}$

と表すことができる. 基底変換の仕組みが見易い.

式 (B.23) をそれぞれ逆に解くと

$$\boldsymbol{g}_{l} = \sum_{j} \bar{\boldsymbol{g}}_{j} V_{jl}^{-1}, \quad \boldsymbol{h}_{k} = \sum_{i} V_{ki} \bar{\boldsymbol{h}}_{i}$$
 (B.27)

となる. ベクトル x は両方の基底で

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i} \boldsymbol{g}_{i} x_{i} = \sum_{i} \sum_{j} \bar{\boldsymbol{g}}_{j} V_{ji}^{-1} x_{i} = \sum_{j} \bar{\boldsymbol{g}}_{j} \bar{x}_{j}$$
(B.28)

と表される. これらを比較すると成分の間に

$$\bar{x}_j = \sum_i V_{ji}^{-1} x_i \tag{B.29}$$

という関係が成り立つ. ベクトルの成分は基底の変換 (式 (B.23) の第1式) とは逆の変換を受けることから, **反変** (contravariant) ベクトルともよばれる.

コベクトル a は, 両基底で

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i} a_{i} \boldsymbol{h}_{i} = \sum_{i} \sum_{j} a_{i} V_{ij} \bar{\boldsymbol{h}}_{j} = \sum_{j} \bar{a}_{j} \bar{\boldsymbol{h}}_{j}$$
(B.30)

と表されるが,成分の間には

$$\bar{a}_j = \sum_i a_i V_{ij} \tag{B.31}$$

という関係が成り立つ必要がある. コベクトルの成分は, ベクトルの基底と同じ変換に 従うことから, **共変** (covariant) ベクトルともよばれる. 変換則をまとめると, 表 B.2 の ようになる.

1の分解は

$$I = \sum_{i} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{h}_{i} = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \bar{\boldsymbol{g}}_{j} V_{ji}^{-1} V_{ik} \bar{\boldsymbol{h}}_{k} = \sum_{j} \bar{\boldsymbol{g}}_{j} \bar{\boldsymbol{h}}_{j}$$
(B.32)

となって, 基底によらず形が保たれる.

演算子の行列要素の変換則は式 (B.18), (B.27) より求められる:

$$\bar{A}_{kl} = \sum_{i} \sum_{j} V_{ki}^{-1} A_{ij} V_{jl}$$
(B.33)

B.4.1 曲線座標系における基底と双対基底

n次元空間の点を位置ベクトル r で表す. この空間に〈座標関数〉 $u_i(r)$ (i = 1, ..., n)が定められているとする. 位置 $r(u_1, ..., u_n)$ の微小変化

$$d\boldsymbol{r} = \sum_{i} du_{i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{i}} = \sum_{i} du_{i} \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{r})$$
(B.34)

は**接ベクトル** (tangent vector) とよばれる. $g_i(r) := \partial r / \partial u_i$ は (位置に依存する) 接ベ クトルの基底と見なせる.

空間上の関数 $f(\mathbf{r})$ の勾配

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \sum_{j} \frac{\partial f}{\partial u_{j}} \frac{\partial u_{j}}{\partial \boldsymbol{r}} = \sum_{j} \frac{\partial f}{\partial u_{j}} \boldsymbol{h}_{j}(\boldsymbol{r})$$
(B.35)

は余接ベクトル (cotangent vector)) とよばれる. $h_j(r) := \partial u_j / \partial r$ は余接ベクトルの 基底 (双対基底) と見なせる. 各座標関数 u_i の勾配である.

双対ペアリングは

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + d\boldsymbol{r} = \sum_{i} \sum_{j} \frac{\partial f}{\partial u_{j}} du_{i} \boldsymbol{h}_{j}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i} \frac{\partial f}{\partial u_{i}} du_{i}$$
(B.36)

であり, f の変化に相当する. 基底間の関係

$$\boldsymbol{h}_{j}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial u_{j}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_{i}} = \delta_{ij}$$
(B.37)

は少し考えれば自明な関係である. r に依存しないことに注意する. 座標関数から導かれる局所線形座標系とそれに付随する双対座標系は自然座標系とよばれる.⁶ 曲線座標系では,局所座標の正規直交性が破れる場合が多いので,双対空間の導入が必要とされる.

基底と双対基底の変換の例 直交座標 (x, y) と (r, θ) の関係を考えよう. ベクトルを縦 行列, コベクトルを横行列で表しており, 基底や双対基底を明示的に使うことはなかっ た. しかし, ここでの議論との整合性のためにこれらを調べておこう.

まず, 位置ベクトルは (x,y) と正規直交基底 $\{e_x, e_y\}$ を用いて

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \tag{B.38}$$

と表される. この関係を用いて, 接ベクトルの基底 $\{g_x, g_y\}$ は

$$\boldsymbol{g}_x := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \quad (= \boldsymbol{e}_x), \qquad \boldsymbol{g}_y := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \quad (= \boldsymbol{e}_y)$$
(B.39)

⁶数学では, ユークリッド空間に埋め込まれているとは限らない多様体を前提にしており, r を表に出した くないので, 基底 $\frac{\partial r}{\partial u_i}$, 双対基底 $\frac{\partial u_j}{\partial r}$ の代わりに, $\frac{\partial}{\partial u_i}$, du_i と書くが意味がとりにくい.

B.5. 対称演算子

となる. 元の基底と同じものになり, 同一視してよい. 極座標 (r, θ) は,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{B.40}$$

を満たす. これを式 (B.38) に代入して, r, θ で微分することにより, 接ベクトルの基底

$$g_r := \frac{\partial r}{\partial r} = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y,$$

$$g_\theta := \frac{\partial r}{\partial \theta} = -r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y$$
(B.41)

が得られる.

 r, θ をそれぞれ2次元上のスカラー関数と見なして、これらの勾配として余接ベクト ルの基底

$$\boldsymbol{h}_r := \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{h}_{\theta} := \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{r}}$$
 (B.42)

が得られる. 再び, 座標間の関係 (B.38) を用いると

$$h_x := \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} = \cos\theta h_r - r\sin\theta h_\theta$$

$$h_y := \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} = \sin\theta h_r + r\cos\theta h_\theta$$
(B.43)

余接基底間の関係が得られる. 逆に解くと

$$\boldsymbol{h}_r = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{h}_\theta = -(1/r)\sin\theta \boldsymbol{e}_x + (1/r)\cos\theta \boldsymbol{e}_y$$
 (B.44)

である. 基底と余基底の変換は逆の関係にある. 双対基底の関係 $h_r + g_r = h_{\theta} + g_{\theta} = 1$, $h_r + g_{\theta} = h_{\theta} + g_r = 0$ が満たされていることは簡単に確かめられる.

B.5 対称演算子

図 B.3 の演算子 $H: V \to V^*$ を考える. これはベクトル x に対してコベクトル a を 割り当てる操作である. $x = \sum_i g_i x_i$ とすると

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}\sum_{i} \boldsymbol{g}_{i} x_{i} = \sum_{i} (\boldsymbol{H}\boldsymbol{g}_{i}) x_{i}$$
(B.45)

であるが、さらに g_i との双対ペアリングをとると、

$$a_j = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}_j = \sum_i (H\boldsymbol{g}_i) \cdot \boldsymbol{g}_j x_i = \sum_i H_{ij} x_i$$
(B.46)

 $H_{ij} = (Hg_i) | g_j$ とおいた.⁷ 後に述べる理由により, $H_{ji} = H_{ij}$ を仮定する. (無理に) 行列算法でかけば,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{11} & H_{12}] & [H_{21} & H_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} x_2$$
$$= \begin{bmatrix} H_{11}x_1 + H_{21}x_2 & H_{12}x_1 + H_{22}x_2 \end{bmatrix}$$
(B.47)

と表せる. タテベクトルがヨコベクトルに変換されている. *H* は基底を用いて,

$$H = \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} \boldsymbol{h}_{j} \boldsymbol{h}_{i}$$
(B.48)

と書けることは *x* に作用させれば確認できる. 成分の変換則は,式 (B.27) から

$$\bar{H}_{kl} = \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} V_{ik} V_{jl} \tag{B.49}$$

となり,2階の共変テンソルともよばれる.

対称演算子 H の別の表し方を考えよう.

$$\begin{aligned} H\boldsymbol{x} &= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} (H_{ij}\boldsymbol{h}_{i}\boldsymbol{h}_{j})(x_{k}\boldsymbol{g}_{k}) \\ &= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} H_{ij}\boldsymbol{h}_{i}\delta_{jk}x_{k} \\ &= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} (x_{k}\boldsymbol{h}_{k})(\boldsymbol{g}_{j}H_{ij}\boldsymbol{h}_{i}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}^{\mathsf{X}} \end{aligned}$$
(B.50)

 $h_{j+}g_{k} = h_{k+}g_{j} = \delta_{jk}$ を利用した.ここで、 $H^{\times} := \sum_{i} \sum_{j} g_{i}H_{ij}h_{j}$ ($H_{ji} = H_{ij}$ に注意) は V^{*} から V^{*} , あるいは V から V への写像である.また、 $x = \sum_{i} g_{i}x_{i}$ に対して、

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} = \sum_{i} x_{i} \boldsymbol{h}_{i} = \sum_{i} \boldsymbol{h}_{i} (\boldsymbol{h}_{i} + \boldsymbol{x})$$
(B.51)

は転置 (transpose) とよばれる. このベクトルからコベクトルへの対応づけ (タテベクトルを単純に転置してヨコベクトルにする) は〈基底依存〉である. つまり, 一般に $\sum_i h_i h_i \neq \sum_i \bar{h}_i \bar{h}_i$ である.

⁷ここのカッコは必要である.

B.5. 対称演算子

H[×] の変換則は

$$\bar{H}_{kl}^{\times} = \sum_{i} \sum_{j} V_{ki} H_{ij}^{\times} V_{jl}^{-1}$$
(B.52)

であり, H のそれとは異なっている. x^{\intercal} , H^{\times} の成分の変換則は基底と不整合であるが, 式全体 $x^{\intercal}H^{\times}$ としては整合している.

式 (B.33) と比較すると, $V^{\intercal} = V^{-1}$, つまり直交変換の場合には, H_{ij}^{\times} と H_{ij} は同じ 変換則に従うことが分かる.⁸

式 (B.50) の最後の表式は通常の行列記法となじみがよいので,よく使われる.しかし,双対構造や変換則を部分的に崩していることに注意する必要がある.

逆演算子 $H^{-1}: V^* \rightarrow V$ が

$$H^{-1} = \sum_{k} \sum_{l} \boldsymbol{g}_{l} \boldsymbol{g}_{k} H_{kl}^{-1}$$
(B.53)

であることは簡単に確かめられる.

B.5.1 2次形式

 $x, y \in V$ に対して、

$$(H\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} x_i y_j \tag{B.54}$$

を考える. これは $V \pm 0.2$ 次形式とよばれるものである. ここで, $H_{ij} = H_{ji}$ と考えて 差し支えない. (もしそうでなければ, $(H_{ij} + H_{ji})/2$ を新たに H_{ij} と見なせばよい.) 双 対ペアリングと対称テンソルを用いて, 座標に依存しない形で 2 次形式が定義できるの である. 双対空間を導入しなくても可能ではあるが, $Hx \in V^*$ が物理的な意味を持つ場 合も多い. 行列表記は, 式 (B.47) を利用して,

$$(H\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i} H_{i1} x_{i} & \cdots & \sum_{i} H_{in} x_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1} \\ \vdots \\ y_{n} \end{bmatrix}$$
$$= \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} x_{i} y_{j}$$
(B.55)

となる. 2次形式は,式 (B.50) を用いて,

$$(H\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} H^{\mathsf{X}} \boldsymbol{y} = \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} x_i y_j$$
(B.56)

⁸対称行列 H_{ij}^{\times} は直交行列による変換で対角化できることに注意する.

と定義することもできる. 行列表記では

$$(\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}^{\mathsf{X}}) \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mid (\boldsymbol{H}^{\mathsf{X}}\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
(B.57)

となり, 見慣れた式になる.

例: 速度と運動量 速度はベクトル, 運動量はコベクトルであり, 質量テンソル *M* を用いて

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{M} = \sum_{i} \sum_{j} M_{ij}\boldsymbol{h}_{i}\boldsymbol{h}_{j}$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{M}^{-1}, \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \sum_{i} \sum_{j} (M^{-1})_{ij}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j}$$
(B.58)

と関係づけられる.

運動エネルギー E_Kは,2次形式

$$2E_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{p}\boldsymbol{M}^{-1})$$
(B.59)

で与えられる.

B.5.2 計量

V に内積 ($_{\sqcup},_{\sqcup}$) が定義されているとする. 基底 g_i について

$$g_{ij} := (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j) \tag{B.60}$$

とすると,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i} x_{i} \boldsymbol{g}_{i}, \sum_{j} y_{j} \boldsymbol{g}_{j}\right) = \sum_{i} \sum_{j} g_{ij} x_{i} y_{j}$$
(B.61)

と書ける. 式 (B.54) と比較すると,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{G} = \sum_{i} \sum_{j} g_{ij} \boldsymbol{h}_{i} \boldsymbol{h}_{j}$$
 (B.62)

と書くことができる. V の内積を $G: V \to V^*$ を介して表している. G を計量テンソルという. 逆に, この対称演算子によって内積が定義されるといってもよい.

特に, $g_{ij} = \delta_{ij}$ となる場合, 基底は正規直交である. この場合, $G \mid x = \sum_i x_i h_i$ であ り, $x = \sum_i g_i x_i$ と同一視しても差し支えない. つまり, 双対空間 V^* を導入する意味 は薄れる.

20

B.6 添字記法

本節ではベクトルとコベクトルの基底と成分を明示する記法を採った.また行列算法 との整合性にも配慮した.他方,テンソルのより一般的な記法として「アインシュタイ ンの添字記法」がある.2つの関係を簡単に見ておこう.

添字記法においては, 基底と成分それぞれの添字を共変は下添字, 反変は上添字で表 す. 例えば, ベクトル *x* とコベクトル *a* はそれぞれ,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i} x^{i} \boldsymbol{g}_{i}, \quad \boldsymbol{a} = \sum_{i} a_{i} \boldsymbol{h}^{i}$$
 (B.63)

と書く. 双対ペアリングは

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i} \sum_{j} a_{i} x^{j} \boldsymbol{h}^{i} \cdot \boldsymbol{g}_{j} = \sum_{i} \sum_{j} a_{i} x^{j} \delta^{i}_{j} = \sum_{i} a_{i} x^{i}$$
(B.64)

クロネッカーのデルタ δ_i^i も上下の添字を持つ.

これらの式を見て分かることは,同じ文字が上添字,下添字にそれぞれ1つずつ現れ ると,それらについて和がとられるということである.これを利用して,∑を省略する ことが行われる.「和の規則」(アインシュタインの規約)とよばれる.

重複する添字はダミー変数とよばれ,別の文字に置き換えても意味は変わらない. そ れ以外は活きた添字とよばれ,等式の左右でバランスして1回ずつ現れるはずである. それらは他の引数と重ならない範囲で文字の置き換えができる.

添字が上か下かでベクトル・コベクトルの区別ができるので, 基底を省略して成分だ けで計算が進められる. (基底が必要な場合には, g_i , h_j の代わりに e_i , e^j が用いられ る.) いくつか例を対比して見ておこう.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{i} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{x}_{i} & \boldsymbol{x}^{i} \\ \boldsymbol{a} &= \sum_{i} a_{i} \boldsymbol{h}_{i} & a_{i} \\ \boldsymbol{A} &= \sum_{i} \sum_{j} A_{ij} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{h}_{j} & A^{i}{}_{j} \\ \boldsymbol{H} &= \sum_{i} \sum_{j} H_{ij} \boldsymbol{h}_{i} \boldsymbol{h}_{j} & H_{ij} \end{aligned}$$
(B.65)

双対ペアリングを含む例も見ておく.

$$c = \mathbf{a} + \mathbf{x} = \sum_{i} a_{i}x_{i} \qquad c = a_{i}x^{i}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \sum_{j} A_{ij}x_{j} \qquad \bar{\mathbf{x}}^{i} = A^{i}{}_{j}x^{j}$$

$$\mathbf{a} = H\mathbf{x} = \sum_{j} H_{ij}x_{j} \qquad a_{i} = H_{ij}x^{j}$$

$$C = AB = \sum_{j} A_{ij}B_{jk} \qquad C^{i}{}_{k} = A^{i}{}_{j}B^{j}{}_{k}$$

(B.66)

添字記法は冗長性が省かれているので, 計算を手早く行うのに適している. より自由度 が大きく, 双対ペアをとる添字の位置も自由である. 高階のテンソルを扱うのに便利で ある.

添字記法は大変便利であるが, 意味を見失い易いので注意が必要である. 成分はあく までも基底とセットであることを意識すべきである. (上添字はベキ指数と紛らわしい のも問題である.)

計量テンソルを用いて, *Gx* に相当するものを $g_{ij}x^j =: x_i$ と書くことがよく行われる. これは内積 (x, y) = (Gx) + y にあたる $x_i y^i$ のような計算のために用いられる. いわゆる添字の上げ下げとよばれるものであるが, その物理的意味が分かりにくい. たとえば, x_i は何を意味するのか?

ユークリッドテンソル 正規直交基底に対して計量テンソルは

$$\boldsymbol{G} = \delta_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \tag{B.67}$$

であり, ベクトル $x = x^k e_k$ を入力すると, $g \cdot x = x^k \delta_{ij} \delta_k^i e^j = x^i \delta_{ij} e^j$ つまり, ベクト ル x とコベクトル x^{\dagger} が同じ成分をもつ. よって, これらを同一視しても差し支えない. 基底についても同様である. そして, 添字の上下には意味がなくなるので, すべて下添 字とする. 正規直交基底を前提とするものをユークリッドテンソルという. 変換行列は 直交行列に限られる. V と V* の区別も必要なくなる.⁹

相対論では計量を簡単化しても, diag(-1,1,1,1) にしかならないので, 正規直交基底 はとれず, 上下添字の計算が必要となる.

添字記法における注意点 添字記法はその表式が座標系の取り方に依存しないことが ポイントである.単一の式というより,すべての座標系における式を総称的に表したも のということができる.その特徴によって,基底を表に出さず成分の関係のみに着目す ればよく,和の記号も省略することが可能となっているのである.

22

⁹この状況に慣れすぎているので, 必要な場合には V* をしっかり意識する必要がある.

B.6. 添字記法

逆にいえば, 座標系に依存する式は添字記法ではうまく表せない. この事実は添字記 法を使いだして最初に躓く点であり注意が必要である.

ユークリッドテンソルの場合を例にとろう.一般に行列が対角的であるためには特定 を座標系を選ぶ必要がある (対角化). その成分を添字で表そうとすると,

$$A_{ij} = a_1 \delta_{1i} \delta_{1j} + \dots + a_2 \delta_{ni} \delta_{nj} = \sum_{k=1}^n a_k \delta_{ki} \delta_{kj}$$
(B.68)

となり, 最右辺の添字 k が 3 つ現れている. 重複添字のルールが適用できない. た だし, 恒等行列の定数倍 ($a_1 = \ldots = a_n := a$) に限っては, 座標系によらず, $A_{ij} = a \sum_k \delta_{ki} \delta_{kj} = a \delta_{ij}$ となり, 和の記号が省略でき, 添字記法が有効である.

付録 C Python コード

かつては, 計算尺, 関数電卓が科学者・技術者の必携アイテムであったが, 現在ではプ ログラミング言語が必須の技能である. 特に力学の学習においては数値計算が直接的な 威力を発揮するので, 一挙両得のよい機会となるだろう. そのような用途には Python が現時点では最もポピュラーで使いやすい言語であろう. (後発の Julia も科学技術計 算に向いている.) 本書の図のデータなどを計算するのに用いた実際的なプログラムの 一部を示す. これを手がかりとして, 読者自身でアレンジし実行することで理解を深め ていただきたい.

C.1 微分方程式ソルバ solve_ivp

ここでは、Python[11]の科学計算ライブラリ SciPy[12] で提供される微分方程式ソル バ integrate.solve_ivp (ivp は initial value problem) を利用した. このルーチンは 洗練されたインターフェースを備えており、多様な計算を柔軟かつ簡単に行える. 特に、 1 階連立微分方程式を想定しており、力学の正準形式と相性がよい. 簡単に使い方を紹 介しておく.

状態を表す n 次元ベクトルを y をとし,1 階連立微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$

を $t = t_0$ における初期値 \boldsymbol{y}_0 のもと、区間 $t_{\text{span}} = (t_0, t_f)$ で解くとする.そのために、 右辺の $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ を与えるサブルーチン $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ を用意し、

sol = scipy.integrate.solve_ivp(f, t_span, y0, ...)

を実行すればよい.¹ 計算結果は sol という複合データにすべて格納されている. sol.t は結果を与える時間点からなる配列である. 時間刻みは自動的に決められるが, オプショ ン引数 t_eval = $[t_1, \ldots, t_n]$ のように配列で与えることもできる. (計算のための 刻みは必要に応じてさらに細かくとられる.) sol.y[i] は対応する i 番目 (≥ 0) の変

¹ "…"は省略可能な引数である. デフォルト値から変更する場合は, "(引数名) = (値)"の形で引数を追 加する.

C.1. 微分方程式ソルバ solve_ivp

数の値からなる配列である.この2つの配列を描画ルーチンに渡せば y_i(t) のグラフが 描かれる.

オプション dense_output = True をセットしておくと, 事後的に, 関数 sol.sol に 適当な時間点を与えると, 内挿した値を返す.

オプション rtol=1e-3, atol=1e-6 は (相対, 絶対) 計算精度を与える. 必要に応じ て, より小さな値を与えればよい.

アルゴリズムとしてはデフォルトではルンゲークッタ法 (RK45) が用いられるが,オ プション method=" " で他のものに入れ替えることができる.

微分方程式の右辺に相当するサブルーチン f(t, y, a, b, ...) は時刻 t と状態を 表す配列 y を入力として, 状態の変化分 (微分) を返すように定義しておく. 右辺の計 算に必要な他のパラメータ a, b, ... も引数として宣言して, 関数の中で適宜使える. 実際にこれらの値を与えるのは, solve_ivp のオプション引数 args = (a, b, ...) に よる. 順序と数に注意する.

その他, 便利なオプションが準備されている. 詳しくはオンラインマニュアル等を参照されたい.

簡単な例として, 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x$$

を解くプログラムを示す. 作図については, ライブラリ Matplotlib[13] を用いた.

Listing C.1 ソルバによる微分方程式の求解

```
1 from scipy.integrate import solve_ivp
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 def u(t, x):
      return [-x[1], x[0]]
6
7
8 t0 = 0
9 tN = 10
10 \times 0 = [0, 1]
11
12 N = 100
13 ts = np.linspace(t0, tN, N)
14 sol = solve_ivp(u, [t0, tN], x0, t_eval= ts)
15
16 plt.plot(sol.t, sol.y[0,:])
17 plt.plot(sol.t, sol.y[1,:])
18 plt.show()
```

C.2 ニュートンのゆりかご

3.9節で議論したニュートンのゆりかごの運動方程式を解くプログラムを示す.

Listing C.2 ニュートンのゆりかご

```
1 from scipy.integrate import solve_ivp
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 v0 = 1e-2 # 1 cm/s
6 X0 = -60e-6 \# -60 um
7
   gap = 7e-6 \# 7 um
   PO = 0.104e12 # 0.104 TPa
8
   m = 0.167 \ \text{\# mass}
9
10 R = 0.015 # radius
11 k = R**(1/2)*P0
12
13 m1, m2, m3, m4, m5 = [m] * 5
14
  def cradle(t, state, k, m1, m2, m3, m4, m5):
15
     x1, x2, x3, x4, x5, p1, p2, p3, p4, p5 = state
16
17
     def force(x):
         return k*x**1.5 if x > 0 else 0
18
     dp1 = force(x1 - x2)
19
     dp2 = force(x2 - x3)
20
21
     dp3 = force(x3 - x4)
22
     dp4 = force(x4 - x5)
     return [p1 / m1, p2 / m2, p3 / m3, p4 / m4, p5 / m5,  
23
            -dp1, dp1 - dp2, dp2 - dp3, dp3 - dp4, dp4]
24
25
26 t_span = [0, 3e-3]
27 x0 = [X0, gap, 2*gap, 3*gap, 4*gap, v0, 0, 0, 0, 0]
28 sol = solve_ivp(cradle, t_span, x0, \
29
                  args = (k, m1, m2, m3, m4, m5), \
30
                  rtol = 1e-7, atol = 1e-7)
31
32 for i in range(5):
       plt.plot(sol.t*1e3, sol.y[i,:]*1e6)
33
34 plt.xlabel(r"t\,/\,\mathrm{ms}")
35 plt.ylabel(r"$x_n\,/\,\mathrm{\mu m}$")
36 plt.show()
```

26

C.3. 摩擦

C.3 摩擦

5.5節で扱った付着すべり現象を再現するプログラムである.

```
1 from scipy.integrate import solve_ivp
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 k = 0.1 # spring const, f_n/m
6 V_0 = 0.5 # pulling speed, m/s
7
8 def u(t, state):
       x, v = state
9
10
       f = k*(V_0*t - x)
11
       return [v, f + friction(v, f)]
12
13 # forces normalized by f_n (normal force)
14 def friction(v, f):
       mu_s = 0.7
15
       mu_k = 0.3
16
17
       sls = lambda f: -1 if f < -1 else 1 if f > 1 else f
       eps = 1.0e-6
18
       if abs(v) < eps:</pre>
19
20
          return -mu_s * sls(f / mu_s)
21
       else:
22
          return -mu_k * np.sign(v)
23
24 t0 = 0
25 tN = 100
26 \times 0 = [0, 0]
27
28 N = 100
29 ts = np.linspace(t0, tN, N)
30 sol = solve_ivp(u, [t0, tN], x0, t_eval= ts)
31
32 plt.plot(sol.t, sol.y[0,:])
33 plt.plot(sol.t, sol.y[1,:])
34 plt.show()
```

C.4 非線形連成ふりこ

10.6 節で扱った連成ふりこの運動方程式のコードの主要部分を示す. 大振幅ふりこの 場合にも対応しており, 非線形性の影響を見ることもできる.

Listing C.3 非線形連成ふりこ

```
1 def nc_pendulum(t, state, m, 11, 12, 10, g):
     th1, th2, ps1, ps2 = state
2
     th0 = (th1 + th2)/2
3
4
     delta = (th1 - th2)/2
5
     1_0 = 10 * math.cos(delta)
     det = l1*l2*(l1*l2 + 2*l_0*(l1 + l2))
6
     dth1 = (l2*(l2 + 2*l_0)*ps1 - l_0*(l1 + l2)*ps2)/(m*det)
7
     dth2 = (l1*(l1 + 2*l_0)*ps2 - l_0*(l1 + l2)*ps1)/(m*det)
8
     dps1 = -m*g*(l0*math.sin(th0) + l1*math.sin(th1))
9
     dps2 = -m*g*(10*math.sin(th0) + 12*math.sin(th2))
10
     return [dth1, dth2, dps1, dps2]
11
```

C.5 パラメトリック励振

11.4節のパラメトリック励振のコードを示す.

```
1 def parametric(t, state, omega0, T, p):
2 th, ps = state
3 dth = ps
4 dps = -th * (1 - p*math.sin(omega0 * t)) / T**2
5 return [dth, dps]
```

C.6 2重ふりこ

12.3.1 項で導いた、2 重ふりこの運動方程式のコードを示す.

Listing C.4 2 重ふりこ

```
1 def double_pendulum(t, state, mu, lda):
    th1, th2, ps1, ps2 = state
2
    th12 = th1 - th2
3
    det = (lda**2)*(mu + math.sin(th12)**2)
4
    dth1 = (ps1 - lda*math.cos(th12)*ps2) / det
5
    dth2 = (-lda*math.cos(th12)*ps1 + (mu + 1)*(lda**2)*ps2) / det
6
    dps1 = -lda*dth1*dth2*math.sin(th12) - lda*(mu + 1)*math.sin(th1)
7
    dps2 = lda*dth1*dth2*math.sin(th12) - math.sin(th2)
8
    return [dth1, dth2, dps1, dps2]
9
```

参考文献

- [1] 北野正雄: 力学講義ノート 基礎から解析力学入門へ (サイエンス社, 2024).
- [2] https://www.bipm.org/en/measurement-units
- [3] A. Thompson and B. N. Taylor: NIST Guide to the SI, Chap. 7
- [4] 佐藤 文隆, 北野 正雄: 新 SI 単位と電磁気学 (岩波書店, 2018).
- [5] 佐々田 博之: 物理教育 70, 177 (2022).
- [6] 高橋 秀俊: 数理と現象 (岩波書店, 1975).
- [7] 谷村 省吾: 幾何学から物理学へ (サイエンス社, 2020).
- [8] G. Weinreich: Geometrical Vectors (The University of Chicago Press, 1998).
- [9] J.A. Schouten: Tensor Analysis for Physicists, 2nd ed. (Dover, 1989).
- [10] C.V. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler: Gravitation (Freeman and Co., 1973).
- [11] https://www.python.org/
- [12] https://scipy.org/
- [13] https://matplotlib.org/