

11.5.2 LEXP ≠ NLEXP 予想 この項を追加（1 ページ増）

これまで、決定性と非決定性の能力の違いに関して未解決の重要なものとして $L \neq NL$ 予想 ($DSPACE(\log n) \subsetneq NSPACE(\log n)?$), LBA 問題 ($DSPACE(n) \subsetneq NSPACE(n)?$), $P \neq NP$ 予想 ($P \subsetneq NP?$) について述べてきたが、これらより上位の指数関数時間で解ける問題のクラスについても同様な予想がある：

LEXP ≠ NLEXP 予想: $LEXP \subsetneq NLEXP?$

ただし、

$$LEXP := \bigcup_{k \geq 0} DTIME(2^{kn}), \quad NLEXP := \bigcup_{k \geq 0} NTIME(2^{kn})$$

である。

因みに、対角線論法によって $P \subsetneq LEXP$, $NP \subsetneq NLEXP$ や $LEXP \subsetneq EXP$, $NLEXP \subsetneq NEXP$ であることが証明できる。また、任意の $k \geq 0$ に対して、 $\Sigma_k^P \subseteq LEXP$ が成り立つ。

問 11.8. これらのことを証明せよ。

さて、 $EXP \neq NEXP$ 予想 ($EXP \neq NEXP \implies P \neq NP$: 問 6.9 参照) と同様に、この予想も $P \neq NP$ 予想と深い関係がある：

定理 11.6.^{†10} $LEXP \neq NLEXP \implies P \neq NP$.

証明 $EXP \neq NEXP$ 予想は詰め込み論法で証明できるが、 $LEXP \neq NLEXP$ 予想は次の補題に基づいて証明できる。□

補題 11.3. $LEXP \neq NLEXP$ である必要十分条件は $NP - P$ に属すタリー言語が存在することである。

証明の概略 $L \in NLEXP - LEXP$ を $\{0, 1\}$ 上の言語とする。2 進数を 1 進数 (タリー表現) へ変換する関数 (全射) を $u : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0\}^*$ とし、 u の逆関数を $b : \{0\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ とする。 u と b のペアで 2 進アルファベットと 1 進アルファベットの間の全単射が得られ、 $|x| \leq \lceil \log u(x) \rceil$, $|z| < 2^{b(z)+1}$ とできる。 L に対応するタリー言語を $U_L := \{u(x) \mid x \in L\}$ とすると、 $U_L \in NP - P$ であることを示すことができる。

逆に、 $U \in NP - P$ をタリー言語とすると、 U_L に対応する 2 進言語 $L_U := \{z \mid z \in U\}$ が $NLEXP - LEXP$ であることを示すことができる。□

問 11.9. 補題 11.3 の証明における $U_L \in NP - P$ と $L_U \in NLEXP - LEXP$ を示せ。

11.5.3 正規表現

Σ を有限アルファベットとする。 Σ 上の正規表現 (正則表現ともいう, regular expression) と、正規表現 R が表す言語 $\|R\|$ を次のように再帰的に定義する^{†11}：

^{†10} J.Hartmanis, N.Immerman and W.Sewelson, Sparse sets in NP-P : EXPTIME versus NEXPTIME, *Inform. Control* 65, pp.158–181, 1985.

^{†11} 検索や置換などを行なう各種の処理系 (UNIX, AWK などのコマンド (grep など) におけるオペランドの表し方など) で使われている正規表現もここで述べるものと本質的に同じものであるが、構文 (表記の仕方) などが大幅に拡張されたものが使われている。