コラム：平行六面体の符号付き体積

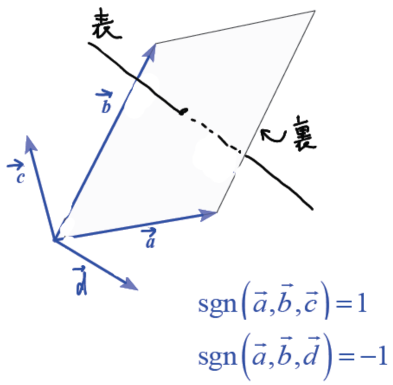
同一平面上にない 3 つのベクトルの組$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$に対し，**符号**$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$を，$\vec{c}$の先の方から$\vec{a},\vec{b}$を含む平面を見たとき，

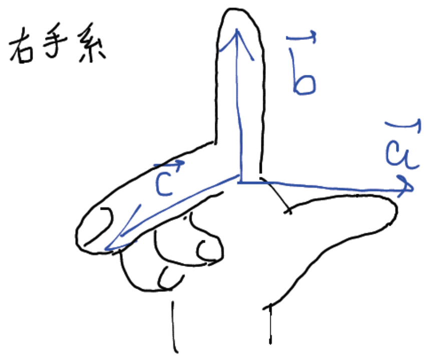
$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b}) = +1$のとき$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = +1$,

$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b}) = -1$のとき$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -1$

と定める． $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$が同一平面上にある場合は$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$とする．

つまり，右手において$\vec{a}$を親指，$\vec{b}$を人差し指とするとき，$\vec{c}$が中指の方向なら$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = +1$，反対方向なら$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -1$とする．$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = +1$のとき$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$は**右手系をなす**という（$\mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -1$のときは左手系）．





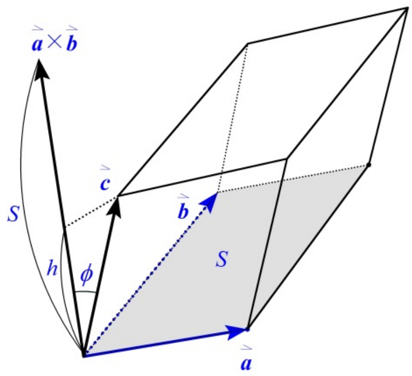
3 つの空間ベクトルの組$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$に対し，集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} \,\middle|\, 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, 0 \le \gamma \le 1 \right\}$$

を$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$によりはられる**平行六面体**という．また，平行六面体の体積をVとするとき，**符号付き体積**$V_{\pm}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$を

$$V_{\pm}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \mathrm{sgn}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,V$$

と定める．



定義より，次が成り立つ．

(1) $V_{\pm}\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)=1$

（但し，$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$は空間の基本ベクトル）

(2) $\vec{a},\vec{b}$ または $\vec{c}$ が零ベクトルならば，$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ のうち 2 つのベクトルが等しければ，$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

(4) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ のうち 2 つを交換すると $V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$の符号が変わる．

また，空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ によりはられる平行四辺形の面積 S とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は，$\vec{a},\vec{b}$ の両方に垂直な大きさが S のベクトルで，さらに，$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ が右手系となるように向きが定められているから（コラム:空間ベクトルの外積参照）

(5) $V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\phi=\pm S\cdot h=\pm V$

（但し，$\vec{a},\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積を S，ベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$ とベクトル $\vec{c}$ のなす角を ϕ，さらに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない場合，$\vec{a},\vec{b}$ によりはられる平行四辺形を底面としたときの $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ によりはられる平行六面体の高さを h とする．（上図））

さらに，(4)，(5)より次の 2 つの性質が成り立つこともわかる．

(6) $\vec{a},\vec{b}$ または $\vec{c}$ を α 倍すると符号付き体積は α 倍される．

例：$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c}\right)=\alpha V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$

(7) $\vec{a},\vec{b}$ または $\vec{c}$ が 2 つのベクトルの和に分解されるとき，符号付き体積を 2 つの符号付き体積の和に分けることができる．

例：$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1+\vec{c}_2\right)=V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1\right)+V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_2\right)$

平行六面体の符号付き体積についても，平行四辺形の符号付き面積と同様の議論により，

$$V_{\pm}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

実際に，$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=V_{\pm}\left(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,\ b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,\ c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3\right)$

$$\underset{(6),(7)\text{より}}{=} a_1V_{\pm}\left(\vec{e}_1,\ b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,\ c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3\right)$$
$$+a_2V_{\pm}\left(\vec{e}_2,\ b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,\ c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3\right)$$
$$+a_3V_{\pm}\left(\vec{e}_3,\ b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,\ c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3\right)$$
$$\cdots \underset{(3),(6),(7)\text{より}}{=} a_1b_2c_3V_{\pm}\left(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right)+a_1b_3c_2V_{\pm}\left(\vec{e}_1,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_2\right)$$
$$+a_2b_1c_3V_{\pm}\left(\vec{e}_2,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_3\right)+a_2b_3c_1V_{\pm}\left(\vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_1\right)$$
$$+a_3b_1c_2V_{\pm}\left(\vec{e}_3,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_1\right)+a_3b_2c_1V_{\pm}\left(\vec{e}_3,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_1\right)$$
$$\cdots \underset{(1),\ (4)\text{より}}{=} a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right).$$

したがって

$$\mathrm{V}=\left|\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\right|$$

が成り立つことが分かる．

例　$\vec{a}={}^t\left(-1,2,1\right),\ \vec{b}={}^t\left(2,0,1\right),\ \vec{c}={}^t\left(3,-2,1\right)$ のとき，

$$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}-1&2&3\\2&0&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=-4$$

したがって，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ によりはられる平行六面体の体積は 4 である．　□