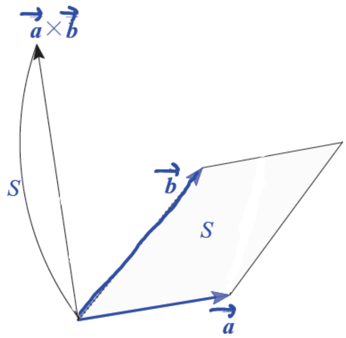
コラム：空間ベクトルの外積

空間ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対して，$\vec{a},\vec{b}$ によりはられる平行四辺形の面積を S とするとき，**外積** $\vec{a}\times\vec{b}$ を次のように定義する．

ｉ）$\vec{a},\vec{b}$ が平行でないとき：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a},\vec{b}$ の両方に垂直で大きさが S のベクトル．

（ただし，$\vec{a}\times\vec{b}$ の方向は $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ が右手系となるように定める．）

ⅱ）$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行な場合（零ベクトルの場合も含む）：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$



空間ベクトルの外積（がいせき）は「平行六面体の符号付き体積」と密接な関係がある．実際に，

$V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$ ･･･（※）（コラム：平行六面体の符号付き体積参照）が成り立つ．

このことを利用して，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ のとき外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の成分を求めてみよう．

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を空間の基本ベクトルとすると，

$$\vec{a}\times\vec{b}={}^t\left(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{e}_1,\ \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{e}_2,\ \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{e}_3\right)\underset{(※)より}{=}{}^t\left(V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_1\right),V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_2\right),V_{\pm}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_3\right)\right)$$

$$\underset{\substack{\text{コラム}\\\text{平行六面体}\\\text{の符号付き}\\\text{体積参照}}}{=}{}^t\left(\begin{vmatrix}a_1&b_1&1\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&1\\a_3&b_3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&1\end{vmatrix}\right)={}^t\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)$$

$$={}^t\left(\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right).$$

以上より

$$\vec{a}\times\vec{b}= {}^t(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1) = {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

となる.

注意　転置しても行列式の値は変わらないから, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 等が成り立つ.

したがって, $\vec{a}\times\vec{b} = {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) = {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right)$.

例題　$\vec{a} = {}^t(-1,2,1), \vec{b} = {}^t(2,0,1)$ のとき, 外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ.

【解答】　$\vec{a}\times\vec{b} = {}^t\left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = {}^t(2, 3, -4)$ □

問　$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c}, \vec{d}$ を 3 次列ベクトルとするとき, 次を示せ. 但し,

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は基本ベクトルとする.

(1)　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$　　(2)　$\vec{e}_i\times(\vec{a}\times\vec{b}) = b_i\vec{a} - a_i\vec{b}\ (i=1,2,3)$

(3)　$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$　　(3′)　$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

(4)　$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}$　　(5)　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \det\begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{pmatrix}$

(6)　$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \det(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{b} - \det(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})\vec{a} = \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c} - \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{d}$

(7)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $|\vec{b}| = 1$ のとき,　$\vec{a} + (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b} = \vec{0}$,　$\vec{a}\cdot\vec{c} + (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

(8) $\det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 1$　のとき, $\vec{d} = \det(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c})\vec{a} + \det(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c})\vec{b} + \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})\vec{c}$.

【解答】

(1) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=-\det\left(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}\right)=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

(2) $i=1$のときのみ示す．（$i=2,3$の場合も同様に示せる.）

$$\vec{e}_1\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)={}^t(1,0,0)\times{}^t\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(0,-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\right),$$

$$={}^t\left(0,\, b_1a_2-a_1b_2, b_1a_3-a_1b_3\right)=b_1\vec{a}-a_1\vec{b}\,.$$

(3) $\vec{e}_i\cdot\left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right\}\underset{(1)より}{=}\left\{\vec{e}_i\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\}\cdot\vec{c}\underset{(2)より}{=}\left(b_i\vec{a}-a_i\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)b_i-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)a_i\ (i=1,2,3)$

したがって, 両辺の対応する成分が等しいので， $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$.

(3′) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}\underset{(3)より}{=}-\left\{\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right\}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

(4) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\times\vec{b}\underset{(3),(3')より}{=}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$

$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\underset{(3)より}{=}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

(5) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\underset{(1)より}{=}\left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right\}\cdot\vec{d}\underset{(3)より}{=}\left\{\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\right\}\cdot\vec{d}=\det\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{pmatrix}$.

(6) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\underset{(3)より}{=}\left\{\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right\}\vec{b}-\left\{\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right\}\vec{a}\underset{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\text{etc.}}{=}\det\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{b}-\det\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{a}$.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\underset{(3')より}{=}\left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{d}\right\}\vec{c}-\left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right\}\vec{d}\underset{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\text{etc.}}{=}\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\right)\vec{c}-\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\vec{d}$.

(7) $\vec{a}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}\underset{(3)より}{=}\vec{a}+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}=\vec{a}+0\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2\vec{a}=\vec{a}-1\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

$\vec{a}\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\underset{(5)より}{=}\vec{a}\cdot\vec{c}+\det\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\det\begin{pmatrix}0 & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ 1 & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=0$.

(8) (6)より $\det\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{b}-\det\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{a}=\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\right)\vec{c}-\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\vec{d}$ だから,

$\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=1$に注意すると,

$\vec{d}=\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\vec{d}=\det\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{a}-\det\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)\vec{b}+\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\right)\vec{c}$.

ここで, $\det\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)=-\det\left(\vec{b}\,\vec{d}\,\vec{c}\right)=\det\left(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$, $-\det\left(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}\right)=\det\left(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c}\right)$に注意すると,

$\vec{d}=\det\left(\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\vec{a}+\det\left(\vec{a}\,\vec{d}\,\vec{c}\right)\vec{b}+\det\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\right)\vec{c}$ を得る.