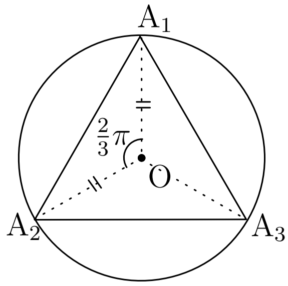
# 1 章 C 発展問題詳解

$\boxed{\textbf{86}}$ 円 $C$ の半径を $r>0$ とおくと $|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|=r$ $(k=1,2,3)$ である．
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}|=r$ となる．これより，両辺を 2 乗して

$$
\begin{aligned}
& |\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}|^2=r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & |\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}|^2=r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 2|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}||\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}|\cos(\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2)=-r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \cos(\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$




ゆえに，$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2=\dfrac{2}{3}\pi$ となる．同様にして，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{OA}_3=\dfrac{2}{3}\pi$ が示せ，$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2=\angle \mathrm{A}_2\mathrm{OA}_3=\angle \mathrm{A}_3\mathrm{OA}_1=\dfrac{2}{3}\pi$ となる．この結果，$\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$，$\triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$，$\triangle \mathrm{OA}_3\mathrm{A}_1$ はいずれも底角が $\dfrac{\pi}{6}$ の 2 等辺三角形なので $A_1=A_2=A_3=\dfrac{\pi}{3}$ となる．以上より，$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ は正三角形である． $\square$

(2) 4 点 $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_4$ の円周上での並び方の総数は $(4-1)!=6$ 通りあることに注意する．まず，条件式から $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}|^2=|-\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}|^2$$

ここで，円の半径を $r$ とおいて整理すると $|\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}|=r$ $(k=1,2,3,4)$ より

$$
\begin{aligned}
& |\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=-r^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}|^2=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3})+\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3})=0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3})=0 \quad \cdots \quad (*)
\end{aligned}
$$

このとき，$(*)$ より以下の 3 つの場合が考えられる．

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\vec{0} & \cdots \quad ① \\
\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\vec{0} & \cdots \quad ② \\
(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2})\perp(\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}) & \cdots \quad ③
\end{cases}
$$

① のとき，条件式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=\overrightarrow{0} \quad \cdots \quad ①'$$

この結果，① と ①′ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_2}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$$

となる．よって，$\mathrm{A_1}$，O，$\mathrm{A_2}$ および $\mathrm{A_3}$，O，$\mathrm{A_4}$ は同一直線上に並ぶので対角線の長さが等しく，それぞれが中点で交わることになる．よって，4 点は長方形の頂点となる．

② のとき，条件式から

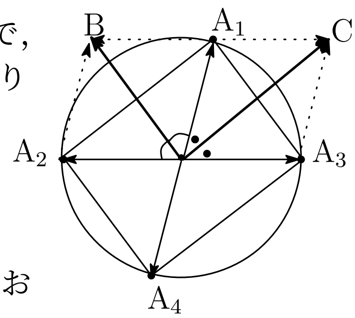
$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=\overrightarrow{0} \quad \cdots \quad ②'$$

が得られる．ゆえに，② と ②′ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_3}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$$

となる．よって，$\mathrm{A_1}$，O，$\mathrm{A_3}$ および $\mathrm{A_2}$，O，$\mathrm{A_4}$ は同一直線上に並ぶので ① のときと同様に 4 点は長方形の頂点となる．

③ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと (③ より) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である．ここで，$\triangle\mathrm{OA_1B}\equiv\triangle\mathrm{OA_2B}$ かつ $\triangle\mathrm{OA_1C}\equiv\triangle\mathrm{OA_3C}$ より




$$\begin{cases}\angle\mathrm{A_1OB}=\angle\mathrm{A_2OB}\\ \angle\mathrm{A_1OC}=\angle\mathrm{A_3OC}\end{cases}$$

である．これより，$\angle\mathrm{A_1OB}=\alpha$，$\angle\mathrm{A_1OC}=\beta$ とおくと

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\quad(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}})\quad\cdots\cdots\quad ④$$

ここで

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{A_2OA_3}&=\angle\mathrm{A_2OA_1}+\angle\mathrm{A_3OA_1}\\&=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=\pi\quad(\because\ ④)\end{aligned}$$

ゆえに，線分 $\mathrm{A_2A_3}$ は円 $C$ の直径となり

$$\angle\mathrm{A_2A_1A_3}=\angle\mathrm{A_2A_4A_3}=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots\quad ⑤$$

次に，条件式から $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$ と ③ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_4}})\perp(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_1}})\quad\cdots\cdots\quad ⑥$$

このとき，上の議論と同様に，線分 $\mathrm{A_4A_1}$ は円 $C$ の直径となり

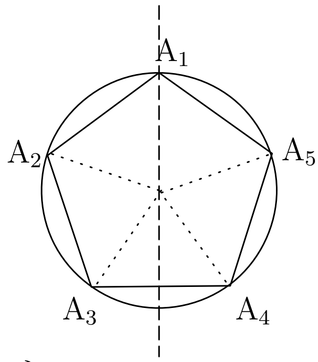
$$\angle\mathrm{A_4A_3A_1}=\angle\mathrm{A_4A_2A_1}=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots\quad ⑦$$

⑤，⑦ より，4 点 $A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$ を頂点に持つ四角形は長方形であることが示せた． □

(3) 正 5 角形は直線 $OA_1$ に関して対称であるから

$$\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}=k\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=l\overrightarrow{OA_1}$$

となる実数 $k$，$l$ が取れる．これより




$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}\\=&\overrightarrow{OA_1}+(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5})+(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})\\=&\overrightarrow{OA_1}+k\overrightarrow{OA_1}+l\overrightarrow{OA_1}\\=&(1+k+l)\overrightarrow{OA_1}=a\overrightarrow{OA_1}\quad(a=1+k+l)\quad\cdots\quad ①\end{aligned}$$

同様に，正 5 角形は直線 $OA_2$ に関しても対称であるから

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=b\overrightarrow{OA_2}\quad\cdots\quad ②$$

となる実数 $b$ が取れる．①，② より

$$a\overrightarrow{OA_1}=b\overrightarrow{OA_2}$$

ここで，$a\neq 0$ と仮定すると

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{b}{a}\overrightarrow{OA_2}$$

となり，O，$A_1$，$A_2$ が一直線上にあることになり矛盾する．よって，$a=0$ である．以上より，

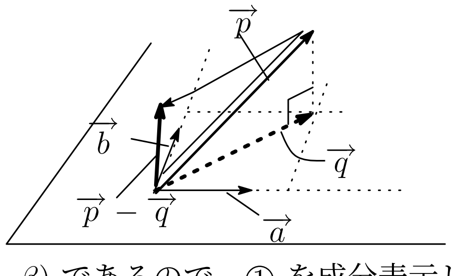
$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{0}$$

□

**87** (1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ とかけるので，

$$(x,y,z)=s(1,-1,1)+t(2,1,-1)$$

(2) $\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}$ は $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に垂直なので




$$(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q})\cdot\overrightarrow{a}=0\quad\cdots\quad ①$$

$$(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q})\cdot\overrightarrow{b}=0\quad\cdots\quad ②$$

$\overrightarrow{q}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}=(\alpha+2\beta,-\alpha+\beta,\alpha-\beta)$ であるので，① を成分表示して整理すると

$$4-3\alpha=0\quad\cdots\quad ③$$

同様に，② を成分表示して整理すると

$$5 - 6\beta = 0 \quad \cdots \quad ④$$

となる．③，④ より $\alpha = \dfrac{4}{3}$, $\beta = \dfrac{5}{6}$ □

**別解**. (2) の平面の法線ベクトルを $\overrightarrow{c} = (l, m, n)$ とおくと $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$ より $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 0$, $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$ となるので

$$\begin{cases} l - m + n = 0 \quad \cdots\cdots \quad ① \\ 2l + m - n = 0 \quad \cdots\cdots \quad ② \end{cases}$$

① + ② より $3l = 0$ となり，$l = 0$ である．よって，② より，$m = n$ となる．これより，$\overrightarrow{c} = (0, m, m) = m(0, 1, 1)$ とかける．$\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$ より，法線ベクトルの一つは $(0, 1, 1)$ であり，平面の方程式は $y + z = 0$ となる．問 1.84 (1) の結果より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q} &= \overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|^2} \overrightarrow{c} \\ &= (3, 1, 2) - \frac{3}{2}(0, 1, 1) = \frac{1}{2}(6, -1, 1) \end{aligned}$$

ここで，条件より

$$\frac{1}{2}(6, -1, 1) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(2, 1, -1) = (\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, \alpha - \beta)$$

となるように $\alpha$，$\beta$ を定めればよい．これより，連立方程式

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ -\alpha + \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

を解くと，$\alpha = \dfrac{4}{3}$，$\beta = \dfrac{5}{6}$ □

$\boxed{88}$ (1) 平面 $\alpha$ の方程式は

$$2x + 2y + z - t = 0$$

であり，球面 $S$ の方程式は

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$$

より，中心 $(3, 2, 1)$，半径 5 の球である．

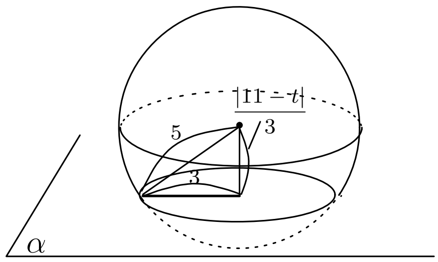
ゆえに，球面 $S$ の中心から平面 $\alpha$ 間での距離 $d$ は

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 - t|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|11 - t|}{3} \quad □$$

(2) 球面 $S$ と平面 $\alpha$ が交わってできた円の半径は条件より 3 である．よって，三平方の定理から

$$5^2 = 3^2 + \left(\frac{|11-t|}{3}\right)^2$$

これを整理して




$$\begin{aligned}(11-t)^2 &= 9 \cdot 16 = 3^2 \cdot 4^2 = (12)^2 \\ 11 - t &= \pm 12 \\ -t &= -11 \pm 12 \\ t &= -1,\ 23\end{aligned}$$

□

$\boxed{\mathbf{89}}$ (1)

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 & \cdots \quad ① \\ x - y + 2z - 4 = 0 & \cdots \quad ② \end{cases}$$

について，① − ② より，$3y - 3z = 0$ となる．ここで，$z = t$ とおくと $y = t$，① より，$x = 4 - t$ となる．以上より，求める交線の方程式の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

媒介変数を消去すると交線の方程式は $\dfrac{x-4}{-1} = y = z$ □

(2) 交線の方程式は，点 $(4, 0, 0)$，$(3, 1, 1)$ を通る．これより，3 点 $\mathrm{A}(4, 0, 0)$，$\mathrm{B}(3, 1, 1)$，$\mathrm{C}(0, 1, 0)$ を通る平面の方程式を求めればよい．求める平面の法線ベクトルを $\overrightarrow{c} = (l, m, n)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, 1, 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-4, 1, 0)$ と直交するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{c} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{c} = 0$$

より

$$\begin{cases} -l + m + n = 0 & \cdots \quad ① \\ -4l + m = 0 & \cdots \quad ② \end{cases}$$

② から $m = 4l$ となる．これを ① に代入して，$3l + n = 0$ となり $n = -3l$ である．よって，法線ベクトルは

$$\overrightarrow{c} = (l, 4l, -3l) = l(1, 4, -3) \qquad (l \neq 0)$$

これより，法線ベクトルの一つが $(1, 4, -3)$ で 点 $(4, 0, 0)$ を通る平面の方程式を求めればよい．ゆえに求める平面の方程式は

$$x + 4y - 3z - 4 = 0$$

□

**別解**. (2) 交線を含む平面の方程式はある定数 $k$ を用いて,

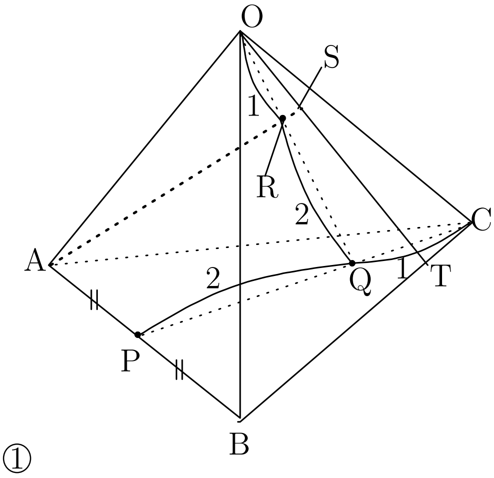
$$(x+2y-z-4)+k(x-y+2z-4)=0 \quad \cdots \quad ①$$

とかける．条件から点 $(0,1,0)$ を通るので ① に代入して $k=-\dfrac{2}{5}$ となる．

これを ① に代入して整理すれば $x+4y-3z-4=0$ □

$\boxed{\mathbf{90}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とおく．このとき,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{3}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{3}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}-9\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{9}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}-9\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{9}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\frac{-17\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{18}\\
&=\frac{(18-17k)\vec{a}+k\vec{b}+4k\vec{c}}{18} \quad \cdots \quad ①
\end{aligned}$$




一方，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ の形で表せ，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立であることと ① より，$18-17k=0$ となり，$k=\dfrac{18}{17}$ である．ゆえに,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{17}\vec{b}+\frac{4}{17}\vec{c}$$

□

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=l\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ $(l>1)$ とおき，T は線分 BC を $m:1-m$ $(0<m<1)$ の比に内分しているとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=l\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-m)\vec{b}+m\vec{c}$$

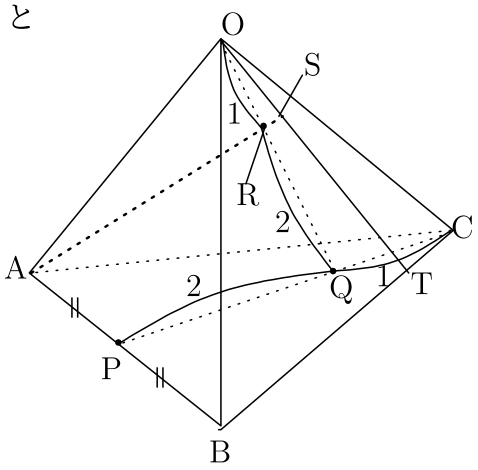
(1) の結果,

$$l\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{l}{17}\vec{b}+\frac{4}{17}l\vec{c}=(1-m)\vec{b}+m\vec{c}$$

となるので,

$$\begin{cases}\dfrac{l}{17}=1-m\\[2mm] \dfrac{4}{17}l=m\end{cases}$$

これを解くと，$m = \dfrac{4}{5}$，$l = \dfrac{17}{5}$ である．
ここで，$\triangle$ABC の面積を $s$ とおくと
$\triangle$BCP の面積 $s_1$ は




$$s_1 = \frac{1}{2}s$$

$\triangle$CPT の面積 $s_2$ は

$$s_2 = (1-m)s_1 = \frac{1-m}{2}s = \frac{1}{10}s$$

$\triangle$PQT の面積 $s_3$ は

$$s_3 = \frac{2}{3}s_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}s = \frac{1}{15}s$$

次に，$|\overrightarrow{\mathrm{OT}}| : |\overrightarrow{\mathrm{ST}}| = l : l-1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{ST}}| = \frac{l-1}{l}|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|$$

ここで，四面体 OABC の $\triangle$ABC を底面としたときの高さを $h_1$, 四面体 PQST の $\triangle$PQT を底面としたときの高さを $h_2$ とおくと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OT}}| : |\overrightarrow{\mathrm{ST}}| = h_1 : h_2$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} V_1 : V_2 &= s\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OT}}| : s_3\cdot|\overrightarrow{\mathrm{ST}}| \\ &= s\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OT}}| : \frac{1}{15}s\cdot\frac{l-1}{l}|\overrightarrow{\mathrm{OT}}| \\ &= 1 : \frac{1}{15}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{12}{5} = 1 : \frac{4}{85} \end{aligned}$$

以上より，$V_1 : V_2 = 85 : 4$ □

**91** (1) 3 点 A，B，C を含む平面の法線ベクトルを $\overrightarrow{c} = (l, m, n)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, 2, 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3, -1, 2)$ と直交するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{c} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{c} = 0$$

より

$$\begin{cases} l + 2m + n = 0 & \cdots \quad ① \\ -3l - m + 2n = 0 & \cdots \quad ② \end{cases}$$

①＋②$\times 2$ から $-5l + 5n = 0$ となり，$n = l$，これを ① に代入して，$m = -l$ である．よって，法線ベクトルは

$$\overrightarrow{c} = (l, -l, l) = l(1, -1, 1) \ (l \neq 0)$$

これより，法線ベクトルの一つは $\overrightarrow{c} = (1, -1, 1)$ である．点 $\mathrm{A}(1, 1, 1)$ を通ることから求める平面の方程式は

$$x - 1 - (y - 1) + z - 1 = 0$$

これを整理して，$x - y + z - 1 = 0$ □

(2) 求める直線の方向ベクトルの一つは $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$ であり，点 $\mathrm{D}(0, 2, 5)$ を通るので，求める直線の方程式は

$$x = \frac{y-2}{-1} = z - 5 \qquad \square$$

(3) 求める距離を $d$ とおくと

$$d = \frac{|0 - 2 + 5 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(4) $\triangle$ABC の面積を $S$ とおくと

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin(\angle\mathrm{BAC}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1 - \cos^2(\angle\mathrm{BAC})} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(1 - \cos^2(\angle\mathrm{BAC}))} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\left(1 - \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 14 - 9} = \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

(5) 四面体 ABCD の体積を $V$ とおくと

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{3} \qquad \square$$

$\boxed{\textbf{92}}$ $2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ より，

$$\overrightarrow{c} = -2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \quad \cdots \quad ①$$

さらに，条件より $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})|\overrightarrow{a}|$ なので ① より，

$$|2(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})| = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})|\overrightarrow{a}| \quad \cdots \quad ②$$

② の両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned} 4(|\overrightarrow{a}|^2 + 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2) &= 2(1+\sqrt{3})^2|\overrightarrow{a}|^2 \\ &= 2(4+2\sqrt{3})|\overrightarrow{a}|^2 \quad \cdots \quad ③ \end{aligned}$$

ここで，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$ であるので ③ を整理して

$$\begin{aligned} 8|\overrightarrow{a}|^2 + 8\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= 8|\overrightarrow{a}|^2 + 4\sqrt{3}|\overrightarrow{a}|^2 \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{a}|^2 \quad \cdots \quad ④ \end{aligned}$$

さらに，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta = |\overrightarrow{a}|^2\cos\theta$ であるここと ④ から

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるので $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ □