$\boxed{54}$　(1)　$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　とおくと

$$AX=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} -a+2c=0, & -b+2d=0 \\ 3a-6c=0, & 3b-6d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases}$$

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$　（$c,\ d$ は任意）

(2)　(1)と $AX\neq O$　より

$$XA=\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -2c+6d & 4c-12d \\ -c+3d & 2c-6d \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow(c-3d)\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow c-3d\neq 0$$

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$　（$c,\ d$ は任意，但し $c\neq 3d$）

(3)　ハミルトン-ケーリーの定理より，　$A^2+7A=O$　が成り立つから，

$A^2=-7A$ である．これを　条件式　$A^2+xA+yE=O$　に代入すると

$$(x-7)A+yE=O$$

が成り立つ．

(Ⅰ)　$x-7\neq 0$　のとき，　$A=\dfrac{-y}{x-7}E$　となり，不適．

(Ⅱ)　$x-7=0\Leftrightarrow x=7$ のとき，　$y=0$

（Ⅰ），（Ⅱ）より　$x=7,\ y=0$

(4)　行列 $A,\ E$ は可換だから，整式と同様に取り扱える．（例題 2.2 補足参照）

$A^2+7A=O$　だから

$$A^4+2A^3-32A^2+14A+5E=(A^2+7A)(A^2-5A+3E)-7A+5E=-7A+5E$$

$$\therefore(\text{与式})=-7A+5E=\begin{pmatrix} 12 & -14 \\ -21 & 47 \end{pmatrix}$$

$\boxed{55}$　掃き出し法を用いる．各行を①，②，③とし，行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \xrightarrow{③-②\times x \neq 0} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & -x & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②-①\times x \neq 0} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1-x & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & -x & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②-③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & -x & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③\div(1-x)\neq 0]{②\div(-x)\neq 0} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -\dfrac{x}{x-1} & \dfrac{1}{x-1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\dfrac{x+1}{x} & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{x}{x-1} & \dfrac{1}{1-x} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{x(x-1)} & \dfrac{1}{x(x-1)} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\dfrac{x+1}{x} & \dfrac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{x}{x-1} & \dfrac{1}{1-x} \end{array}\right)$$

したがって， $x \neq 0,\ x \neq 1$ のとき，逆行列が存在する．このとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x(x-1)}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ x(x-1) & -(x+1)(x-1) & x-1 \\ 0 & x^2 & -x \end{pmatrix}$$

$\boxed{5\ 6}$ （1）行列 A の各行を①，②，③，④として，行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}①\\②\\③\\④\end{matrix} \xrightarrow{①に②，③，④をたす} \begin{pmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots（ア）$$

$$\xrightarrow{①\div(a+3)\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{②-①\\③-①\\④-①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots（イ）$$

$$\xrightarrow{\substack{②\div(a-1)\neq 0\\③\div(a-1)\neq 0\\④\div(a-1)\neq 0}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-(②，③，④)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって，　$a \neq -3,\ 1$ のとき，　$\mathrm{rank}\, A = 4$

（ア）より，$a = -3$のとき，$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形できるから $\mathrm{rank}\, A = 3$

（イ）より，$a = 1$のとき，$\mathrm{rank}\, A = 1$

以上より，$\mathrm{rank}\, A = \begin{cases} 4 & (a \neq -3,\ 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (a = -3 \text{ のとき}) \\ 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

（2）　$AB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の行列の積の計算を実際に行い，

成分を比較すると　$ab + 3 = 1,\ \ a + b + 2 = 0$　を得る．この連立方程式を解くと，

$(a, b) = (-1 \pm \sqrt{3},\ \ -1 \mp \sqrt{3})$　(複号同順)

$\boxed{5\ 7}$ $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aE+N$ とおく．

ここで，E は 3 次単位行列，$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

$N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （$n≧3$） であるから，

$EN=NE=N$ より 2 項定理を用いると

$$A^n=(aE+N)^n=\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(aE)^{n-r}N^r={}_nC_0(aE)^n+{}_nC_1(aE)^{n-1}N+{}_nC_2(aE)^{n-2}N^2$$

$$=a^nE+na^{n-1}N+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}N^2=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{58}$ 掃き出し法で解く．与えられた連立１次方程式の拡大係数行列の各行を①，②，③とし，行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & a \end{array}\right)\begin{array}{c}①\\②\\③\end{array} \xrightarrow[③-①\times 2]{②+①} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)$$

（Ⅰ） $a-9\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 9$ のとき，解はない．

（Ⅱ） $a-9=0 \Leftrightarrow a=9$ のとき，$\begin{cases} x \quad -z+u=7 \\ -y+z \quad =5 \end{cases}$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t+7 \\ s-5 \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad (s,\ t \text{ は任意})$$

以上より，与えられた連立１次方程式が解をもつための条件は，$a=9$ であり，

このとき，一般解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t+7 \\ s-5 \\ s \\ t \end{pmatrix}$ （$s,\ t$ は任意）

$\boxed{5\ 9}$ (1) 掃き出し法により,

$$[M\,|\,I] \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\therefore M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow (M-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

この同次連立1次方程式を掃き出し法で解く.

係数行列の各行を①, ②, ③, ④とし, 行基本変形を行うと

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -6 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix} \xrightarrow[④+①]{③-①} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③+②\times 6 \\ ④-②\times 5}]{②\times\left(-\frac{1}{2}\right)\text{の後}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}s + 3t \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad (s,\ t \text{は任意})$$

$\boxed{60}$ 拡大係数行列の各行を①，②，③，④とし，行基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^3 & 1 & a & a^2 & -1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a & 1 \\ a & a^2 & a^3 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c}①\\②\\③\\④\end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{④}-\text{①}\times a]{\substack{\text{②}-\text{①}\times a^3\\ \text{③}-\text{①}\times a^2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 & 1 \\ 0 & 1-a^4 & \dfrac{a}{1-a^4} & \dfrac{a^2}{1-a^4} & -1-a^3 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & \dfrac{a}{1-a^4} & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -1-a \end{array}\right) \cdots ☆$$

$1-a^4=(1-a^2)(1+a^2)$ であるから，次のような場合分けを考える．

（Ⅰ）$1-a^4\neq 0$ つまり $a\neq\pm 1$ のとき

(係数行列の階数)＝(拡大係数行列の階数)＝４で，解が一意に決まる．

$1-a^4=0$ つまり $a=-1,\ 1$ のとき

（Ⅱ）$a=-1$ のとき ☆より $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x-y+z-w=1$ より，

無数に解があり，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_1-s_2+s_3+1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ （s_1，s_2，s_3は任意）

（Ⅲ）$a=1$ のとき ☆より $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ となり矛盾． ∴解はない．

以上より，$a=-1$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_1-s_2+s_3+1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ （s_1，s_2，s_3は任意）

$\boxed{6\ 1}$ (1) 行列 A の各行を①，②，③とし，行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 1 & 1-a & 1-2a \\ -1 & -a & -1-2a \end{pmatrix}\begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix} \xrightarrow[③+①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 0 & -1 & -2-2a \\ 0 & 2-2a & 2-2a \end{pmatrix}\cdots(ア)$$

$$\xrightarrow{③\div(2-2a)\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 0 & -1 & -2-2a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②]{③\leftrightarrow②の後} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-2a \end{pmatrix}\cdots(イ)$$

（ア）より， $2-2a=0 \Leftrightarrow a=1$ のとき， $\operatorname{rank} A=2$

（イ）より， $-1-2a=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$ のとき， $\operatorname{rank} A=2$

$a\neq 1,\ -\dfrac{1}{2}$ のとき， $\operatorname{rank} A=3$

以上より， $\operatorname{rank} A=\begin{cases} 3 & (a\neq 1,\ -\dfrac{1}{2}\ のとき) \\ 2 & (a=1\ または\ -\dfrac{1}{2}\ のとき) \end{cases}$

(2) (1)の階数から， $a=1,\ -\dfrac{1}{2}$

(3) (Ⅰ) $a=1$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix} \xrightarrow[③+①]{②-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ より $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} s+2 \\ -4s-1 \\ s \end{pmatrix}$ （s は任意）

(Ⅱ) $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2.5 & 3 & 1 \\ 1 & 1.5 & 2 & 2 \\ -1 & 0.5 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix} \xrightarrow[③+①]{②-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2.5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{③+②\times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2.5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$ より

解はない．