『微分積分 問題集』1 章 C 問題詳解

問題 1.49

証明　(1) $n=1$ のとき $a_1=1\geqq 1$ で成り立つ。$n=k$ のとき不等式が成り立つと仮定する。$a_1a_2\cdots a_{k+1}=1$ とする。一般性を失わずに $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{k+1}$ としてよい。$a_1\leqq 1\leqq a_{k+1}$ であることに注意する。$(a_1a_{k+1})a_2\cdots a_k=1$ だから帰納法の仮定により $(a_1a_{k+1})+a_2+\cdots+a_k\geqq k$ であって、

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}&=a_1+a_{k+1}-(a_1a_{k+1})+(a_1a_{k+1})+a_2+\cdots+a_k\\&\geqq a_1+a_{k+1}-(a_1a_{k+1})+k=k+1-(a_1-1)(a_{k+1}-1)\geqq k+1\,.\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ でも成り立つから、数学的帰納法により全ての自然数 n においてこの不等式は成り立つ。

　次に等号成立のときを調べる。再び一般性を失わずに $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ とし、$a_1\leqq 1\leqq a_n$ に注意する。$(a_1a_n)+a_2+\cdots+a_{n-1}\geqq n-1$ より上と同様に $n=a_1+a_2+\cdots+a_n\geqq n-(a_1-1)(a_n-1)$．よって、$a_1=1$ または $a_n=1$ であるが、$a_1a_2\cdots a_n=1$ かつ $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ だから、いずれの場合も $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ となるより他ない。//QED

(2) (1)で各 a_k を $\frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ に置き換えれば相加相乗平均の関係が成り立つ。さらに、相加相乗平均の関係において各 a_k をその逆数に置き換えれば調和相乗平均の関係が成り立つ。等号成立はいずれも $\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\cdots=\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=1$、すなわち $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る。//QED

問題1.50　(教科書の「指数・累乗・階乗」参照.)

(1) $\frac{n^3}{3^n}\to 0$ $(n\to\infty)$　(2) $\frac{3^n}{n!}\to 0$ $(n\to\infty)$　(3) $\frac{n^3}{n!}=\frac{n^3}{2^n}\frac{2^n}{n!}\to 0\times 0=0$ $(n\to\infty)$

(4) 十分大きい n に対して $\frac{n^3 2^n}{n!}<\frac{2^{2n}}{n!}=\frac{4^n}{n!}\to 0$ $(n\to\infty)$

問題1.51　(1) $n\to\infty$ のとき $\frac{2010^n}{n!}\to 0$. (教科書の「指数・累乗・階乗」参照.)

(2) $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}$ $(n\to\infty)$

問題1.52　(1) $r=\frac{1}{a}$ とおくと $r>1$ であって、$n\to\infty$ のとき $na^n=\frac{n}{r^n}\to 0$. (教科書

の「指数・累乗・階乗」参照)

(2) $S_N=\sum_{n=1}^{N} na^{n-1}$とおくと$(1-a)S_N=\sum_{n=1}^{N} a^{n-1}-Na^N=\frac{1-a^N}{1-a}-Na^N$であるから$S_N=\frac{1-a^N}{(1-a)^2}-\frac{Na^N}{1-a}$. 右辺第1項は$\frac{1}{(1-a)^2}$に収束し、右辺第2項は(2)より$N\to\infty$のとき0に収束。ゆえに、$N\to\infty$のとき$S_N\to\frac{1}{(1-a)^2}$.

問題1.53

解答　(1) 相加相乗平均の関係より$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\geqq\sqrt{3}$. $a_n=\sqrt{3}$とならないことを背理法で示す。あるnに対して$a_n=\sqrt{3}$が成り立つとする。$n=1$のとき$a_1=3\neq\sqrt{3}$より矛盾。$n\geqq 2$のとき、$a_n>0$ (n: 自然数)なることに留意しつつ、

$$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{3}{a_{n-1}}\right)\Leftrightarrow(a_{n-1}-\sqrt{3})^2=0$$

より$a_{n-1}=\sqrt{3}$. 同様にして結局$a_1=\sqrt{3}$を得るが、$a_1=3$だからこれは矛盾。

//QED

(2) 漸化式の両辺から$\sqrt{3}$を引くと、(1)より$1>\frac{\sqrt{3}}{a_n}$であることから

$$a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{a_n}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{3}\right).$$

//QED

(3) (1),(2)より

$$0<a_n-\sqrt{3}<\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\sqrt{3}\right)<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1-\sqrt{3}\right)\to 0\ (n\to\infty).$$

したがって、はさみうちの原理により$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$となる。　//QED

問題 1.54

(1) 解答　数列$\{a_n\}$が$\sqrt{3}-1$に収束することを以下に示す。

証明：　まず、$a_1>0$および$a>0\Rightarrow 0<\frac{2}{2+a}<1$より2以上の全ての自然数$n$に対し$0<a_n<1$であることに注意する。$\lambda(2+\lambda)-2=\lambda^2+2\lambda-2=0$を解くと

$\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$． $\alpha = -\sqrt{3} - 1$， $\beta = \sqrt{3} - 1$ とおく。

$$a_{n+1} = \frac{-\alpha\beta}{a_n - \alpha - \beta} \quad \therefore a_{n+1} - \beta = \frac{-\beta\left(a_n - \beta\right)}{|\alpha| + \left(a_n - \beta\right)}$$

n を2以上の自然数とすると、$0 < a_n < 1$ より $1 - \sqrt{3} < a_n - \beta < 2 - \sqrt{3}$．

$\therefore 2 < |\alpha| + \left(a_n - \beta\right) < 3$． $\therefore \frac{1}{3} < \frac{1}{|\alpha| + \left(a_n - \beta\right)} < \frac{1}{2}$． $\therefore \left|a_{n+1} - \beta\right| < \frac{\beta}{2}\left|a_n - \beta\right|$． $0 < \frac{\beta}{2} < 1$ より

$$0 \leqq \left|a_n - \beta\right| < \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-2}\left|a_2 - \beta\right| \to 0 \ (n \to \infty).$$

はさみうちの原理により $\{a_n\}$ は収束し、その極限値は $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta = \sqrt{3} - 1$.

(2) <u>解答</u>　数列 $\{a_n\}$ が $a + \sqrt{a^2 + 1}$ に収束することを以下に示す。

証明：　$(\lambda - 2a)\lambda - 1 = \lambda^2 - 2a\lambda - 1 = 0$ の 2 解は $\lambda = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$．

$\alpha = a - \sqrt{a^2 + 1}$， $\beta = a + \sqrt{a^2 + 1}$ とおく。解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2a$，$\alpha\beta = -1$． また、$a_1 = 2a > 0$ および $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = 2a + \frac{1}{a_n} > 0$ より全ての自然数 n に対し $a_n > 0$．

(I)　$a_1 = \beta$ のとき、$a_n = \beta$ ならば $a_{n+1} = 2a + \frac{1}{a_n} = \alpha + \beta + \frac{-\alpha\beta}{\beta} = \beta$ であるから、数学的帰納法により全ての自然数 n に対し $a_n = \beta$、したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$．

(II)　$a_1 \neq \beta$ のとき、

$$a_{n+1} = \alpha + \beta + \frac{-\alpha\beta}{a_n} \quad \therefore a_{n+1} - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{a_n}\right) = \alpha\frac{a_n - \beta}{a_n}$$

$b_n = \frac{1}{a_n - \beta}$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1 - \beta}$ で

$$b_{n+1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a_n}{a_n - \beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{b_n} + \beta}{\frac{1}{b_n}} = \frac{\beta b_n + 1}{\alpha}. \quad \therefore b_{n+1} - \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{\beta}{\alpha}\left(b_n - \frac{1}{\alpha - \beta}\right).$$

$$\therefore b_n - \frac{1}{\alpha - \beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\left(b_1 - \frac{1}{\alpha - \beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a_1 - \beta} - \frac{1}{\alpha - \beta}\right).$$

$\alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 + 1}$ および $\frac{\beta}{\alpha} = -\left(\sqrt{a^2 + 1} + a\right)^2$ を代入すると

$$b_n = \left\{-\left(\sqrt{a^2 + 1} + a\right)^2\right\}^{n-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}.$$

ここで、$\sqrt{a^2 + 1} + a > 1$, $\frac{-1}{\sqrt{a^2+1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} = -\frac{\sqrt{a^2+1} + a}{2\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1} - a\right)} < 0$ に注意する。

三角不等式より

$$\left|b_n\right| \geqq \left|\sqrt{a^2 + 1} + a\right|^{2n-2}\left|\frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}\right| - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}} \to +\infty$$

$$\therefore \left|a_n - \beta\right| = \frac{1}{\left|b_n\right|} \to 0. \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \beta.$$

(I), (II) あわせて、数列 $\{a_n\}$ は $\beta = \sqrt{a^2 + 1} + a$ に収束する。//QED

問題1.55

<u>証明</u>　(1) $(1 + x)^n \geqq 1 + nx > nx$. 最初の不等号は $n = 1$ のとき明らかで、$n \geqq 2$ に対しては教科書の例題1.17において数学的帰納法で示した。//QED

(2) 自然数 n に対し $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ だから、(1)において $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ とおけば $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \sqrt{n}$.

両辺の n 乗根をとれば示したい式を得る。//QED

(3) (2)の両辺を2乗すると、1より大きい数のn乗根は1より大きいこと(1より小さい数のn乗がやはり1より小さいことの対偶)とあわせて

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 1 \; (n \to \infty).$$

//QED

問題 1.56

<u>証明</u>　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$とおく。自然数$n$に対し$\frac{1}{n}$は正であるから$\{S_n\}$は単調増加数列。したがってその極限は収束するかまたは$+\infty$に発散するかのいずれかである。

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_4 - S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} \geqq 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_8 - S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4+k} \geqq 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^N} - S_{2^{N-1}} = \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \frac{1}{2^{N-1}+k} \geqq 2^{N-1} \times \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2} \; (N\text{は自然数})$$

辺々を足し合わせると、任意の自然数Nに対し

$$S_{2^N} - 1 \geqq \frac{N}{2} \qquad \therefore\; S_{2^N} \geqq \frac{N}{2} + 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$がある実数$S$に収束すると仮定するとすると、$N > 2S$なる$N$に対し

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = S_{2^N} \geqq \frac{N}{2} + 1 > S + 1$$

これは矛盾。ゆえに$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$は収束せず、したがって$+\infty$に発散する。//QED

問題 1.57

<u>証明</u>　(I)　$x = 0$のとき、$1^n = 1$より明らか。

(II)　$x > 0$のとき、問題1.33(1)より

$$(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right) \geqq 1+\left(x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n}\right)=1+x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

前問の結果より、$n\to\infty$のとき右辺は$+\infty$に発散し、したがって左辺も$+\infty$に発散する。

（III）$x<0$のとき、問題 1.33(2)より$N>|x|$なる任意の自然数Nに対し、

$$\left(1-\frac{|x|}{N}\right)\left(1-\frac{|x|}{N+1}\right)\cdots\left(1-\frac{|x|}{N+n}\right)<\frac{1}{1+\left(\frac{|x|}{N}+\frac{|x|}{N+1}+\cdots+\frac{|x|}{N+n}\right)}=\frac{1}{1+|x|\sum_{k=N}^{N+n}\frac{1}{k}}$$

左辺は有限個の正の数の積だからやはり正である。一方、前問の結果より、$n\to\infty$のとき右辺の分母は$+\infty$に発散し、したがって右辺は0に収束する。両辺に$(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{N-1}\right)$をかけてもやはり$0$に収束する。//QED