

## 2 章 問題 C 解答

71  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + a - \sqrt{x^2 + x + 1}) = 1$  について,

$$\begin{aligned} x + a - \sqrt{x^2 + x + 1} &\times \frac{x + a + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + a + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{(x + a)^2 - (x^2 + x + 1)}{x + a + \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{x(2a - 1) + a^2 - 1}{x + a + \sqrt{x^2 + x + 1}} \times \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{(2a - 1) + \frac{a^2 - 1}{x}}{1 + \frac{a}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$  のとき  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 2$  であるから,

極限の性質より  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (2a - 1) + \frac{a^2 - 1}{x} \right) = 2$

したがって,  $2a - 1 = 2 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$

$$\boxed{72} \quad (1) \quad y' = (x)'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$(2) \quad y' = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)'}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \left( \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x+1 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(3) \quad y = x^{x^x} \quad \text{両辺の自然対数をとると} \quad \log y = \log x^{x^x} = x^x \log x$$

両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{y'}{y} = (x^x)' \log x + x^x (\log x)'$$

$$= x^x (\log x + 1) \log x + x^x \frac{1}{x} = x^{x-1} \{ x(\log x)^2 + x \log x + 1 \}$$

$$\therefore y' = x^{x^x+x-1} \{ x(\log x)^2 + x \log x + 1 \}$$

補足  $(x^x)'$  について :

$$f(x) = x^x \quad \text{の両辺の自然対数をとると} \quad \log f(x) = \log x^x = x \log x$$

$$\text{両辺を } x \text{ で微分すると} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1$$

$$\therefore f'(x) = x^x (\log x + 1)$$

$$(4) \quad t = \frac{1}{2x^2+1} \quad \text{とおくと} \quad y = \sin^{-1} t$$

合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2x^2+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)^2}} \frac{-4x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^4+4x^2}{(2x^2+1)^2}}} \frac{-4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{x^2+1}(2x^2+1)} \\ \therefore y' &= -\frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \quad (x \geq 0) \\ y' &= \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \quad (x < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= \frac{(\cos^2 x)'(2x+1)^2 - \cos^2 x \cdot \{(2x+1)^2\}'}{(2x+1)^4} \\ &= \frac{-2 \sin x \cos x (2x+1)^2 - \cos^2 x \cdot 2(2x+1) \cdot 2}{(2x+1)^4} \\ \therefore y' &= -\frac{2 \cos x \{(2x+1) \sin x + 2 \cos x\}}{(2x+1)^3} \end{aligned}$$

73 (1) (i)  $y = x \log x$ ,  $(a, b) = (e, e)$

$y' = \log x + 1$  であるから、接線の傾きは、 $y'(e) = \log e + 1 = 1 + 1 = 2$

したがって、 $(e, e)$  における接線の方程式は  $y - e = 2(x - e)$

$$\therefore y = 2x - e$$

(ii)  $y = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{3x} + e^{-2x}}$ ,  $(a, b) = (0, 0)$

$$y' = \frac{(2e^{2x} + e^{-x})(e^{3x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - e^{-x})(3e^{3x} - 2e^{-2x})}{(e^{3x} + e^{-2x})^2} \text{ であるから}$$

$$\text{接線の傾きは, } y'(0) = \frac{(2+1)(1+1) - 0}{(1+1)^2} = \frac{3}{2}$$

したがって、 $(0, 0)$  における接線の方程式は  $y = \frac{3}{2}x$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2} \times \frac{3 + \sqrt{2x+1}}{3 + \sqrt{2x+1}} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-2x+8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(3+\sqrt{2x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(3+\sqrt{2x+1})} \\ &= \frac{-2 \cdot 4}{3+3} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

74 (ア)  $x^3 - 3x \geq 0$  のとき,

つまり  $x(x^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq 0, x \geq \sqrt{3}$  のとき

$$y = |x^3 - 3x| = x^3 - 3x, \quad y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

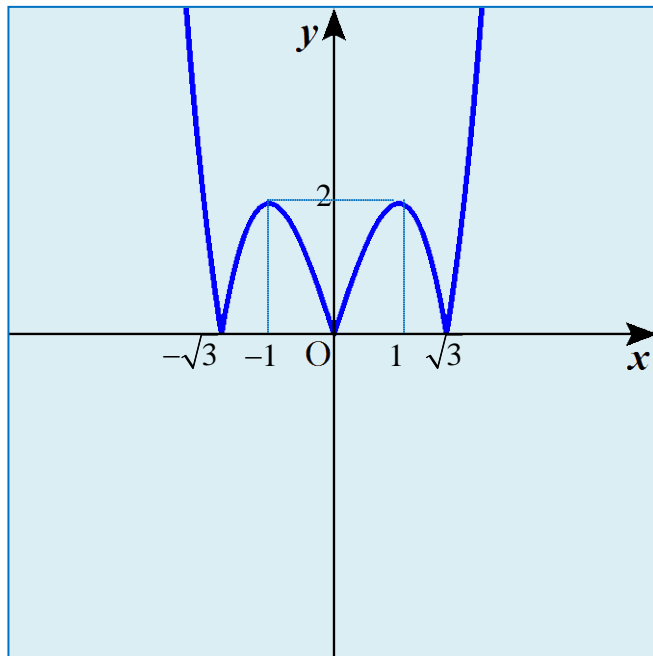
(イ)  $x^3 - 3x < 0$  のとき,

つまり  $x(x^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3}$  のとき

$$y = |x^3 - 3x| = -x^3 + 3x, \quad y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

(ア), (イ)より増減表は次のようになる.

$x$	...	$-\sqrt{3}$	...	$-1$	...	$0$	...	$1$	...	$\sqrt{3}$	...
$y'$	-		+	$0$	-		+	$0$	-		+
$y$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$
		極小		極大		極小		極大		極小	



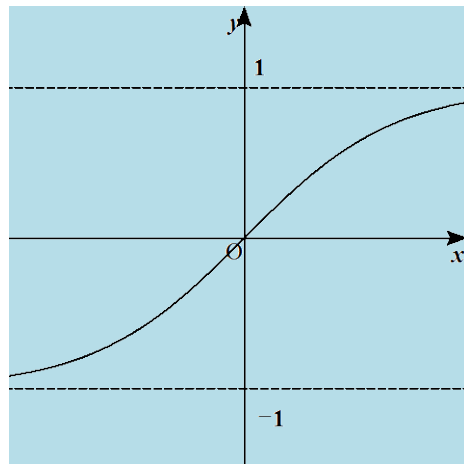
75  $y' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$  より単調増加関数である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1,$$

$t = -x$  とおいて,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t} - e^t}{e^{-t} + e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^{2t}} - 1}{\frac{1}{e^{2t}} + 1} = -1.$$

以上より グラフは右図のようになる.



76  $y = x^3 - 3x$  上の点  $(a, a^3 - 3a)$  における接線の方程式は、 $y' = 3(x^2 - 1)$  より

$$y = 3(a^2 - 1)(x - a) + a^3 - 3a = 3(a^2 - 1)x - 2a^3 \cdots \textcircled{1} \quad \text{となる.}$$

直線①が点  $P(x_0, y_0)$  を通るとすると、

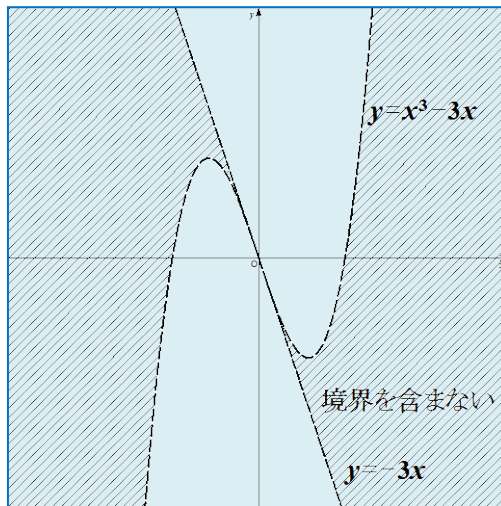
$$y_0 = 3(a^2 - 1)x_0 - 2a^3 \quad \text{すなわち} \quad 2a^3 - 3a^2x_0 + y_0 + 3x_0 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。点  $P(x_0, y_0)$  を通る異なる 3 本の接線がひけるとき、 $a$  に関する方程式②は 3 つの異なる実数解を持つ。

$f(a) = 2a^3 - 3x_0a^2 + y_0 + 3x_0$  とおくと、方程式②が 3 つの異なる実数解を持つための必要十分条件は  $f(a)$  の 2 つの極値がそれぞれ異なる符号となることである。よって、 $f'(a) = 6a^2 - 6x_0a = 6a(a - x_0) = 0$  より  $f(a)$  は  $a = 0, x_0$  で極値をとるので、点  $P(x_0, y_0)$  を通る異なる 3 本の接線がひける必要十分条件は

$$\text{不等式} \quad f(0) \cdot f(x_0) = (y_0 + 3x_0)(y_0 + 3x_0 - x_0^3) < 0 \quad \text{が成り立つことである.}$$

したがって、点  $P$  から曲線  $y = x^3 - 3x$  に相異なる接線が 3 本ひけるときの、点  $P$  は  $x$ - $y$  平面上の不等式  $(y + 3x)(y + 3x - x^3) < 0$  をみたす領域にある。領域を図示すると下図のようになる。

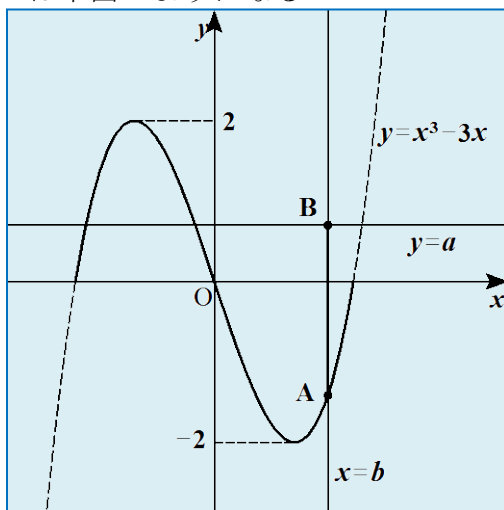


77  $y = x^3 - 3x$  の増減を調べて  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  の範囲でグラフをかく.

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$  より, 増減表は

$x$	$-\sqrt{3}$	...	$-1$	...	$1$	...	$\sqrt{3}$
$y'$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$
$y$	$0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	$0$

となるので, グラフは下図のようになる.

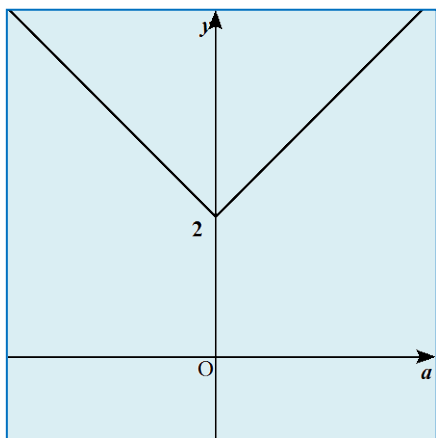


点 A を曲線  $y = x^3 - 3x$  ( $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ ) 上にとり, その  $x$  座標を  $b$  とし, 直線  $x = b$  ( $-\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3}$ ) と直線  $y = a$  との交点を B とする.

$f(b)$  の値は線分 AB の長さと同じなので, 上のグラフより

$a \geq 0$  のとき  $g(a) = 2 + a$ ,  $a < 0$  のとき  $g(a) = 2 - a$  となる.

$y = g(a)$  のグラフは下図のようになるので,



$g(a)$  の最小値は 2 ( $a = 0$  のとき) (答)



$$\boxed{78} \quad (1) \quad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (> 0) \quad \text{より} \quad e^x + e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\text{よって} \quad e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \quad (y \geq 1) \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{の両辺の対数をとると} \quad x = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると} \quad y = \cosh^{-1} x = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

ここで

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 1} &= (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$y = \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} = -\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{であるから}$$

$$\therefore y = \cosh^{-1} x = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

(2) 教科書 2 章, 対数関数の微分公式 II より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\cancel{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

79 (1)  $f(x) = \tan^{-1} x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$  とおく.

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{x^2+1} \quad \text{より}$$

増減表は 

$x$	0	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

 となるので  $f(x) = \tan^{-1} x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) > 0 \quad (x > 0)$

したがって,  $\tan^{-1} x > x - \frac{x^3}{3} \quad (x > 0)$  が示された.

(2)  $f(x) = \sin^{-1} x + \sqrt{2(1-x)} - \frac{\pi}{2}$  とおく.  $f(-1) = 2 - \pi, f(1) = 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{2(1-x)}} = \frac{\sqrt{2(1-x)} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2(1-x)}} = \frac{\sqrt{1-x}(\sqrt{2} - \sqrt{1+x})}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2(1-x)}} > 0 \quad (-1 < x < 1)$$

以上より増減表は 

$x$	-1	...	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$2 - \pi$	↗	0

 となるので,

$$f(x) = \sin^{-1} x + \sqrt{2(1-x)} - \frac{\pi}{2} \leq 0 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (\text{等号は } x=1 \text{ のとき成立}).$$

したがって,  $\sin^{-1} x + \sqrt{2(1-x)} \leq \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$  が示された.

80 (ヒント:  $\frac{l}{m}=x$ とおくと,  $0 \leq x \leq 1$ をみます.)

$f(x)=x^n-x^{n+1}$ において,  $0 \leq x \leq 1$ の範囲で増減表を作成すると  
 $f'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=x^{n-1}\{n-(n+1)x\}$ より

$x$	0	...	$\frac{n}{n+1}$	...	1
$y'$	0	+	0	-	-
$y$	0	↗	$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$	↘	0

となるので,  $0 \leq x \leq 1$ のとき  $x^n-x^{n+1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$  が成り立つ.

特に,  $0 \leq \frac{l}{m} \leq 1$  だから, 上式で  $x=\frac{l}{m}$ とおくことにより

$$\left(\frac{l}{m}\right)^n - \left(\frac{l}{m}\right)^{n+1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \quad \text{が示された.}$$

81  $t > 0$  のとき、不等式①は次の不等式

$$e^t - 1 \geq te^{\frac{t}{a}} \quad (t > 0)$$

と同値である.

ここで、 $x = e^{\frac{t}{a}}$  とおくと、 $\log x = \log e^{\frac{t}{a}}$  より  $\log x = \frac{t}{a} \log e = \frac{t}{a}$  だから、 $t = a \log x$  である.  $t > 0$  より、 $x > 1$  だから、不等式① ( $t > 0$ ) は次の不等式と同値となる.

$$\boxed{(\ast) \quad x^a - 1 \geq ax \log x \quad (x > 1)}$$

( $\ast$ 左辺) - ( $\ast$ 右辺) =  $f(x) = x^a - ax \log x - 1$  とおくと、次が成り立つ.

$$f(1) = 1^a - a \log 1 - 1 = 0,$$

$$f'(x) = a(x^{a-1} - \log x - 1), \quad f'(1) = a(1^{a-1} - \log 1 - 1) = 0,$$

$$f''(x) = a \left\{ (a-1)x^{a-2} - \frac{1}{x} \right\}, \quad f''(1) = a(a-2)$$

(1)  $a = 2$  のとき、 $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ ,

$$f'(x) = 2(x - \log x - 1),$$

$$f''(x) = 2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{2(x-1)}{x} > 0 \quad (x > 1).$$

$f''(x) > 0 \quad (x > 1)$  より  $x > 1$  で  $f'(x)$  は単調増加である. さらに、 $f'(1) = 0$  だから、 $x > 1$  で  $f'(x) > 0$  である. (増減表参照)

$x$	1	...
$f''$	/	+
$f'$	0	↗

よって、 $x > 1$  で  $f(x)$  は単調増加である. さらに、 $f(1) = 0$  だから、 $x > 1$  で  $f(x) > 0$  が成り立つ. (増減表参照)

$x$	1	...
$f'$	/	+
$f$	0	↗

特に、 $f(x) \geq 0$  でもあるから、 $a = 2$  のとき、不等式 ( $\ast$ ) が示された.

よって、 $a = 2$  のとき、これと同値な不等式① ( $t > 0$ ) も成り立つ. ■

(2)  $f''(1) = a(a-2) < 0$  と仮定すると,  $f'(1) = 0$  だから,

$f(x)$  は  $x=1$  で極大値をとる.

ゆえに,  $x > 1$  で  $f(x) < 0$  となる  $x$  が存在する. (増減表参照)

$x=1$  に十分近い範囲では,

$x$	...	1	...
$f'$		0	
$f''$		-	
$f$	↗	0	↘

したがって,  $f''(1) = a(a-2) \geq 0$  でなくてはならない.  $a > 1$  だから, 不等式 (※) が成り立つためには, 次の条件が必要である.

$$(\star) \quad a \geq 2$$

逆に,  $a \geq 2$  であれば, (1) の結果より

$$\frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{2}} \geq e^{\frac{t}{a}} \quad (t > 0)$$

が成り立つので, これと同値な不等式 (※) も成り立つ. よって (☆) は,  $a > 1$  のとき不等式 (※) が成り立つための必要十分条件である.

不等式 (※) と不等式① ( $t > 0$ ) は同値なので, 求める  $a$  の範囲は

$$a \geq 2$$

である.