第 4 章 C 問題詳解

1. (1) ライプニッツの公式より

$$
\begin{aligned}
F^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (x^{n-1})^{(n-k)} (\log x)^{(k)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 (x^{n-1})^{(n)} (\log x)^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (x^{n-1})^{(n-k)} (\log x)^{(k)} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (x^{n-1})^{(n-k)} (\log x)^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (x^{n-1})^{(n-k)} (\log x)^{(k)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.$1 \leqq k \leqq n$ のとき

$$
\begin{aligned}
(x^{n-1})^{(n-k)} &= (n-1)(n-2)\cdots(n-1-(n-k)+1)x^{n-1-(n-k)} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} \\
(\log x)^{(k)} &= \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
F^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{(n-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (-1)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (-1)^{k-1} &= {}_n\mathrm{C}_1 (-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_2 (-1)^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n (-1)^{n-1} \\
&= (1-1) + {}_n\mathrm{C}_1 (-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_2 (-1)^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n (-1)^{n-1} \\
&= 1 + \left\{(-1) + {}_n\mathrm{C}_1 (-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_2 (-1)^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n (-1)^{n-1}\right\} \\
&= 1 - \left\{{}_n\mathrm{C}_0 (-1)^0 + {}_n\mathrm{C}_1 (-1)^1 + {}_n\mathrm{C}_2 (-1)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n (-1)^{n}\right\} \\
&= 1 - (1 + (-1))^n = 1
\end{aligned}
$$

より, $F^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

(2)

$$
g'(x) = \int g''(x)\ dx = \int \left\{ \log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right\}\ dx
$$

ここで $t=\log x$ とおくと $x=e^t$ で, $dx=\dfrac{d(e^t)}{dt}dt=e^t dt$ だから

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int\left(\log t+\frac{1}{t}\right)e^t\ dt=\int e^t\log t\ dt+\int\frac{e^t}{t}\ dt\\&=e^t\log t-\int\frac{e^t}{t}\ dt+\int\frac{e^t}{t}\ dt=e^{\log x}\log(\log x)+C\\&=x\log(\log x)+C\quad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(3) 条件 $F^{(n-1)}(x)=\displaystyle\int_a^{g(x)}f(t)dt$ の両辺を x で微分すると

$$F^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)}f(t)dt\right)$$

だから, 合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)}f(t)dt&=\left(\frac{d}{du}\int_a^u f(t)dt\right)\frac{du}{dx}\quad(u=g(x))\\&=f(u)g'(x)=f(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(g(x))=\frac{F^{(n)}(x)}{g'(x)}=\frac{(n-1)!}{x\,(x\log(\log x)+C)}.$$

2. $y(-\theta)=2a\sin(-\theta)-a\sin(-2\theta)=-y(\theta)$ より曲線 C は x 軸に関して対称だから,$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で概形を調べればよい.

(1) x,y を θ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=-2a\sin\theta-2a\sin 2\theta=-2a(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)\\&=-2a\sin\theta(1+2\cos\theta)\\\frac{dy}{d\theta}&=2a\cos\theta-2a\cos 2\theta=2a(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)\\&=-2a(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)\end{aligned}$$

だから

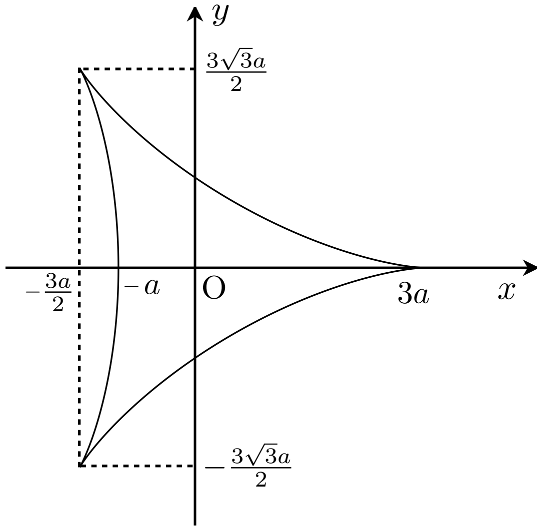
$$\frac{dx}{d\theta}=0\ \ (0<\theta<\pi)\Longleftrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi$$
$$\frac{dy}{d\theta}=0\ \ (0<\theta<\pi)\Longleftrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi$$

なので θ に対して x,y の増減は以下のようになる ($'$ は θ についての微分を表す).

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	$3a$	↘	$-\frac{3}{2}a$	↗	$-a$

y	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a$	↘	0

よって曲線の概形は以下のようになる.



(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲の曲線で囲まれる図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left|y(\theta)x'(\theta)\right| d\theta - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left|y(\theta)x'(\theta)\right| d\theta \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (2a\sin\theta - a\sin 2\theta)(2a\sin\theta + 2a\sin 2\theta)d\theta \\
&- \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (2a\sin\theta - a\sin 2\theta)(-2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (2a\sin\theta - a\sin 2\theta)(2a\sin\theta + 2a\sin 2\theta)d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} (2\sin^2\theta + \sin\theta\sin 2\theta - \sin^2 2\theta)d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} \left\{(1-\cos 2\theta) - \frac{1}{2}(\cos 3\theta - \cos\theta) - \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\right\} d\theta \\
&= \pi a^2
\end{aligned}$$

よって求める面積は $2\pi a^2$

3. $y(\pi - x) = y(\pi + x)$ より関数 y のグラフは直線 $x = \pi$ に関して線対称になる. よって $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲のグラフを考える.

$$y' = 2\sin 2x - 2\sin x = 2(2\sin x\cos x - \sin x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$$

$$\therefore \quad y' = 0 \ (0 < \theta < \pi) \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

また

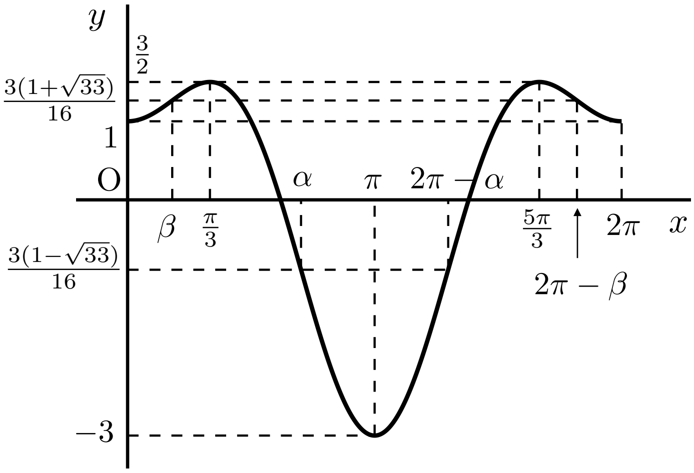
$$y'' = 4\cos 2x - 2\cos x = 2(4\cos^2 x - \cos x - 2) = 8\left(\cos x - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{8}$$

$$\therefore \quad y'' = 0 \ \ (0 < x < \pi) \iff \cos x = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{8} \text{ または } \cos x = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{33}}{8}$$
$$\iff x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{8}\right) \text{ または } x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{33}}{8}\right)$$

ここで $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{8}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{33}}{8}\right)$ とおくと, 増減表は以下のようになる.

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{3(1+\sqrt{33})}{16}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{3(1-\sqrt{33})}{16}$	$\searrow$	-3

以上より, グラフの概形は以下のとおりになる.



4. 内接する正 n 辺形の面積 A_n と, 外接する正 n 辺形の面積 B_n は

$$A_n = \frac{a^2}{2} n \sin\frac{2\pi}{n}, \quad B_n = a^2 n \tan\frac{\pi}{n}$$

である. ここで関数 $\sin x$ と $\tan x$ のマクローリンの定理を適用すると,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + R_4, \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + R_4'$$

である。ただし剰余項 R_4, R_4' については

$$R_4 = \frac{\sin c}{4!}x^4 \quad (c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間の値})$$
$$R_4' = \frac{8\frac{\sin c'}{\cos^5 c'}(3-\cos^2 c')}{4!}x^4 \quad (c' \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間の値})$$

と書ける. よって

$$\frac{C - A_n}{B_n - C} = \frac{a^2 n\left\{\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3 - \frac{\sin c}{4!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4\right\}}{a^2 n\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \frac{8\frac{\sin c'}{\cos^5 c'}(3-\cos^2 c')}{4!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\right\}}$$

で、$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sin c}{4!}\to 0,\ \dfrac{8\frac{\sin c'}{\cos^5 c'}(3-\cos^2 c')}{4!}\to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}=2.$$

(別解) $t=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと,$n\to\infty$ のとき $t\to 0$. また

$$C-A_n=a^2n\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right), B_n-C=a^2n(\tan t-t)$$

だから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{\tan t-t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{\frac{1}{\cos^2 t}-1}\quad(\because \text{ロピタルの定理})\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos 2t)}{\frac{2}{1+\cos 2t}-1}\quad(\because \text{半角の公式})\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{2-(1+\cos 2t)}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{1-\cos 2t}=2
\end{aligned}$$

5. (1) 計算により $p_1(x)=-2x,\ p_2(x)=2(2x^2-1)$

(2) ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}x^kf(x)&=\lim_{x\to\infty}x^ke^{-x^2}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{x^2}}\\
&=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^ne^{x^2}} & (k=2n-1(n\geqq 1)\ \text{のとき})\\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{2^ne^{x^2}} & (k=2n(n\geqq 0)\ \text{のとき})\end{cases}\\
&=0
\end{aligned}$$

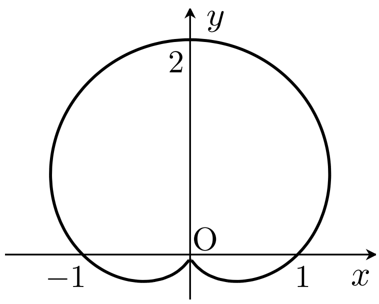
(3) $f'(x)=p_1(x)f(x),\ f''(x)=p_2(x)f(x)$ であることより

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^\infty p_1(x)f''(x)dx=\left[p_1(x)f'(x)\right]_0^\infty-\int_0^\infty p_1'(x)f'(x)dx\\
&=\left[\{p_1(x)\}^2f(x)\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-2)f'(x)dx=\left[4x^2f(x)\right]_0^\infty+2\int_0^\infty f'(x)dx\\
&=0+2\left[f(x)\right]_0^\infty=0+2(0-1)=-2
\end{aligned}$$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - t^2$ より, 曲線の長さは

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\ dt &= \int_0^2 \sqrt{(t^2+1)^2}\ dt \\
&= \int_0^2 |t^2+1|\ dt \\
&= \int_0^2 (t^2+1)\ dt \qquad (\because\ t^2+1>0) \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

7. 概形は $r = 1 + \sin\theta = 1 + \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$ より, カージオイドを原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた図形である. よって, 以下のようになる.



曲線で囲まれる部分の面積は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する曲線と y 軸で囲まれる部分の面積を 2 倍したものになる. よって

$$\begin{aligned}
S &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^2\ d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\ d\theta \\
&= [\theta - 2\cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ d\theta \\
&= \pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ d\theta \qquad (\because\ \sin^2\theta\ \text{は偶関数}) \\
&= \pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta \\
&= \pi + \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

8. 曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を S, 回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t \cos t| dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt \\
&= 2\int_0^1 u^2 du \quad (u = \cos t \text{ による置換積分}) \\
&= \frac{2}{3} \\
V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t |\cos t| dt = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(1-\sin^2 t)\cos t dt \\
&= 4\pi \int_0^1 u^2(1-u^2) du = \frac{8}{15}\pi
\end{aligned}$$

9. (1)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_1^{\infty} (x)' \log\left(1+\frac{3}{x^2}\right) dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} x\left(\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)' dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^{\infty} + 2\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2+3} dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^{\infty} + 2\sqrt{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^{\infty}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{x^2+3} = 0
\end{aligned}$$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}, \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ だから

$$\text{与式} = 0 - \log 4 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = -\log 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi.$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\sin x) \log(\cos x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_1^{\sin\varepsilon} \log t (-dt) \quad (t = \cos x \text{ による置換積分}) \\
&= \lim_{\varepsilon' \to +0} [t \log t - t]_{\varepsilon'}^1 \quad (\varepsilon' = \sin\varepsilon \text{とおく}) \\
&= (1 \cdot \log 1 - 1) - \lim_{\varepsilon' \to +0} \left(\varepsilon' \log \varepsilon' - \varepsilon'\right) = -1
\end{aligned}
$$

10. (1) $\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - 20)$

(2)

$$
\frac{1}{T(t) - 20} \frac{dT(t)}{dt} = -k \quad \text{より} \quad \log(T(t) - 20) = -kt + A \quad (A \text{ は積分定数})
$$

$$
\therefore\ T(t) = 20 + Ce^{-kt} \quad (C = e^A \text{ は定数})
$$

条件 $T(0) = 100$ を満たす C は $100 = 20 + C$ より $C = 80$. さらに条件 $T(3) = 60$ より $60 = 20 + 80e^{-3k}$ だから $k = \dfrac{\log 2}{3}$.40 度になる時刻を t_0 とすると

$$
40 = 20 + 80e^{-\frac{\log 2}{3} t_0} \quad \text{より} \quad t_0 = 6.
$$

よって 6 分後.

11. (1) 両辺に $e^{\int a dx} = e^{ax+C} = Be^{ax}$ (C は積分定数で $B = e^C$ とおいた) をかけて

$$
Be^{ax} y' + aBe^{ax} y = Be^{ax} \cos bx.
$$

ここで $B > 0$ だから, 両辺を B で割って整理すると

$$
(e^{ax} y)' = e^{ax} \cos bx
$$

だから

$$
\begin{aligned}
e^{ax} y &= \int e^{ax} \cos bx\ dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\ dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\ dx \right).
\end{aligned}
$$

ここで $I = \displaystyle\int e^{ax} \cos bx\ dx$ とおくと,

$$
\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx
$$

より

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad e^{ax}y &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \\ y &= \frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + Ce^{-ax} \end{aligned}$$

(2) 初期値が $y(0)$ のとき, 積分定数 C は $C = y(0) - \dfrac{a}{a^2+b^2}$ となる.

$a > 0$ かつ $b = 0$ ならば

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(Ce^{-ax} + \frac{a}{a^2}\right) = \frac{1}{a}$$

となり収束する.

$a < 0$ ならば $y(0) \neq \dfrac{a}{a^2+b^2}$ をみたす $y(0)$ に対して $C \neq 0$ である. よって $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pm\infty$ (符号は C の符号による) だから初期値 $y(0)$ によっては収束しない.

$a > 0$ かつ $b \neq 0$ のとき, $\lim\limits_{x\to\infty} Ce^{-ax} = 0$ かつ

$$\frac{1}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\theta)$$

をみたす定数 θ が存在する. 極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\theta)$ は存在しない (振動する) ので $y(x)$ は $x \to \infty$ のとき収束しない.

よって求める必要十分条件は $a > 0$ かつ $b = 0$ である.

12.

$$f(0) = 1 + \int_0^0 (t-0)f(t)dt = 1 + 0 = 1.$$

また,

$$f(x) = 1 + \int_0^x (tf(t) - xf(t))dt = 1 + \int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$$

だから

$$f'(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) = -\int_0^x f(t)dt \quad \text{より} \quad f'(0) = 0$$

さらに $f'(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ の両辺を x で微分して, 微分方程式 $f''(x) = -f(x)$ を得る.

関数 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ は微分方程式 $f''(x) = -f(x)$ を満たす. よって A, B を定数とするとき, 関数 $A\sin x + B\cos x$ も微分方程式 $f''(x) = -f(x)$ の解. ここで

$f(0) = 1, f'(0) = 0$ の条件より $A = 0, B = 1$ を得る. よって微分方程式 $f''(x) = -f(x)$ の解は $f(x) = \cos x$.

(注意) ここでは天下り的に関数 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ が微分方程式 $f''(x) = -f(x)$ を満たすことを用いたが, 一般的な解法に関しては引き続く「応用数学」の微分方程式の章を参照してほしい.