微分積分 第5章
問題集(C問題web詳解)

問題 C 解答

58　定積分を求めると $f(x,y)=1-e^{-\frac{y^2}{x}}$．合成関数の微分より，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)e^{-\frac{y^2}{x}}$ $=-\dfrac{y^2}{x^2}e^{-\frac{y^2}{x}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)e^{-\frac{y^2}{x}}=\dfrac{2y}{x}e^{-\frac{y^2}{x}}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y^2}{x^2}e^{-\frac{y^2}{x}}\right)$ $=\dfrac{2y(-x+y^2)}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x}}$．

59　定義に従って計算すると，$f_x(0,0)=0$，$f_x(h,0)=0$，$f_x(0,k)=-k$，$f_y(0,0)=0$，$f_y(h,0)=h$，$f_y(0,k)=0$ であるから，

$$f_{xx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1,$$

$$f_{yy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0.$$

60　(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x+(y-1)\,e^{-y}$．

(2)　ライプニッツの公式から $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial y^{10}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k\frac{\partial^k}{\partial y^k}y\cdot\frac{\partial^{10-k}}{\partial y^{10-k}}(e^x-e^{-y})=1\cdot y\cdot$ $(-1)(-1)^{10}e^{-y}+10\cdot 1\cdot(-1)(-1)^9e^{-y}=-ye^{-y}+10e^{-y}$．

61　(1)　$\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ だから，条件を用いて，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ $=\dfrac{1}{f^2}\left(f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=0$．

(2)　$f(x,y)=\phi(x)\psi(y)$ より $f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\phi(x)\psi(y)\phi'(x)\psi'(y)-\phi(x)'\psi(y)\cdot$ $\phi(x)\psi'(y)=0$．

(3)　(1) より，$(*)$ を満たす f は $g(x,y)=\log(f(x,y))$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}$ $=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)=0$ を満たすので，$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ は y だけの関数となる．その原始関数を $c_1(y)$ とおくと，$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=c_1'(y)$ となって，ある x の関数 $c_2(x)$ を用いて $g(x,y)=$ $c_1(y)+c_2(x)$ と表せる．このとき，$f(x,y)=e^{g(x,y)}=e^{c_1(y)+c_2(x)}=e^{c_2(x)}e^{c_1(y)}$ となるから，$\phi(x)=e^{c_2(x)}$，$\psi(x)=e^{c_1(y)}$ とおけば f は変数分離型関数であることがわかる．

62　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^{\frac{1}{y}}\log x\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{1}{y^2}x^{\frac{1}{y}}\log x$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}-1\right)x^{\frac{1}{y}-2}=\dfrac{1-y}{y^2}x^{\frac{1}{y}-2}$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1}\right)=\frac{x^{\frac{1}{y}-1}\log x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y-x^{\frac{1}{y}-1}}{y^2}=-x^{\frac{1}{y}-1}\frac{(\log x+y)}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}x^{\frac{1}{y}}\right)(-\log x)=\frac{x^{\frac{1}{y}}\log x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y^2-x^{\frac{1}{y}}\cdot 2y}{y^4}(-\log x)$$

$$=x^{\frac{1}{y}}\log x\frac{(\log x+2y)}{y^4}$$

63 (1) $f_x=4x(x^2+y^2-1)=0,\ f_y=4y(x^2+y^2+1)=0$ より，停留点は $(0,0),\ (\pm1,0)$．$(0,0)$ の時，$H=-16<0$ より極値をとらない．$(\pm1,0)$ の時，$H=64>0$ で $f_{xx}=8>0$ であるから極小値 -1 をとる．

(2) $f_x=\frac{y}{\sqrt{x}}-1=0,\ f_y=2(\sqrt{x}-3y+4)=0$ より停留点は $(4,2)$．このとき，$H=\frac{1}{2}>0,\ f_{xx}=-\frac{1}{8}<0$ より極大値 8 をとる．

(3) $f_x=4x(x^2+2y^2)=0,\ f_y=4y(2x^2+y^2-2)=0$ より，停留点は $(0,0),\ (0,\pm\sqrt{2})$．$(0,\pm\sqrt{2})$ の時，$H=256>0$ で $f_{xx}=16>0$ より極小値 -4 をとる．$(0,0)$ のときは $H=0$ でこれだけでは判定はできない．x 軸上に制限すると，$x>0$ では $f(x,0)=x^4>0$ であり，y 軸上に制限すると $f(0,y)=y^4-4y^2=y^2(y^2-4)$ より $-2<y<0$ または $0<y<2$ では $f(0,y)<0$ であるから極値はとらない．

64 (1) $f_x=6x-4y=0,\ f_y=-4x+6y=0$ より，停留点は $(0,0)$．このとき，$H=20>0$，$f_{xx}=6>0$ より極小値 2 をとる．

(2) $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく．ラグランジュの未定乗数法より $f_x-\lambda g_x=6x-4y-\lambda\cdot 2x=0,\ f_y-\lambda g_y=-4x+6y-\lambda\cdot 2y=0,\ g=x^2+y^2-1=0$．この連立方程式を解くと，停留点は $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順)，$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順)．故に $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，極小値 3, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，極大値 7 をとる．

(3) (1),(2) から $(0,0)$ のとき，最小値 2, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，最大値 7 をとる．

65 $z_x=1-\dfrac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}=0,\ z_y=1-\dfrac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}=0$ より停留点は $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (複号同順)．このとき，$z\left(\frac{4}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\sqrt{6},\ z\left(-\frac{4}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{4}{\sqrt{6}}$.

一方，境界 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ では $y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ より $z=x\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$．よってそれぞ

れ極値を求めると $(x,y)=\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で極大値 $\sqrt{5}$，$(x,y)=\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で極小値 $-\sqrt{5}$ をとる．以上より $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，最小値 $-\sqrt{5}$，$\left(\frac{4}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき，最大値 $\sqrt{6}$ をとる．

66 $f_x=3x^2-3(1+y^2)=0,\ f_y=-6xy=0$ より，停留点は $(\pm1,0)$．$H(\pm1,0)=-36<0$ より極値をとらない．最大値は D 内でとらないことから D の境界 $x^2+y^2=1$ 上でとる．ラグランジュの未定乗数法より，$g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと，$f_x-\lambda g_x=3(x^2-y^2-1)-\lambda\cdot 2x=0,\ f_y-\lambda g_y=-6xy-\lambda\cdot 2y=0,\ g=x^2+y^2-1$ から，連立方程式を解いて停留点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，最大値 $2\sqrt{2}$ をとる．

67 (1) $f_x=6(x-y)=0,\ f_y=6(y^2-x)=0$ より，停留点は $(0,0),(1,1)$．$(0,0)$ の時は，$H=-36<0$ より極値をとらない．$(1,1)$ の時は，$H=36>0,\ f_{xx}=6>0$ より極小値 -4 をとる．(2) $f_x(1,\sqrt{3})\neq 0,\ f_y(1,\sqrt{3})\neq 0$ より，点 $(1,\sqrt{3})$ は特異点ではない．求める接線の方程式は $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる．

68 $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}=0,\ f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x+y}}=0$ より停留点は $(1,1)$．下に凸なので $(1,1)$ で極小値 0 をとる．

69 (1) $\frac{\partial f}{\partial x}=2(\alpha x+y+1),\frac{\partial f}{\partial y}=2(x+2y+2),\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\alpha,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4.$
(2) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ より，停留点は α の値によらず $(0,-1)$．$H(x,y)=8\alpha-4$ であるから $\alpha<\frac{1}{2}$ の時は極値をとらない．$\alpha>\frac{1}{2}$ の時，$H>0$ で $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ より，$(0,-1)$ の時，極小値 -2 をとる．