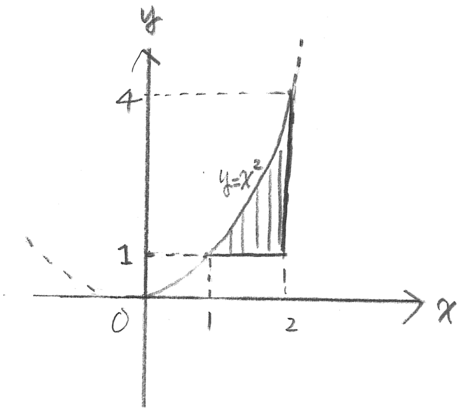
問題集　第６章　§１　C 問題

６章§１　C 問題 詳細解答

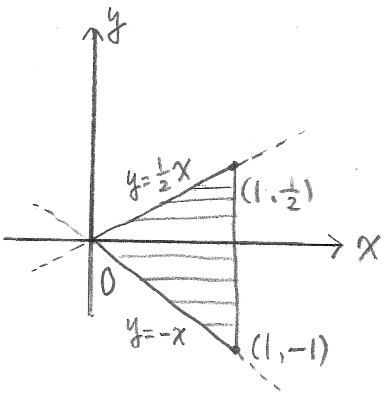
$\boxed{40}$ (1)　$D=\{(x,y)\mid\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le x^2\}$



$$\iint_D \frac{x^2}{y}\ dxdy=\int_1^2\{\int_1^{x^2}\frac{x^2}{y}dy\}dx=\int_1^2 x^2[\log y]_1^{x^2}dx=\int_1^2 2x^2\log x dx$$

$$=\frac{2}{3}[x^3\log x]_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 x^2dx=\frac{16}{3}\log 2-\frac{14}{9}$$

(2)　$D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1,\ -x\le y\le \frac{1}{2}x\ \}$



$$\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}\ dxdy=\int_0^1\{\int_{-x}^{\frac{x}{2}}\sqrt{2x^2+y^2}dy\}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}[y\sqrt{y^2+2x^2}+2x^2\log|y+\sqrt{y^2+2x^2}|]_{y=-x}^{y=\frac{x}{2}}dx$$

右辺の積分における［　］の部分について

$$[y\sqrt{y^2+2x^2}+2x^2\log|y+\sqrt{y^2+2x^2}|]_{y=-x}^{y=\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}+2x^2}+2x^2\log|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+2x^2}|+x\sqrt{3x^2}-2x^2\log|-x+\sqrt{x^2+2x^2}|$$

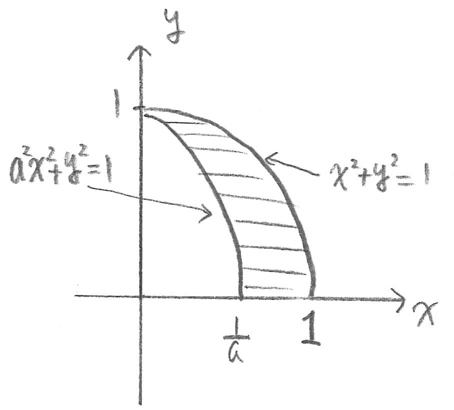
$$=\frac{3}{4}x^2+2x^2\log(2x)+\sqrt{3}x^2-2x^2\log((\sqrt{3}-1)x)$$

$$=(\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log\frac{2}{\sqrt{3}-1})x^2=\{\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log(\sqrt{3}+1)\}x^2$$ だから

２重積分 $=\frac{1}{2}\{\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log(\sqrt{3}+1)\}\int_0^1 x^2dx$

$$=\{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\log(\sqrt{3}+1)\}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}\log(\sqrt{3}+1)$$

(3)



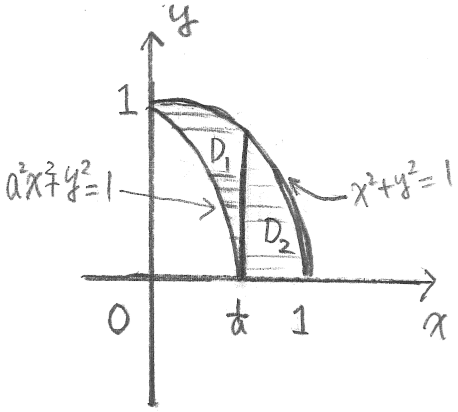
$$D=\{(x,y)\mid\ 0\le y\le 1,\ \frac{1}{a}\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\ \}$$

$$\iint_D xy\ dxdy=\int_0^1\{\int_{\frac{1}{a}\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\ dx\}dy=\int_0^1\ y\cdot\frac{1}{2}[x^2]_{\frac{1}{a}\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ dy$$

$$=\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-1}{a^2}(1-y^2)\ dy=\frac{a^2-1}{2a^2}\int_0^1(y-y^3)dy=\frac{a^2-1}{8a^2}$$

[別解]

積分領域を図のように２つの領域に分ける。



$$D_1 = \{(x,y) \mid \ 0 \le x \le \frac{1}{a},\ \sqrt{1-a^2x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \}$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid \ \frac{1}{a} \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \}$$

$$\iint_{D_1} xy\ dxdy = \int_0^{\frac{1}{a}} \{\int_{\sqrt{1-a^2x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy\} dx = \int_0^{\frac{1}{a}} x \cdot \frac{1}{2}[y^2]_{\sqrt{1-a^2x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

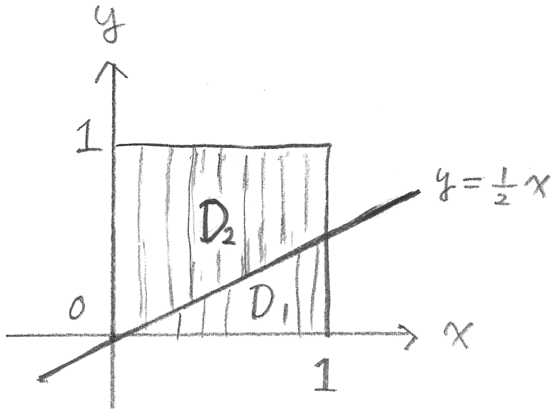
$$= \int_0^{\frac{1}{a}}\ x \cdot \frac{1}{2}(a^2-1)x^2 dx = \frac{1}{2}(a^2-1)\int_0^{\frac{1}{a}} x^3 dx = \frac{a^2-1}{8a^4}$$

$$\iint_{D_2} xy\ dxdy = \int_{\frac{1}{a}}^1 \{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy\} dx = \int_{\frac{1}{a}}^1 x \cdot \frac{1}{2}[y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^1\ x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2) dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4]_{\frac{1}{a}}^1 = \frac{a^4-2a^2+1}{8a^4}$$

従って, $\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}\ dxdy = \frac{a^2-1}{8a^4} + \frac{a^4-2a^2+1}{8a^4} = \frac{a^2-1}{8a^2}$

(4)積分領域を図のように直線 $2y - x = 0$（ つまり $y = \frac{1}{2}x$ ）により２つに分ける。



$D_1 = \{(x, y) \mid \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}x\ \}$　において

$y \le \frac{1}{2}x$，$2y - x \le 0$，　ゆえに $|2y - x| = -(2y - x) = -2y + x$

$$\iint_{D_1} |2y - x|\ dxdy = \int_0^1 \{\int_0^{\frac{1}{2}x} (-2y + x)dy\}dx = \int_0^1 [-y^2 + xy]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}x}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{12}$$

$D_2 = \{(x, y) \mid \ 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{2}x \le y \le 1\ \}$　において

$y \ge \frac{1}{2}x$，$2y - x \ge 0$，　ゆえに $|2y - x| = 2y - x$

$$\iint_{D_2} |2y - x|\ dxdy = \int_0^1 \{\int_{\frac{1}{2}x}^1 (2y - x)dy\}dx = \int_0^1 [y^2 - xy]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1}\ dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4}x^2 - x + 1)\ dx = \frac{7}{12}$$

ゆえに　$\iint_D |2y - x|\ dxdy = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$

(5)　$\log(x + y)$ は $(x, y) = (0,0)$ において定義されないため,

$\iint_D \log(x + y)\ dxdy = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \{\int_0^1 \log(x + y)dy\}dx$　として求める。

部分積分法を用いて,まず内側の積分を計算する。

$$\int_0^1 \log(x+y)dy = \int_0^1 1\times\log(x+y)dy = [(x+y)\log(x+y)]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 dy$$

$$= (x+1)\log(x+1) - x\log x - 1$$

ゆえに

$$\iint_D \log(x+y)\ \ dxdy = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ \{(x+1)\log(x+1) - x\log x - 1\}dx$$

$$= \int_0^1 \ (x+1)\log(x+1)dx - \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ x\log x dx - \int_0^1 dx$$

そこで右辺の３つの積分の値を求める。

$$\int_0^1 \ (x+1)\log(x+1)dx = \int_0^1 \ \frac{1}{2}\{(x+1)^2\}'\log(x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\{[(x+1)^2\log(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1)dx\} = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ x\log x\ dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ \frac{1}{2}(x^2)'\log x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\{[x^2\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\ dx\} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\{0 - \varepsilon^2\log\varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^{-2}} + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}}$ は $\displaystyle\frac{-\infty}{\infty}$ の不定形となるので,ロピタルの定理により

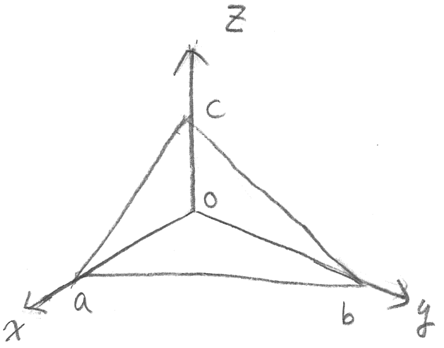
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to+0}\frac{-1}{2}x^2 = 0$ 、 ゆえに $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ x\log x\ dx = -\frac{1}{4}$

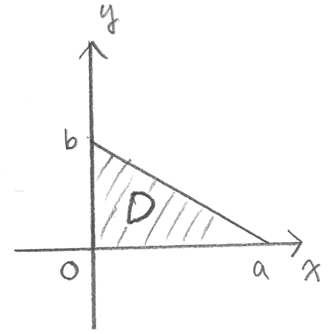
また $\displaystyle\int_0^1 dx = 1$ だから, $\displaystyle\iint_D \log(x+y)\ \ dxdy = 2\log 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 2\log 2 - \frac{3}{2}$

41 与えられた平面と x 軸との交点の座標は $(a,0,0)$,

y 軸との交点の座標は $(0,b,0)$, z 軸との交点の座標は $(0,0,c)$,

従って立体は図の様な三角錐となり,底面は図の領域 D となる。





与えられた平面と xy 平面との交線上では $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{0}{c}=1$, 従って

$y=b(1-\dfrac{b}{a}x)$ が成り立つので, $D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b(1-\dfrac{x}{a})\ \}$

また与えられた平面の方程式は $z=c(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})$ と表されるので,

$$\text{体積}\,V=\iint_D c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dxdy=\int_0^a\{\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\ c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\ dy\}dx$$

$$=\int_0^a c[\ -\frac{b}{2}(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^2\ ]_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})}\ dx=\int_0^a\ \frac{bc}{2}(1-\frac{x}{a}\ )^2dx$$

$$=\frac{bc}{2}[-\frac{a}{3}(1-\frac{x}{a}\ )^3\ ]_0^a=\frac{abc}{6}$$

42

$D=\{(x,y)\mid\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 1\}$ に対し,体積 $V=\iint_D xydxdy$

$x=2+r\cos\theta$, $y=2+r\sin\theta$ と変数変換すると, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$, $0\le\theta\le 2\pi$,

$0\le r\le 1$ となるので

$$V=\int_0^{2\pi}\{\int_0^1(2+r\cos\theta)(2+r\sin\theta)r\,dr\}d\theta$$

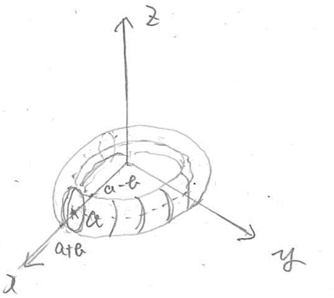
$$= \int_0^{2\pi} \{\int_0^1 (4r + 2r^2(\sin\theta + \cos\theta) + r^3 \cos\theta \sin\theta)\ dr\} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \{2 + \frac{2}{3}(\sin\theta + \cos\theta) + \frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\} d\theta$$

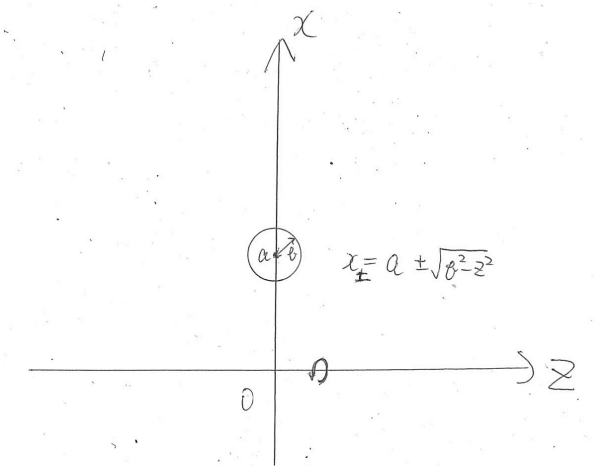
$$= \int_0^{2\pi} \{2 + \frac{2}{3}(\sin\theta + \cos\theta) + \frac{1}{8}\sin 2\theta\} d\theta$$

$$= 4\pi$$

43 (1) $(r-a)^2+z^2=b^2$



(2)



$$V=2\pi\int_0^b\left\{\left(a+\sqrt{b^2-z^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{b^2-z^2}\right)^2\right\}dz$$

$=8\pi a\displaystyle\int_0^b\sqrt{b^2-z^2}dz$ $=8\pi a\times$ 半径 b の 4 分円の面積

$$=8\pi a\frac{\pi b^2}{4}=2\pi^2ab^2$$

(3) $S=2\displaystyle\int_0^b\left\{2\pi x_+\sqrt{1+\left(\frac{dx_+}{dz}\right)^2}+2\pi x_-\sqrt{1+\left(\frac{dx_-}{dz}\right)^2}\right\}dz$

$$=4\pi\int_0^b\left\{\left(a+\sqrt{b^2-z^2}\right)\frac{b}{\sqrt{b^2-z^2}}+\left(a-\sqrt{b^2-z^2}\right)\frac{b}{\sqrt{b^2-z^2}}\right\}dz$$

$= 8\pi ab\int_0^b \frac{1}{\sqrt{b^2-z^2}}dz = 8\pi ab\left[\sin^{-1}\frac{z}{b}\right]_0^b$
$= 4\pi^2 ab$

44. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，方程式は $r^2 = \sin 2\theta$ となる．

$\sin 2\theta \geqq 0$ となるのは, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi.$

$z = xy$ とすると $z_x = y,\ z_y = x$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+r^2}$

従って，$D = \left\{(x,y)|x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\sin 2\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$
とするとき

$S = 2\iint_D \sqrt{1+r^2}rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r\sqrt{1+r^2}\right\}d\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}d\theta$

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta - \frac{\pi}{3}$ 　 $2\theta = t$ とおいて置換積分を行うと,

$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(1+\sin t)^{\frac{3}{2}}dt - \frac{\pi}{3}$

$y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称なので

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)^{\frac{3}{2}}dt - \frac{\pi}{3}$ 　 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では $y = \cos x$ のグラフと

$y = \sin x$ のグラフは $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称なので

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}dt - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\frac{t}{2})^{\frac{3}{2}}dt - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\frac{t}{2}dt - \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2}dt - \frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{t}{2} = u$ とおいて置換積分して,

$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-u^2)du - \frac{\pi}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{3} = \frac{20-3\pi}{9}$

45.　$a > 0$ とする．この曲面は xy および yz, zx 平面に対して対称なので,

$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ で考える.

$z^2 = a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \geqq 0$ において,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (r \geqq 0,\ 0 \geqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$$ とおくと,

$z^2 = ar\sqrt{\cos 2\theta} - r^2 \geqq 0$ より $r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta}$ となる.

ここで, $\cos 2\theta \geqq 0$ なので $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である.

$z = \sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}$ なので,

$$z_x = \frac{\frac{ax}{\sqrt{x^2-y^2}} - 2x}{2\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}},\ z_y = \frac{-\frac{ay}{\sqrt{x^2-y^2}} - 2y}{2\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}},$$

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^2(x^2+y^2)}{4\left(a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2\right)(x^2-y^2)}$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\left(a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2\right)(x^2-y^2)}}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{1}{ar\sqrt{\cos 2\theta} - r^2}}$$

$D = \left\{(x, y) | a\sqrt{x^2-y^2} \geqq x^2 + y^2, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0\right\}$ とおくと

曲面積は $8\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \left(\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta} - r}\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

ここで, $\left(\dfrac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta} - r}\right)^{\frac{1}{2}} = s$ とおくと,

$$r = \frac{a\sqrt{\cos 2\theta}s^2}{1+s^2},\ \frac{dr}{ds} = \frac{2a\sqrt{\cos 2\theta}s}{(1+s^2)^2}$$

で, r が 0 から $a\sqrt{\cos 2\theta}$を動くとき, s は 0 から $+\infty$ を動くので,

$$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \left(\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta} - r}\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

$$= 2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^2}ds$$
$$= 2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)ds$$ となるが，

$\displaystyle\int \frac{s}{(1+s^2)}ds$ は $s=\tan\theta$ とおくことで

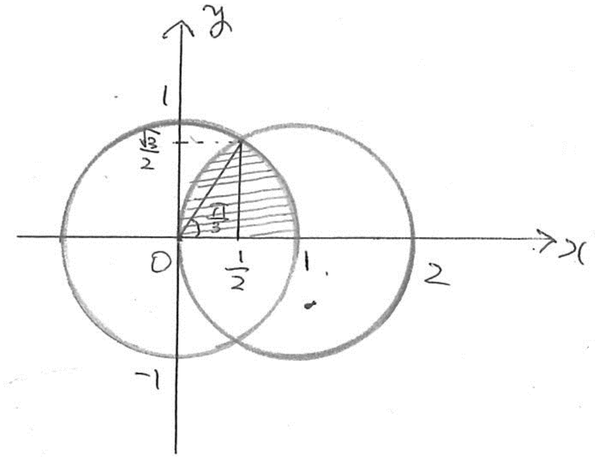
$$\int \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta = \int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}s + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}s + \frac{1}{2}\tan\theta\sec^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s^2}$$ となるので，

$$2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)ds$$
$$= a\sqrt{\cos 2\theta}\left[\tan^{-1}s - \frac{s}{1+s^2}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{\pi a}{2}\sqrt{\cos 2\theta}$$

従って，$\displaystyle S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{\pi a}{2}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

46.



$$\iint_D x dx dy = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x dy\right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy\right\} dx\right]$$
$$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$$
$$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$$

第１項，第２項において $1-x=u$ とおくと，$dx=-du$ であり

積分範囲は１から $\dfrac{1}{2}$ に移るので，

$$= 2\left\{-\int_1^{\frac{1}{2}} (-u)\sqrt{1-u^2}du - \int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$$
$$= 2\left\{-\int_{\frac{1}{2}}^{1} u\sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$$
$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-u^2}du$$
$$= 2\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1-u^2} + \sin^{-1} u\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$= \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

47. $3x^2 + 3y^2 = 2xy + 2x + 2y + 1$ を解くと，

$y = \dfrac{x + 1 \pm 2\sqrt{\frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}{3}$ となる．

$\alpha = \dfrac{x + 1 + 2\sqrt{\frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}{3}, \beta = \dfrac{x + 1 - 2\sqrt{\frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}{3}$ とおく．

これらを用いると，

$\displaystyle\iint_D x dx dy = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \left\{\int_\alpha^\beta x dy\right\} dx = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} (\beta - \alpha) x dx$

$\displaystyle= \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{3} x \sqrt{\frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx$

ここで $\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x - \dfrac{1}{2}) = u$ とおくと，$dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} du$ で，積分範囲は -1 から 1 に移るので

$\displaystyle= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}u^2 du} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} (\sqrt{3}u + 1)\sqrt{1 - u^2} du$

$\displaystyle= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} u\sqrt{1 - u^2} du + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2} du$

第 1 項は奇関数の積分なので 0 であり，第 2 項は半円の積分なので，

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

48. $\begin{cases} x = u \\ \sqrt{3}x - y = v \end{cases}$ とおくと，$\begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{3}u - v \end{cases}$

$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = 1$ であり，

$-4x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = -4u^2 + 2\sqrt{3}u(\sqrt{3}u - v) - (\sqrt{3}u - v)^2 = -u^2 - v^2$ となる．

従って，$\displaystyle\iint_D e^{-4x^2+2\sqrt{3}xy-y^2} = \iint_{D'} e^{-u^2-v^2}dudv \quad (D' = \{(u,v)|u \geqq 0, v \geqq 0\})$

$= \dfrac{\pi}{4}$（教科書　例題６．１６参照）

49.　(1)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx = 4\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx$

$\displaystyle= 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (D = \{(x,y)|x \geqq 0,\ y \geqq 0\})$

$= \pi$（教科書　例題６．１６参照）

(2)$\displaystyle f(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}dx$

$\sqrt{a}x = t$ とおくと，$dx = \dfrac{dt}{\sqrt{a}}$，$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array}$ となるので

$\displaystyle= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$

(1) より $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right\}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx = \pi$

なので $\displaystyle f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$

$\displaystyle f'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{3}{2}},\ f''(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-\frac{5}{2}}$

$\dots$

$\displaystyle f^{\{n\}}(a) = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{2n+1}{2}}$

一方，$\displaystyle f(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx$ を a で微分すると $\displaystyle f'(a) = -\int_0^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx$

さらに微分を繰り返して，

$\displaystyle f^{\{n\}}(a) = (-1)^n\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx$ となる．

従って，

$\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{2n+1}{2}}$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

以上より

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4},\ \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}$$ となる．

50. $I = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 \left\{\int_\epsilon^1 (xy)^{xy}dy\right\}dx$ とする．

$\{\}$ 内の積分において $xy = t$ とおくと，$dy = \dfrac{dt}{x}$

$$\begin{array}{c|ccc} y & \epsilon & \to & 1 \\ \hline t & \epsilon x & \to & x \end{array}$$ となるので

$$I = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\left\{\int_{\epsilon x}^x t^t dt\right\}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 (\log x)'\left\{\int_{\epsilon x}^x t^t dt\right\}dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left\{\left[\log x\int_{\epsilon x}^x t^t dt\right]_{x=\epsilon}^{x=1} - \int_\epsilon^1 \left(\int_{\epsilon x}^x t^t dt\right)' \log x dx\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left[-\log\epsilon\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^t dt - \int_\epsilon^1 \{x^x - (\epsilon x)^{\epsilon x}\epsilon\}\log x dx\right]$$

また，$y = x^x$ とおくと $\log y = x\log x$ なので，$\lim_{x\to+0}\log y = \lim_{x\to+0} x\log x$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-1}}$$

ロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$$

よって

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\log y} = e^0 = 1$$

これより関数 x^x は $0 \leqq x \leqq 1$ で有界となる．このことと

$\int_\epsilon^1 \log x dx = -\epsilon\log\epsilon - 1 + \epsilon$ であることを用いて

$$\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\int_\epsilon^1 (\epsilon x)^{\epsilon x}\log x dx = 0$$

がわかる．

また，$\lim_{\epsilon\to+0}\log\epsilon\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^t dt = \lim_{\epsilon\to+0}\dfrac{\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^t dt}{(\log\epsilon)^{-1}}$ でロピタルの定理を用いて

$= \lim_{\epsilon \to +0} \dfrac{\epsilon^{\epsilon} - (\epsilon^2)^{\epsilon^2}(2\epsilon)}{-(\log \epsilon)^{-2}\epsilon^{-1}} = -\lim_{\epsilon \to +0} (\log \epsilon)^2 \epsilon \left\{ \epsilon^{\epsilon} - (\epsilon^2)^{\epsilon^2}(2\epsilon) \right\}$
となる.

ここで, $\lim_{\epsilon \to +0} (\log \epsilon)^2 \epsilon = 0$ が $\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ と同様にわかるので,

$\lim_{\epsilon \to +0} \log \epsilon \displaystyle\int_{\epsilon^2}^{\epsilon} t^t dt = 0$ である.
従って,

$I = \lim_{\epsilon \to +0} \displaystyle\int_{\epsilon}^{1} (-x^x \log x) dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{1} \left\{ -x^x(\log x + 1) dx + \int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right\}$

　対数微分法により $(x^x)' = x^x(\log x + 1)$ なので,

$= \lim_{\epsilon \to +0} \left\{ -\left[x^x \right]_{\epsilon}^{1} + \displaystyle\int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right\}$

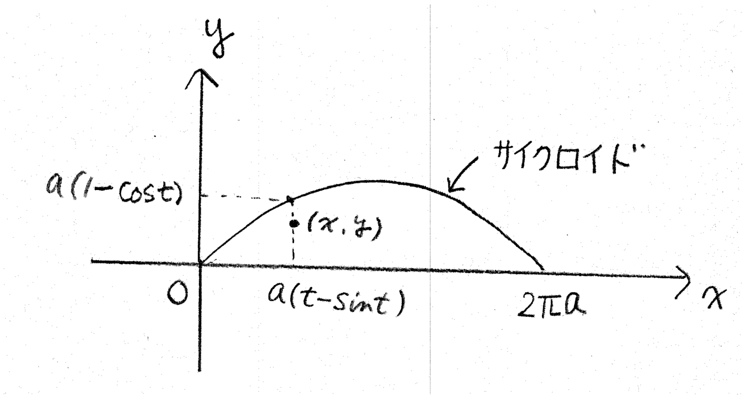
$= \lim_{\epsilon \to +0} \left(-1 + \epsilon^{\epsilon} + \displaystyle\int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right)$

再び $\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon^{\epsilon} = 1$ より

$I = \displaystyle\int_{0}^{1} x^x dx = \int_{0}^{1} y^y dy$

$\boxed{51}$ (1)与えられた図形は次の様に表される。

$D=\{(x,y)\mid\ x=a(t-\sin t),\ 0\le y\le a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi\}$



また図形の重心を $(\bar{x},\bar{y})$ とおくと, $\bar{x}=\dfrac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}$, $\bar{y}=\dfrac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$

変数 x,y は変数 t,y により $x=a(t-\sin t)$, $y=y$ と表されるので,

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)}=\begin{vmatrix} a(1-\cos t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=a(1-\cos t)$, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)}\right|=a(1-\cos t)$ となり,

$D'=\{(t,y)\mid\ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le y\le a(1-\cos t)\ \}$ とおくと

$$\iint_D dxdy=\iint_{D'} a(1-\cos t)\ dtdy=a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)}dy\}dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$(1-\cos t)^2=1-2\cos t+\cos^2 t=1-2\cos t+\frac{\cos 2t+1}{2}=\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t$$

を用いて

$$\iint_D dxdy=a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2$$

さらに,

$$\iint_D xdxdy=\iint_{D'} a(t-\sin t)a(1-\cos t)\ dtdy=a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)}dy\}dt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt$$

$$= a^3\{\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 dt - \int_0^{2\pi} \sin t\ (1-\cos t)^2 dt\}$$

$(1-\cos t)^2$ に関する上記の式変形を用いて

$$\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} t(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = \int_0^{2\pi} t(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)'\ dt$$

$$= \left[t(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)dt$$

$$= 6\pi^2 - \left[\frac{3}{4}t^2 + 2\cos t - \frac{1}{8}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = 6\pi^2 - 3\pi^2 = 3\pi^2$$

また $\int_0^{2\pi} \sin t\ (1-\cos t)^2 dt = \frac{1}{3}\left[(1-\cos t)^3\right]_0^{2\pi} = 0$　となるので,

$$\iint_D x dx dy = 3\pi^2 a^3$$

さらに,

$$\iint_D y dx dy = \iint_{D'} ya(1-\cos t)\ dt dy = a\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)} y\ dy\}dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \frac{a^3}{2}\{\int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 dt + \int_{\pi}^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt\}$$

$$= \frac{a^3}{2}\{\int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 dt + \int_0^{\pi} (1+\cos t)^3 dt\} = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi} (2 + 6\cos^2 t)\ dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi} (2 + 6\frac{\cos 2t + 1}{2})dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi} (5 + 3\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}\left[5t + \frac{3}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$

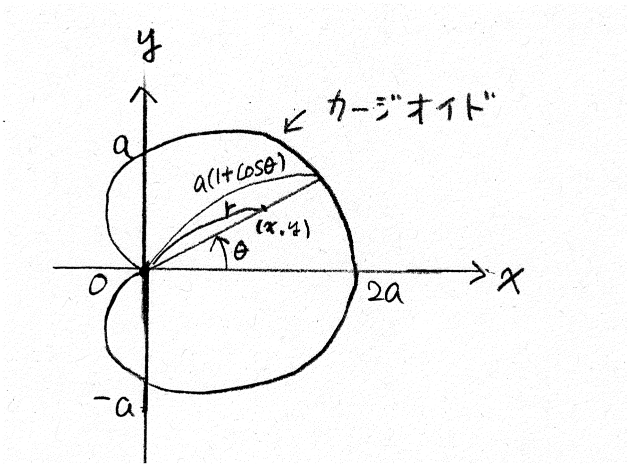
$$= \frac{5}{2}\pi a^3$$

以上より重心の座標は, $\bar{x} = \dfrac{3\pi^2 a^3}{3\pi a^2} = \pi a$　　$\bar{y} = \dfrac{\frac{5}{2}\pi a^3}{3\pi a^2} = \dfrac{5}{6}a$

注意　与えられた図形は直線 $x = \pi a$ に関し対称なので重心は直線 $x = \pi a$ 上にあることから, $\bar{x} = \pi a$ を導くこともできる。

(2) 与えられた図形は次の様に表される。

$D=\{(x,y)\mid\ x=r\cos\theta,\ x=r\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a(1+\cos\theta)\ \}$



また図形の重心を $(\bar{x},\bar{y})$ とおくと, $\bar{x}=\dfrac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}$, $\bar{y}=\dfrac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$

テキスト 6 章 p.230　6.10 より, $dxdy=rdrd\theta$

$$\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)} rdr\}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\ (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\ (1+2\cos\theta+\frac{\cos 2\theta+1}{2})d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot 3\pi=\frac{3}{2}\pi a^2$$

さらに,

$$\iint_D xdxdy=\int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta dr\}d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3 d\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$ （周期関数の性質より）

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}(3\cos^2\theta + \cos^4\theta)d\theta$$ （偶関数・奇関数の性質より）

$$= \frac{2a^3}{3}\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta + \cos^4\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3\cos^2\theta + \cos^4\theta)d\theta\}$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta + \cos^4\theta)d\theta = \frac{4a^3}{3}\{3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta\} = \frac{5}{4}\pi a^3$$

さらに,

$$\iint_D ydxdy = \int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta\, dr\}d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta(1+\cos\theta)^3 d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{-1}{4}\left[(1+\cos\theta)^4\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{-1}{4}\left[(1+\cos\theta)^4\right]_0^{2\pi} = 0$$

以上より重心の座標は, $\bar{x} = \dfrac{\frac{5}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \dfrac{5}{6}a \qquad \bar{y} = \dfrac{0}{\frac{3}{2}\pi a^2} = 0$

注意　与えられた図形は x 軸に関し対称なので重心は x 軸上にあることから, $\bar{y} = 0$ を導くこともできる。