

問題の略解 (計算例付き)

2022 年 2 月 20 日

1 章

問 1 第 3 行 $[9 \ 0 \ -1 \ -2]$, 第 4 列 $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$, $(2, 3)$ 成分 7 , $(3, 4)$ 成分 -2

問 2 (1) $-A+2B = \begin{bmatrix} -1+0 & -2+2\cdot 4 & -3+2\cdot(-2) \\ -4+2\cdot 1 & -5+2\cdot 3 & -6+2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -7 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 11 & 19 & 33 \end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 16 \\ 14 & 14 & 10 \end{bmatrix}$

問 3 $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1+3\cdot 4 & 0\cdot 2+3\cdot 5 & 0\cdot 3+3\cdot 6 \\ 1\cdot 1+4\cdot 4 & 1\cdot 2+4\cdot 5 & 1\cdot 3+4\cdot 6 \\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 5 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 17 & 22 & 27 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

問 4 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 2] = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

問 5 $\sum_{ijk} a_{ij} \delta_{jk} b_{jk} \delta_{ji} = \sum_{ij} a_{ij} b_{jj} \delta_{ji} = \sum_i a_{ii} b_{ii}$

問 6 (1) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$, $BA = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq O$

(2) $X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ において, 方程式 $AX = E$ を成分で表すと,

$AX = \begin{bmatrix} x+y & z+w \\ 2x+2y & 2z+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \therefore \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} z+w = 0 \\ 2z+2w = 1 \end{cases}$ となり, この解 X は存在しない.

$YA = E$ も同様.

(3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $AB = BA$.

問 7 ${}^tA = \begin{bmatrix} 2i & -3i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 3i & 1+2i \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} -2i & 3i \\ 1 & 1+2i \end{bmatrix}$

問 8 $\overline{(ABC)} = \overline{(AB)}\overline{C} = \overline{(A\overline{B})}\overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $(ABC)^* = C^*(AB)^* = C^*(B^*A^*) = C^*B^*A^*$

問 9 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$, $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

問 10 (4) $\overline{A(A^{-1})} = \overline{AA^{-1}} = \overline{E} = E$, $\overline{(A^{-1})A} = \overline{A^{-1}A} = \overline{E} = E$ より $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

(5) $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = E^* = E$, $(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = E^* = E$ より $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

問 11 $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = \{A_1(A_2\cdots A_k)\}^{-1} = (A_2\cdots A_k)^{-1}A_1^{-1} = (A_3\cdots A_k)^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1} = \cdots = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

問 12 左から順に A, B, C, D とするとき,

$${}^tA = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A. \quad {}^tB = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 2i \\ 2 & -2i & 3 \end{bmatrix}^* = \overline{\begin{bmatrix} 1 & -i & 2 \\ i & 2 & -2i \\ 2 & 2i & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 2i \\ 2 & -2i & 3 \end{bmatrix} = C. \quad {}^tDD = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

問 13 ${}^t(\frac{1}{2}(A+{}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA+{}^t{}^tA) = \frac{1}{2}(A+{}^tA)$. ${}^t(\frac{1}{2}(A-{}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA-{}^t{}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA-{}^tA) = -\frac{1}{2}(A-{}^tA)$.
 $\frac{1}{2}(A+{}^tA) + \frac{1}{2}(A-{}^tA) = A$.

問 14 $A = [a_{ij}]$. $B = [b_{ij}]$ を上三角行列とする, 従って $i > j$ のとき $a_{ij} = b_{ij} = 0$. このとき $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ は,

$k < i$ のとき $a_{ik} = 0$, $k \geq i > j$ のとき $b_{kj} = 0$ より 0 . $\therefore AB$ は上三角行列. 同様に, $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii}$.

下三角行列も同様.

問 15 $A = [a_{ij}]$. $B = [b_{ij}]$ とする.

(1) $\text{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr } A + \text{tr } B$. $\text{tr } sA = \sum_{i=1}^n sa_{ii} = s\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right) = s \text{tr } A$.

$$(2) \operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \operatorname{tr} BA.$$

問 16 (1) $\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} A+XC & B+XD \\ C & D \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} A & BP \\ C & DP \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} A & AX+B \\ C & CX+D \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$

1 章章末問題

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = [3 \ 2]$ のとき, 次を求めよ.

(1) tAA (2) A^tA (3) AB (4) B^2 (5) $\mathbf{ab}$ (6) ${}^t\mathbf{aBa}$

(1) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (6) -6

2 3つの2次正方行列 (パウリ (Pauli) のスピン行列という)

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

に対し, 次を示せ. ここで i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ である.

(1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = E = -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z$ ($\sigma_x\sigma_y\sigma_z = iE$)

(2) $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$

略

3 $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ 1 & 3+i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3-2i & -i \\ 2+i & 0 \end{bmatrix}$ ($i = \sqrt{-1}$) のとき, 次を求めよ.

(1) A^* (2) tA (3) $A+2\overline{B}$ (4) $(1+i)A$ (5) AB

(1) $\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 2+i & 3-i \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 2-i & 3+i \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 7+5i & 2+i \\ 5-2i & 3+i \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2i & 3+i \\ 1+i & 2+4i \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 10+i & 1-i \\ 8+3i & -i \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とするとき, $ad-bc \neq 0$ ならば A は正則で, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であることを示せ.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = E, \quad \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = E \text{ より.}$$

5 次の正方行列 A の n 乗 A^n ($n = 2, 3, \dots$) を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^n = O$ ($n \geq 3$) (2) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$ (3) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 次を示せ.

(1) $AB = E$, $BC = E$ ならば $A = C$.

(2) A が正則行列のとき, $AB = AC$, または $BA = CA$ ならば $B = C$.

(3) A が正則行列のとき, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

(1) $A = AE = A(BC) = (AB)C = EC = C$.

(2) $AB = AC$ の両辺に A^{-1} を左から掛けると, 左辺 $= A^{-1}AB = EB = B$, 右辺 $= A^{-1}AC = C$ より $B = C$. 同様に, $BA = CA$ の両辺に A^{-1} を右から掛けて, $B = BAA^{-1} = CAA^{-1} = C$.

(3) $A^n(A^{-1})^n = A^{n-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{n-1} = A^{n-1}E(A^{-1})^{n-1} = A^{n-1}(A^{-1})^{n-1} = \dots = E$.

同様に, $(A^{-1})^n A^n = E$ より $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

7 正方行列 A, B が可換ならば, A^n ($n = 2, 3, \dots$) と B は可換であり, A が正則ならば A^{-n} ($n = 1, 2, \dots$) も B と可換であることを示せ.

$A^n B = A^{n-1}(AB) = A^{n-1}BA = A^{n-2}BA^2 = \dots = BA^n$. A が正則のとき $n \geq 1$ として, $A^n B = BA^n$ の両辺に左から A^{-n} を掛けると, 左辺 $= A^{-n}A^nBA^{-n} = BA^{-n}$, 右辺 $= A^{-n}B$ より $BA^{-n} = A^{-n}B$.

8 A, B を正則行列とすると,

(1) $P = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ は正則で, $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$ であることを示せ.

(2) $Q = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ の逆行列 Q^{-1} を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}CB^{-1} + CB^{-1} \\ O & BB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}C - A^{-1}CB^{-1}B \\ O & B^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$(2) (1) \text{ で } C = O \text{ とおけば, } Q^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

9 行列 A, B が次をみたすための必要十分条件を求めよ.

$$(1) (A+B)(A-B) = A^2 - B^2. \quad (2) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

(1),(2) とともに, 左辺 - 右辺 $= BA - AB$ より, 左辺 $=$ 右辺 の必要十分条件は $AB = BA$.

10 n 次正方行列 A, B, C と, n 次正則行列 P について次を示せ.

$$(1) \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \quad (2) \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

(注) (1) は A が (m, n) 型, B が (n, ℓ) 型, C が (ℓ, m) 型であれば成り立つ.

一般には $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ である.

$$(1) \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \text{ より } \operatorname{tr}((AB)C) = \operatorname{tr}(C(AB)) = \operatorname{tr}((CA)B) = \operatorname{tr}(B(CA)).$$

$$(2) (1) \text{ より } \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr} A.$$

11 $AB - BA = E_n$ となる行列 A, B は存在しないことを示せ.

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0, \operatorname{tr} E_n = n \text{ より存在すれば矛盾する.}$$

12 行列 A に対し次を示せ.

(1) A^*A はエルミート行列である. (2) tAA は対称行列である.

(3) $\operatorname{tr}(A^*A) \geq 0$. (4) $\operatorname{tr}(A^*A) = 0$ ならば $A = O$.

$$(1) (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A. \quad (2) {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA.$$

$$(3) (A^*A)_{ii} = \sum_{j=1}^m (A^*)_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^m \overline{a_{ji}} a_{ji} = \sum_{j=1}^m |a_{ji}|^2 (\geq 0) \text{ より, } \operatorname{tr} A^*A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ji}|^2 \geq 0.$$

$$(4) (2) \text{ より } \operatorname{tr} A^*A = 0 \Rightarrow \text{全ての } i, j \text{ について } |a_{ji}|^2 = 0 \Rightarrow A = O.$$

13 任意の列ベクトル x に対し $Ax = Bx$ ならば $A = B$ であることを示せ.

$$x = e_j \text{ とすれば } a_j = Ae_j = Be_j = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \therefore A = B.$$

14 A を n 次正方行列, k を自然数とすると次を示せ.

(1) $A^k = E$ となる k が存在するとき A は正則である.

(2) べき等行列 A ($A^2 = A$ をみたす行列) は $A \neq E$ ならば正則でない.

(3) べき零行列 A ($A^k = O$ となる k がある行列) は正則でない.

$$(1) k = 1 \Rightarrow A = E. \quad k \geq 2 \text{ のとき } A^{k-1}A = A^k = E = AA^{k-1} \text{ より } A^{-1} = A^{k-1}.$$

(2) $A \neq E$ を正則と仮定すると, 両辺に A^{-1} を掛ければ $A = E$ となり矛盾.

(3) A を正則と仮定すると, 両辺に A^{-k} を掛ければ $E = O$ となり矛盾.

15 A がべき零行列ならば $E + A$, $E - A$ は正則であることを示せ. さらに, $A^k = O$ のとき $(E + A)^{-1}$, $(E - A)^{-1}$ を A で表せ.

$$(E + A) \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i \right) (E + A) = E + (-1)^{k-1} A^k = E \text{ より } E + A \text{ は正則で,}$$

$$(E + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i = E - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1}.$$

$$(E - A) \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i \right) (E - A) = E - A^k = E \text{ より } E - A \text{ は正則で,}$$

$$(E - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

16 正方行列 P は ${}^t P P = E$ をみたし, $E + P$ は正則とする. このとき次を示せ.

(1) $P(E + P)^{-1} = (E + P)^{-1} P$. (2) $A = (P - E)(E + P)^{-1}$ は交代行列である.

(3) (2) の A について, $E - A$ は正則である. (4) $(E + A)(E - A)^{-1} = P$.

(1) $P(E + P) = P + P^2 = (E + P)P$ と問題 7 より $P(E + P)^{-1} = (E + P)^{-1} P$.

(2) 注意 1.7 より P は正則で, ${}^t(E \pm P) = E \pm {}^t P = {}^t P P \pm {}^t P = {}^t P(P \pm E)$ より,

$$\begin{aligned} {}^t A &= {}^t(E + P)^{-1} {}^t(P - E) = (E + {}^t P)^{-1} {}^t P(E - P) = \{ {}^t P(P + E) \}^{-1} {}^t P(E - P) \\ &= (P + E)^{-1} {}^t P^{-1} {}^t P(E - P) = (P + E)^{-1}(E - P) = (E - P)(P + E)^{-1} = -A. \end{aligned}$$

(3) $E - A = (P + E)(P + E)^{-1} - (P - E)(E + P)^{-1} = \{(P + E) - (P - E)\}(E + P)^{-1}$
 $= 2(E + P)^{-1}$ より $E - A$ は正則で, $(E - A)^{-1} = \frac{1}{2}(E + P)$.

(4) $E + A = 2P(E + P)^{-1}$. $(E + A)(E - A)^{-1} = 2P(E + P)^{-1} \frac{1}{2}(E + P) = P$.

17 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ の正方行列 A の n 乗 A^n ($n = 2, 3, \dots$) を求めよ.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ とおく. } A = aE + N, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = N^4 = \cdots = O \text{ より,}$$

$$A^n = (aE + N)^n = a^n E + {}_n C_1 a^{n-1} E^{n-1} N + {}_n C_2 a^{n-2} E^{n-2} N^2 + \cdots + N^n$$

$$= a^n E + n a^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2 = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

18 n 次正方行列 X, Y に対し, $XY - YX$ を X, Y の交換子積といい, ここでは $[X, Y]$ と表す:

$$[X, Y] = XY - YX$$

X, Y, Z を n 次正方行列, s, t をスカラーとするとき次を示せ.

(1) $[Y, X] = -[X, Y]$. (2) $[sX + tY, Z] = s[X, Z] + t[Y, Z]$.

(3) (ヤコビ (Jacobi) の恒等式) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

(4) X, Y が交代行列ならば $[X, Y]$ も交代行列である.

(1) $[Y, X] = YX - XY = -[X, Y]$.

(2) $[sX + tY, Z] = (sX + tY)Z - Z(sX + tY) = s(XZ - ZX) + t(YZ - ZY) = s[X, Z] + t[Y, Z]$.

(3) 左辺 $= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) + (YZ - ZY)X - X(YZ - ZY) + (ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ) = 0$.

又は, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] = (XY - YX)Z - Z(XY - YX) + (YZ - ZY)X - X(YZ - ZY)$

$$= -YXZ - ZX Y + YZ X + XZY = -(ZX - XZ)Y + Y(ZX - XZ) = -[[Z, X], Y].$$

(4) ${}^t[X, Y] = {}^t(XY) - {}^t(YX) = {}^t Y {}^t X - {}^t X {}^t Y = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = YX - XY = -[X, Y]$.

19 1つの成分が 1, 他の成分が 0 である行列を**行列単位**といい, (k, ℓ) 成分が 1 の行列単位を $E_{k\ell}$ と表す:

$$(E_{k\ell})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}, \quad E_{k\ell} = [\delta_{ik}\delta_{j\ell}]$$

このとき次を示せ.

$$(1) \ m \times n \text{ 行列 } A = [a_{ij}] \text{ に対し, } A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}. \quad (2) \ E_{ij} E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}.$$

(1) 両辺の (i, j) 成分は a_{ij} .

$$(2) \ (p, q) \text{ 成分をみると, } (E_{ij} E_{k\ell})_{pq} = \sum_r (E_{ij})_{pr} (E_{k\ell})_{rq} = \sum_r (\delta_{ip} \delta_{jr}) (\delta_{kr} \delta_{\ell q}) = \delta_{ip} \delta_{jk} \delta_{\ell q} = \delta_{jk} (E_{i\ell})_{pq}$$

20 n 次行列 A が任意の n 次行列と可換ならば A はスカラー行列であることを示せ.

$AE_{k\ell} = E_{k\ell}A$ ($1 \leq k, \ell \leq n$) より $a_{ij} = 0$, $a_{ii} = a_{jj}$ ($i \neq j$) を示す.

$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_i a_{ik} E_{i\ell}$ (第 ℓ 列が $\mathbf{a}_j$, 他の列が $\mathbf{0}$ の行列),

$E_{k\ell}A = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_j a_{\ell j} E_{kj}$ (第 k 行が $\mathbf{a}^\ell$, 他の行が $\mathbf{0}$ の行列).

$\ell = k$ として $\sum_i a_{ik} E_{ik} = \sum_j a_{kj} E_{kj}$ より, $i \neq k, j \neq k \Rightarrow a_{ik} = a_{kj} = 0$, 即ち, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. これを代入して,

$AE_{k\ell} = a_{kk} E_{k\ell}$, $E_{k\ell}A = a_{\ell\ell} E_{k\ell}$ より $a_{kk} = a_{\ell\ell}$. 即ち, $a_{11} = \cdots = a_{nn}$. $\therefore A = a_{11}E$.

2章

問1 ここでは行列の積の計算を行って、対応する基本変形と一致することを確かめる。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{2} & \frac{4}{2} & \frac{8}{2} \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3+3 & -6+6 & -9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

問2 (1),(2),(3) については i, j, k は全て異なるとするとき、両辺は次の行列になる。

(1) E の (i, i) 成分を a に、 (j, j) 成分を b にかえた行列 ($i = j$ のときは E の (i, i) 成分を ab にかえた行列)

(2) E の (i, j) 成分を a に、 (i, k) 成分を b にかえた行列 (3) E の (i, j) 成分を a に、 (k, j) 成分を b にかえた行列

(4) 右辺を右から順に基本変形を行うと左辺の行列になる

$$\text{問3 (1)} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & & & 1 & 2 & 1 & 2 & & & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 11 & r_2-2r_1 & & 0 & 0 & -1 & 7 & -r_2 & & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & r_3-3r_1 & & 0 & 0 & 1 & -7 & & & 0 & 0 & 1 & -7 \\ & & & & & & & & & & & & r_3-r_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 2$$

$$(2) \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & & & 1 & 2 & 2 & 0 & & & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & r_2-2r_1 & & 0 & 0 & 0 & 3 & r_2 \leftrightarrow r_3 & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & r_3+r_1 & & 0 & 1 & 3 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -4 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{階数 } 3$$

$$(3) \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & & & 1 & 2 & 2 & 0 & & & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & r_2-r_1 & & 0 & -3 & -1 & 2 & -\frac{1}{3}r_2 & & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & 0 & 4 & 4 & r_3-3r_1 & & 0 & -6 & -2 & 4 & & & 0 & -6 & -2 & 4 \\ & & & & & & & & & & & & r_1-2r_2 & & 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ & & & & & & & & & & & & & & r_3+6r_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 2$$

問4 係数行列 A が正方行列である連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が唯一つの解をもつことと A が正則であることは同値であることを示せ。

A が正則 $\Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ が唯一つの解. A は n 次とする. $\text{rank } A \leq \text{rank } [A, \mathbf{b}] \leq n$ と定理 2.4 より, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が唯一つの解をもつ $\Leftrightarrow \text{rank } [A, \mathbf{b}] = \text{rank } A = n \Leftrightarrow \text{rank } A = n$. 定理 2.8 より A は正則.

問5 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ が $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解ならば, 任意の定数 $t_1, \dots, t_s$ に対し $t_1\mathbf{x}_1 + \dots + t_s\mathbf{x}_s$ も $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解であり, $\tilde{\mathbf{d}}$ が $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解ならば $\tilde{\mathbf{d}} + t_1\mathbf{x}_1 + \dots + t_s\mathbf{x}_s$ も $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることを示せ. $A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, \dots, s$) より

$$A(t_1\mathbf{x}_1 + \dots + t_s\mathbf{x}_s) = t_1A\mathbf{x}_1 + \dots + t_sA\mathbf{x}_s = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$A(\tilde{\mathbf{d}} + t_1\mathbf{x}_1 + \dots + t_s\mathbf{x}_s) = A\tilde{\mathbf{d}} + A(t_1\mathbf{x}_1 + \dots + t_s\mathbf{x}_s) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

以下, s, t は任意定数とする.

問6 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ 2x + 5y + 7z = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 4z = 2 \end{cases}$$

$$(1) \quad [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \text{rank } A = 2 < \text{rank } [A, \mathbf{b}] = 3 \text{ より解なし.}$$

問7 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 6y + z = 3 \\ -x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 2z = -3 \\ -x - y + z = 3 \\ y + 3z + 2w = 4 \end{cases}$$

$$(1) \quad [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3+r_2]{c_2 \leftrightarrow c_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{より,}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{よ} \text{ り, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} . \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(1) \begin{cases} x - 2y + 3z + w = 0 \\ 3x + y - 5z - 4w = 0 \\ -2x + 6y - 9z - 2w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + z - 3w = 0 \\ 3x + 6y + 4z + 2w = 0 \\ 5x + 10y + 6z - 4w = 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned}
 (1) \quad & A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 & r_2-3r_1 & 0 & 7 & -14 & -7 \\ -2 & 6 & -9 & -2 & r_3+2r_1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & r_1+2r_2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & r_3-2r_2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1+r_3 \\ r_2+2r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \\
 (2) \quad & A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -3 & r_2-3r_1 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & r_3-5r_1 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1-r_2 \\ r_3-r_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ c_2 \leftrightarrow c_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{より} \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 14 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \therefore \\
 & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} t
 \end{aligned}$$

問 10 次のベクトル $\mathbf{b}$ を次の $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ の一次結合で表せ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

問 11 次のベクトルの組を左から順に見て一次独立なベクトルの組を選び出し、残りをその一次結合で表せ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{|ccc|ccc|c|ccc|} \hline & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & r_2-3r_1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -8 & \frac{1}{2}r_2 & \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & r_3-2r_1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{より } \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\} \text{ は一次独立.}$$

問 12 次の行列が正則であるか調べ、正則ならば逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|ccc|} \hline r_1 - r_3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & -1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{より } A \text{ は正則で, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$\begin{array}{c|cc|cc} r_1+3r_3 & 1 & 0 & 0 & 1-3 & 2 \\ r_2-3r_3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3-1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 2-1 & 0 \end{array} \text{ より } A \text{ は正則で, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) [A, E] = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \\ \hline & & & r_2-4r_1 & & & & & & r_3-7r_1 & & \\ & & & 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & r_3-2r_2 & & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & -2 & 1 \end{array} \text{ rank } A = 2 < 3 \text{ より } A \text{ は正則でない.}$$

問 13 例 2.16 の計算を実行し, 積 $A^{-1}C$ と一致するか確かめよ.

$$[A, C] = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & -6 & -5 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 8 & 9 & 0 & -7 & -6 & 2 & -2 & -6 \\ \hline & & & r_2-3r_1 & & & & & & r_2-r_3 & & \\ & & & 0 & -6 & -5 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ & & & 0 & -7 & -6 & 2 & -2 & -6 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} r_1+r_3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 9 \\ r_2-r_3 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 & -12 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 15 \end{array} \quad A^{-1}C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+16-21 & 8+20-24 & 12+24-27 \\ -7-24+35 & -14-30+40 & -21-36+45 \\ 9+28-42 & 18+35-48 & 27+42-54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 4 & -4 & -12 \\ -5 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

問 14 次の行列の標準形を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

標準形は行階段型行列に変形した段階で分かる. ここでは (1) のみ標準形までの変形例を書き, (2),(3) は行階段型行列までの変形例を書いておく.

$$(1) A = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & r_1+r_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & c_3+c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & r_2-3r_1 & 0 & -2 & -4 & 0 & -2 & -4 & -\frac{1}{2}r_2 & 0 & 1 & 2 & c_3-2c_2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & r_3-5r_1 & 0 & -4 & -8 & r_3-2r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \text{ より標準形は } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & r_2-2r_1 & 0 & 0 & -1 & -2 & r_2 \leftrightarrow r_3 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & r_3-3r_1 & 0 & -2 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \text{ より標準形は } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 2 & r_1 \leftrightarrow r_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 & 5 & r_3-2r_1 & 0 & -1 & -1 & r_3+r_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & r_4-3r_1 & 0 & -1 & -3 & r_4+r_2 & 0 & 0 & -1 & r_4+r_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \text{ より標準形は } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

問 15

$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B について次を示せ.

(1) $m > n$ ならば $AB \neq E_m$ (2) $AB = E_m$, $BA = E_n$ ならば $m = n$

定理 2.13(1),(4) より, (1) $\text{rank } AB \leq \text{rank } A \leq n < m = \text{rank } E_m \therefore AB \neq E_m$.

(2) $m = \text{rank } AB \leq \text{rank } A \leq n$, $n = \text{rank } BA \leq \text{rank } B \leq m$ より $m = n$.

問 16 次の示せ.

$$(1) \text{rank } [A, A] = \text{rank } A \quad (2) \text{rank } \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = \text{rank } A$$

(1) 列基本変形, あるいは $[A, A] \begin{bmatrix} E & -E \\ O & E \end{bmatrix} = [A, O]$ により. $\text{rank } [A, A] = \text{rank } [A, O] = \text{rank } A$.

(2) 行基本変形, あるいは $\begin{bmatrix} E & O \\ -E & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$ により, $\text{rank } \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \text{rank } A$. (問題 11 参照)

2 章章末問題

以下, 階段行列等への変形は適宜省略する.

1 次の行列の階段行列と階数を求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} & (2) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} & (3) & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\
 (4) & \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix} & (5) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} & (6) & \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (1) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{階数 } 2. & (2) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 2. & (3) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{階数 } 3. \\
 (4) & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 2. & (5) & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 3. & (6) & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{階数 } 3.
 \end{aligned}$$

2 掃き出し法を用いて次の連立一次方程式を解け.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{cases} x + 4y - 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases} & (2) & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 8 \end{cases} & (3) & \begin{cases} x - 2y + 4z = -3 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} & (4) & \begin{cases} x + 2y + 3z - 4w = -1 \\ 2x + 4y + 7z - 4w = 1 \\ 3x + 6y + 11z - 4w = 3 \end{cases} & (5) & \\
 & \begin{cases} x + 3y - 5z - 2w = 1 \\ x - 2y + 5z + w = 0 \\ -3x + 3y - 9z - w = 0 \\ -2x - y + w = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(1) [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ rank } A = 2 < \text{rank } [A, \mathbf{b}] = 3 \text{ より解なし}$$

$$\begin{aligned}
 (4) [A, \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 11 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -16 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より} \\
 \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) [A, \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -9 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より} \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3 掃き出し法を用いて次の同次連立一次方程式を解け.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases} & (2) & \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \end{cases} & (3) & \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} & (4) & \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -x + z + w = 0 \end{cases} & (5) & \\
 & \begin{cases} 9x + 10y + 11z + 12w = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w = 0 \\ x + 4y + 9z + 16w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad (2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

$$(5) A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

4 (1) $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ の一次結合として表せ.

(2) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ の一次結合として表せ.

$$(1) [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5 次のベクトルの組は一次独立かどうかを判定せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, (3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ベクトルの組を行階段型行列に変形して階数を調べ、定理 2.6 を適用する.

$$(1) A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \text{ rank } A = 3 \text{ より 一次独立.}$$

$$(2) A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rank } A = 2 \text{ より 一次従属.}$$

$$(3) A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rank } A = 2 \text{ より 一次従属.}$$

6 次のベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$ を左から順に見て一次独立なベクトルの組を 1 組選び出し、残りのベクトルをその一次結合で表せ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$$

ベクトルの組を階段行列に変形して定理 2.7 を適用する.

$$(1) [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5 \text{ は一次独立. } \mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$$

$$a_3 = -4a_1 + 3a_2, \quad a_4 = a_1 + a_2, \quad a_5 = -2a_1 + 5a_2.$$

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & (2) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} & (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ (4) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -2 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} & (5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} & (6) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

又は1章の問題4より $A^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-r_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ より } A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} r_1+r_3 & 10 & 0 & 5 & 9 & 1 & & & & & \\ r_2+r_3 & 01 & 0 & 10 & 17 & 1 & & & & & \\ & 00 & -1 & 8 & 14 & -1 & -r_3 & 00 & 1 & -8 & -14 & -1 \end{array} \quad \text{よ} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 10 & 17 & 1 \\ -8 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_1+r_3 & 100-1 & -3 & 2-1 & 1 & r_1+r_4 \\ \hline r_2-2r_3 & 010 & 1 & 2-1 & 2-2 & r_2-r_4 \\ \hline & 001 & 1 & 0 & 0-1 & 1 \\ \hline & 000 & 1 & 0 & 0 & 6-5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1000 & -3 & 2 & 5-4 & & \\ \hline 0100 & 2-1 & -4 & 3 & & \\ \hline 0010 & 0 & 0 & -7 & 6 & \\ \hline 0001 & 0 & 0 & 6-5 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{\tiny $\hookrightarrow$ } A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & -3 & 2 & 5-4 & & \\ \hline & 2-1 & -4 & 3 & & \\ \hline & 0 & 0 & -7 & 6 & \\ \hline & 0 & 0 & 6-5 & & \\ \hline \end{array}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}, \quad -B^{-1}CD^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{より } A^{-1} \text{ が得られる.}$$

[illegible]

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8/3 & -5/3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -8 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

8 次の行列 A, B に対し, $A^{-1}B$ を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A, B] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & r_1-2r_2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & r_1+r_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & -2 & -3 & -5 & -1 & -3 & -1 & r_2+2r_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & r_2+r_3 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 2 & r_3-5r_1 & 0 & -6 & -7 & -4 & -8 & -3 & r_3+6r_2 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 & & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -r_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

9 次の行列 A を階段行列にする正則行列 P と階段行列 $B = PA$ を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 & -7 & 7 \\ 3 & 6 & -6 & -8 & 7 \\ -2 & -4 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad [A, E] = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array} r_{2-2r_1} \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -r_2 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & r_{1-2r_2} & 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array} \bowtie \eta \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad [A, E] = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 & r_2 - r_1 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & r_3 - 2r_1 & 0 & -2 & -5 & -7 & -2 & 0 & 1 & r_3 + 2r_2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} r_1 - 2r_2 \\ -r_3 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{array}$$

$$(3) \quad [A, E] = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 2 & 5 & -6 & -7 & 7 & 1 & 0 & 0 & 25 & -6 & -7 & 7 & 1 & 0 & 0 & r_1 \leftrightarrow r_2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & -8 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & r_2 \leftrightarrow r_3 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 & r_3 + r_1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & r_3 - 2r_1 & 0 & 3 & -6 & -5 & 7 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} r_1 - r_2 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & r_1 - r_3 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & r_2 + 2r_3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & -4 & -5 \\ r_3 - 3r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \quad \text{よ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(注) この問題の A はいずれも「階数 = 行数」なので P は一意的に定まる. (問題 18 の解答参照)

10 次の行列の標準形と階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 12.3 & 23.4 & 34.5 \\ 23.1 & 34.2 & 45.3 \\ 31.2 & 42.3 & 53.4 \end{bmatrix}$$

行階段型行列に変形して階数を求めれば, 標準形も得られる.

$$(1) \quad A = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline & 1 & 2 & 3 & & & & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 & r_2 - 4r_1 & 0 & -3 & -6 & 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 & r_3 - 7r_1 & 0 & -6 & -12 & r_3 - 2r_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{より 階数 } 2, \text{ 標準形 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & r_2-4r_1 & 0 & -3 & -6 & -9 & & 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & r_3-7r_1 & 0 & -6 & -12 & -18 & r_3-2r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & r_4-10r_1 & 0 & -9 & -18 & -27 & r_4-3r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{より 階数 2, 標準形} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)	$A =$	$\begin{array}{ccc} 12.3 & 23.4 & 34.5 \\ 23.1 & 34.2 & 45.3 \\ 31.2 & 42.3 & 53.4 \end{array}$	$\begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 12.3 & 11.1 & 22.2 \\ 23.1 & 11.1 & 22.2 \\ 31.2 & 11.1 & 22.2 \end{array}$	$\begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -10.8 & 0 & 0 \\ 23.1 & 11.1 & 22.2 \\ 8.1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} r_2 + (23.1/10.8)r_2 \\ r_3 + (8.1/10.8)r_2 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -10.8 & 0 & 0 \\ 0 & 11.1 & 22.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$
-----	-------	---	---	---	---	---	--	--

より 階数 2, 標準形 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 次の行列の階数を A の階数 $\text{rank } A$ を用いて表せ.

$$(1) \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix}$$

行と列の基本変形を繰り返すか, (同等だが) 定理 2.13(2) を用いる. A は $m \times n$ 行列とする.

(1) $i = 1, 2, \dots, m$ について第 i 行を第 $m+i$ 行に加えると $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$ より $\text{rank } A$. 又は,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} E & O \\ E & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \text{rank } A.$$

(2) $i = 1, 2, \dots, m$ について第 $m+i$ 行から第 i 行を引くと $\begin{bmatrix} A & A \\ O & O \end{bmatrix}$. $j = 1, 2, \dots, n$ について第 $n+j$ 列から第 j 列を引

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ より } \text{rank } A. \text{ 又は, } \text{rank} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} E & O \\ -E & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -E \\ O & E \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} = \text{rank } A.$$

(3) $i = 1, 2, \dots, m$ について第 i 行から第 $m+i$ 行を引くと $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$ より $2\text{rank } A$. 又は,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} E & -E \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix} = 2\text{rank } A. \text{ (問題 16(3) の略解参照)}$$

12 次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

行階段型行列に変形して a の値により場合分けをする.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 5r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + 6r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+6 \end{bmatrix} \text{ より, } a = -6 : \text{階数 } 2, a \neq -6 : \text{階数 } 3$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - ar_1 \\ r_3 - ar_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \text{ より, } a = 1 : \text{階数 } 1, a \neq 1 : \text{階数 } 3$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - ar_1 \\ r_3 - ar_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix} \quad a = 1 : \text{階数 } 1, a \neq 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1-a}r_2 \\ \frac{1}{a-1}r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1+a & a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - (1+a)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix} \quad a = -\frac{1}{2} : \text{階数 } 2, a \neq 1, -\frac{1}{2} : \text{階数 } 3$$

13 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z + 3w = -3 \\ 2x + 3y + 4w = -2 \\ 2x + y + 4z = a \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 3w = 0 \\ 2x + y - z - 5w = 1 \\ x + 2y + 2z - 3w = -2 \\ 2x - 2z + aw = b \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - y - 3z - 2w = -2 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + w = b \\ -2x - y + aw = 1 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + az = 1 \\ 3x + ay + z = 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ -x - 2y - 2z + 2w = -2 \\ 2x - 2y - z + aw = -1 \\ 3x - 3y + az - w = -2 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + az = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

拡大係数行列を作り, 係数行列の部分を行階段型の行列に変形して解の有無を a, b の値により場合分けし, 解をもつ場合は係数行列の部分に階段行列に変形して解を求める.

$$(1) [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & a+6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-6 \end{bmatrix} \text{ より } a \neq 6 : \text{解なし.}$$

$$a = 6 : \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) [A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & a+6 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & a+6 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 2r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 & b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 & b-2 \end{bmatrix}$$

$$a \neq -4: c := \frac{b-2}{a+4} \text{ とおく} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & r_1+r_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & r_2+2r_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2c \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & r_3-r_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c-1 \\ \frac{1}{a+4}r_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & c & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right] = \frac{b-2}{a+4} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] = \frac{1}{a+4} \left[\begin{array}{c} b-2 \\ 2b-4 \\ -a-b-2 \\ b-2 \end{array} \right]$$

$$b \neq 1 : \text{解なし. } b=1 \text{ か} \cap a=1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad b=1 \text{ か} \cap a \neq 1 : \begin{array}{c|cccc} r_3 \leftrightarrow r_4 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ & 0 & 1 & 2 & 1 \\ & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$(4) \quad [A, \mathbf{b}] = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & r_1 - r_2 \\ 2 & 1 & a & 1 & r_2 - 2r_1 & 0 & -1 & a+2 & -1 & -r_2 & 0 & 1 & -a-2 \\ 3 & a & 1 & 2 & r_3 - 3r_1 & 0 & a-3 & 4 & -1 & & 0 & a-3 & 4 \\ & & & & & & & & & & -1 & r_3 - (a-3)2r_2 & \\ & & & & & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -a-2 & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-2) & 2-a \end{array}$$

$$a \neq -1, 2 : \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & a+1 & 0 & r_1-(a+1)r_3 \\ 0 & 1 & -a-2 & 1 & r_2+(a+2)r_3 \\ \hline \frac{1}{(a+1)(a-2)}r_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-1}{a+1} \\ \frac{-1}{a+1} \end{array} \right] = \frac{1}{a+1} \left[\begin{array}{c} a+1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right]$$

$$a=1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{より 解なし.} \\ \end{array} \quad a=-2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(6) \quad [A, b] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & a & b & r_2 - r_1 & \\ a & b & 1 & 1 & r_3 - ar_1 & \end{array} \right] \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 & r_2 \leftrightarrow r_3 & \\ 0 & b-a & 1-a & 1-a & & \end{array} \right] \quad a=b=1 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$b \neq a \text{ かつ } a = 1, \therefore b \neq 1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix} \text{ より解なし, } b \neq a \text{ かつ } a \neq 1 :$$

14 次の行列が正則かどうかを判定し, 正則であれば逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & -1 \\ 2 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & -7 & 11 \\ 5 & -16 & 25 \\ -8 & 26 & -41 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & b & c \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -19 & 50 & -70 & 58 \\ 20 & -49 & 70 & -61 \\ 20 & -50 & 71 & -61 \\ 21 & -49 & 71 & -64 \end{bmatrix} \quad (7) \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1) 11 \cdot 11 - (-9) \cdot (-9) = 40 \text{ より } A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 11 & -9 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(2) (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) - (-1) \cdot 2 = 3 \text{ より } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ -2 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} [A, E] & 2 & -7 & 11 & 1 & 0 & 0 & & 2 & -7 & 11 & 1 & 0 & 0 & & 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & & 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ & 5 & -16 & 25 & 0 & 1 & 0 & & 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & & 2 & -7 & 11 & 1 & 0 & 0 & & 0 & -3 & 5 & 5 & -2 & 0 \\ & -8 & 26 & -41 & 0 & 0 & 1 & & 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & & 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & & 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline r_1-r_3 & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & & 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & & & & & & & \\ r_2-2r_3 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & & 0 & 1 & 0 & -5 & -6 & -5 & & & & & & & \\ & 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -3 & & & & & & & \end{array} \text{ より } A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 \\ -5 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} [A, E] & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & b & c & 0 & 0 & 1 & & 1 & 0 & c & -ab & 0 & -b & 1 & & 1 & 0 & 0 & c & -ab & r_3 \\ & 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0 & & r_2-ar_3 & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & b & c & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & \end{array} \text{ より } A^{-1} = \begin{bmatrix} ab-c & -b & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} [A, E] & 1 & a & a^2 & a^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a^3 & & r_1-a^2r_3 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 & 2a^3 & & r_1-ar_2 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ & 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 1 & 0 & -3a^2 & & r_2-2ar_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & 3a^2 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ & 0 & 0 & 1 & 3a & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3a & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3a & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3a \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \text{ より } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} [A, E] & -19 & 50 & -70 & 58 & 1 & 0 & 0 & 0 & & r_1+r_2 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & & r_2-20r_2 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & 20 & -49 & 70 & -61 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 20 & -49 & 70 & -61 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & -69 & 70 & -1 & -20 & -19 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & 20 & -50 & 71 & -61 & 0 & 0 & 1 & 0 & & r_3-r_2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & & & & & & & \\ & 21 & -49 & 71 & -64 & 0 & 0 & 0 & 1 & & r_4-r_2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & & & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|cccc} & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & -69 & 70 & -1 & -20 & -19 & 0 & 0 & \\ & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \\ r_4-r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & \end{array} \text{ rank } A < 4 \text{ より正則でない.}$$

$$(7) \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} [A, E] & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & a-1 & 1-a & -1 & 1 & 0 & & 0 & a-1 & 1-a & -1 & 1 & 0 & & 0 & a-1 & 1-a & -1 & 1 & 0 \\ & a & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 1-a & 1-a^2 & -a & 0 & 1 & & 0 & 0 & (1-a)(a+2) & -a-1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & (1-a)(a+2) & -a-1 & 1 & 1 \end{array}$$

$a = 1, -2$: rank $A < 3$ より正則でない,

$$a \neq 1, -2 : c := \frac{1}{(a-1)(a+2)} \text{ とおく. } \frac{1}{a-1} = (a+2)c \text{ より}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} \frac{1}{a-1}r_2 & 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & a+1 & a(a+2)c & -(a+2)c & 0 & & r_1-(a+1)r_3 & 1 & 0 & 0 & -c & -c & (a+1)c \\ & 0 & 1 & -1 & -(a+2)c & (a+2)c & 0 & & 0 & 1 & -1 & -(a+2)c & (a+2)c & 0 & & r_1+r_3 & 0 & 1 & 0 & -c & (a+1)c & -c \\ & 0 & 0 & 1 & (a+1)c & -c & -c & & & 0 & 0 & 1 & (a+1)c & -c & -c & & 0 & 0 & 1 & (a+1)c & -c & -c \end{array}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

15 n 次正方行列 A について, 次は同値であることを示せ.

(1) A は正則である. (2) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみをもつ.

(3) 任意の n 次元列ベクトル $\mathbf{b}$ に対し, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は唯一つの解をもつ.

(1) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.8). (2) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.5). $\text{rank } [A, \mathbf{b}] \leq n$ より (3) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.4). $\therefore$ これらは全て同値.

16 A, B を同じ型の行列とすると、次を示せ.

$$(1) \operatorname{rank} [A, 2A+B] = \operatorname{rank} [A, B] \quad (2) \operatorname{rank} [A, B, 3A-2B] = \operatorname{rank} [A, B]$$

$$(3) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

定理 2.13(2)(左右から正則行列を掛けても階数は変わらない) を用いる.

$$(1) [A, B] \begin{bmatrix} E & 2E \\ O & E \end{bmatrix} = [A, 2A+B] \text{ より } \operatorname{rank} [A, 2A+B] = \operatorname{rank} [A, B].$$

$$(2) [A, B, O] \begin{bmatrix} E & O & 3E \\ O & E & -2E \\ O & O & E \end{bmatrix} = [A, B, 3A-2B] \text{ より } \operatorname{rank} [A, B, 3A-2B] = \operatorname{rank} [A, B, O] = \operatorname{rank} [A, B].$$

$$(3) \begin{bmatrix} E & 3E \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 2E \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} \text{ より } \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

$PAQ = F_{mn}(r)$, $P'BQ' = F_{mn}(s)$ (P, Q, P', Q' は正則行列) と標準形に変形するとき

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & O \\ O & Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{mn}(r) & O \\ O & F_{mn}(s) \end{bmatrix}. \text{ 右辺は行と列の交換により } F_{2m, 2n}(r+s) \text{ に変形できるので,}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r + s = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B. \therefore \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

17 $m \times n$ 行列 A において $\operatorname{rank} A < m$ ならば, A を係数行列とする連立一次方程式 $Ax = b$ が解をもたない様な m 次元ベクトル b が存在することを示せ.

A を階段行列 $B = PA$ に変形する正則行列 P に対し, $b = P^{-1}e_m$ とおく. $\operatorname{rank} A < m \Leftrightarrow B$ の第 m 行は 0 より $\operatorname{rank} [A, b] = \operatorname{rank} P[A, b] = \operatorname{rank} [B, e_m] > \operatorname{rank} A$. よって方程式 $Ax = P^{-1}e_m$ は解をもたない.

18 $m \times n$ 行列 $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ は $m \leq n$ かつ $\operatorname{rank} A = m$ のとき, A の列ベクトル $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ をうまく選べば $A' = [a_{i_1} \ \cdots \ a_{i_m}]$ が正則になることを示せ.

A の軸列を $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ とすればよい. このとき, A を階段行列にする正則行列 P により $PA' = E$ となるので P が逆行行列になる.

19 A を $m \times n$ 行列とすると、次は同値であることを示せ.

$$(1) \operatorname{rank} A \leq r.$$

$$(2) A = BC \text{ となる } m \times r \text{ 行列 } B \text{ と } r \times n \text{ 行列 } C \text{ が存在する.}$$

$$(1) \Rightarrow (2) : \operatorname{rank} A = s \leq r \text{ とすると, } PAQ = F_{mn}(s) \text{ (} P, Q \text{ は正則行列) と標準形に変形できる.}$$

$$F_{mn}(s) = F_{mr}(s)F_{rn}(s) \text{ なので, } B = P^{-1}F_{mr}(s), C = F_{rn}(s)Q^{-1} \text{ とおけば}$$

$$BC = P^{-1}F_{mr}(s)F_{rn}(s)Q^{-1} = P^{-1}F_{mn}(s)Q^{-1} = A.$$

$$(2) \Rightarrow (1) : \operatorname{rank} B \leq r \text{ より, } \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} BC \leq \operatorname{rank} B \leq r.$$

20 $m \times n$ 行列 A に対し, $AXA = A$ をみたす $n \times m$ 行列 X を A の一般逆行行列という. このとき次を示せ.

$$(1) m \times n \text{ 行列 } A \text{ の一般逆行行列 } X \text{ は存在する. (ただし, 一意的とは限らない.)}$$

$$(2) \text{ 任意の } n \text{ 次元列ベクトル } y \text{ に対し, } (E_n - XA)y \text{ は } Ax = 0 \text{ の解である.}$$

$$(3) \text{ 方程式 } Ax = b \text{ が解をもつとき, } Xb \text{ は 1 つの解である.}$$

$$(4) (3) \text{ のとき, } Ax = b \text{ の任意の解 } x_0 \text{ について } x_0 = Xb + (E_n - XA)x_0 \text{ が成り立つ. (即ち, 任意の解 } x_0 \text{ はある } y \text{ により } x_0 = Xb + (E - XA)y \text{ と表せることになる.)}$$

$$(1) A \text{ の標準形を } PAQ = F_{mn}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} =: F \text{ (} P, Q \text{ は正則行列) とし,}$$

$$X = QF'P \text{ (} F' = F_{nm}(r) \text{) とおけばよい. このとき } A = P^{-1}FQ^{-1}, FF'F = F \text{ より,}$$

$$AXA = (P^{-1}FQ^{-1})(QF'P)(P^{-1}FQ^{-1}) = P^{-1}FF'FQ^{-1} = P^{-1}FQ^{-1} = A$$

$$(F' = \begin{bmatrix} E_r & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ (} B, C, D \text{ は適合する型の任意の行列) でも } X = QF'P \text{ は一般逆行行列になる.)}$$

$$(2) A(E - XA)y = Ay - AXAy = Ay - Ay = 0.$$

$$(3) x_1 \text{ を 1 つの解とすると, } A(Xb) = (AX)(Ax_1) = (AXA)x_1 = Ax_1 = b.$$

$$(4) Xb + (E_n - XA)x_0 = Xb + x_0 - X(Ax_0) = Xb + x_0 - Xb = x_0.$$

3 章

問 1 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2$

(3) $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta - (-\sin \theta) \cdot \sin \theta = 1$ (4) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -10$

問 2 置換 (5 4 2 3 6 1) の転倒数は 10. 転倒対は (5, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 1), (2, 1), (3, 1), (6, 1).

問 3 $\det \bar{A} = \sum_{\mathbf{p}} (\operatorname{sgn} \mathbf{p}) \bar{a}_{1p_1} \bar{a}_{2p_2} \cdots \bar{a}_{np_n} = \overline{\sum_{\mathbf{p}} (\operatorname{sgn} \mathbf{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}} = \overline{\det A}$

問 4 2つの行列式の定義は一致することを確かめよ. 略

問 5 ここではサラスの公式により計算する. (後述の, 掃き出し法を用いて計算してもよい.)

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = -2$

(3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2)$

問 6 掃き出しと次数低下法 (3.4) を用いて計算する.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 4r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3.4)} \begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3.4)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -9$

(2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 + 2r_1, r_3 + r_1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{3r'_2} (-2) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_1]{r_2 - r_1} (-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3.4)} (-6)(2-3) = 6$

問 7 $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |P^{-1}P||A| = |E||A| = |A|$

問 8 行列 A に対し, $|A| = 0$ となる x の値を求め, A に代入して階数を求める.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - x = 0$. $x = 6$ のとき, $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より階数 1

(2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 2x = x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$. $x = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より階数 2.

$x = \pm\sqrt{2}$ のとき, $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より階数 2.

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3x - x^3 + 2 = -(x-2)(x+1)^2 = 0$, $x = -1$ のとき, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より階数 1.

$x = 2$ のとき, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より階数 2.

問 9 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ の, (1, 2) 余因子 $= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3$. (2, 2) 余因子 $= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$.

(3, 2) 余因子 $= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$.

3 章章末問題

1 (1) $\varepsilon(54321) = (-1)^{4+3+2+1} = 1$. (2) $\varepsilon(n12 \cdots n-1) = (-1)^{n-1}$. (3) $\varepsilon(214365 \cdots 2n2n-1) = (-1)^n$.

2 以下, $\underset{(3.4)}{=}$, $\underset{(3.10)}{=}$ は次数低下法 I, II を適用し, $\underset{3.18}{\stackrel{(i,j)}{=}}$ は (i, j) 成分に次数低下法 (一般形) を適用したことを表す.

$$(1) \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1+2r_3 \\ r_2+6r_3 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| \stackrel{(3.1)}{=}_{3.18} (-1) \left| \begin{array}{cc} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{array} \right| = -(6-7) = 1$$

$$(2) \left| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & a \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1-3r_2 \\ r_3-4r_2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -10 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & a+4 \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=}_{3.18} (-1) \left| \begin{array}{cc} -10 & 5 \\ -10 & a+4 \end{array} \right| \stackrel{-10c'_1}{=} 10 \left| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & a+4 \end{array} \right| = 10(a-1) = 10a-10$$

$$(3) \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1+r_2 \\ r_1+r_3 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{array} \right| \stackrel{(3.10)}{=} \sqrt{3} \left| \begin{array}{cc} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{array} \right| = 1$$

$$(4) \left| \begin{array}{ccc} 1.23 & 2.31 & 3.12 \\ 2.34 & 3.42 & 4.23 \\ 34.5 & 45.3 & 53.4 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_2-r_1 \\ r_3-10r_1 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1.23 & 2.31 & 3.12 \\ 1.11 & 1.11 & 1.11 \\ 22.2 & 22.2 & 22.2 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_3-20r_2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1.23 & 2.31 & 3.12 \\ 1.11 & 1.11 & 1.11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0$$

$$(5) \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-2r_1 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right| \stackrel{(3.4)}{=} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_3-3r_2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=}_{3.18} (-1) \left| \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{array} \right| = -3$$

$$(6) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1-r_4 \\ r_2-r_4 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right| \stackrel{(4.1)}{=}_{3.18} (-1) \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1-2r_2 \\ r_3-r_2 \\ \hline \end{array} (-1) \left| \begin{array}{ccc} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=}_{3.18} \left| \begin{array}{cc} -2 & 4 \\ -2 & 5 \end{array} \right| = -2$$

$$(7) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_3-r_1 \\ r_4-r_2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \stackrel{3.6.1}{=} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{array} \right| = 4 \quad \left(\left| \begin{array}{cc} A & A \\ B & A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A & A \\ O & B-A \end{array} \right| = |A||B-A| \right)$$

$$(8) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} c_1+c_3 \\ c_2+c_4 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_3-r_1 \\ r_4-r_2 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| \stackrel{3.6.1}{=} \left| \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 6 & 6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{array} \right| = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| = 48(-1)(-2) = 96$$

$$\left(\left| \begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A+B & B \\ B+A & A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A+B & A \\ O & A-B \end{array} \right| = |A+B||A-B| \right)$$

$$(9) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_1 \\ r_5-r_1 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right| \stackrel{(3.4)}{=} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=}_{3.18} 2 \left| \begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right| \stackrel{(2.2)}{=}_{3.18} 2 \cdot 2 \left| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{array} \right| = 16$$

$$(10) \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right| \stackrel{(4.1)}{=}_{3.18} -2 \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \right| \stackrel{(3.3)}{=}_{3.18} -2 \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_1-2r_2 \\ r_3+r_2 \\ \hline \end{array} -2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \stackrel{(2.1)}{=}_{3.18} 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = -6$$

3 A, B を n 次正方行列とすると, $|AB| = |BA|$ であることを示せ. $|AB| \stackrel{\text{定理 3.8}}{=} |A||B| = |B||A| \stackrel{\text{定理 3.8}}{=} |BA|$

4 $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ とする. $|AB|$ と $|A||B|$ を計算することにより,

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \text{ を示せ. } |AB| = \left| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{array} \right| = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2, |A| = a^2+b^2, |B| = c^2+d^2$$

5 方程式 $Ax = 0$ が自明な解 ($x = 0$) のみをもつことと $|A| \neq 0$ は同値であることを示せ. 「 $Ax = 0$ が自明な解のみをもつ $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 」は系 3.10(1) $\Leftrightarrow$ (4) の対偶.

6 n 次行列式 例 3.18 と同様に, 第 1 列に他の全ての列を加え, 第 1 列を掃き出す.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[(2 \leq j \leq n)]{c_1 + c_j} \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x+n-1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[(2 \leq i \leq n)]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3.6)} (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

7 次の行列の行列式の値と余因子行列を求め、もし正則ならば逆行列を求めよ. (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $|A| = -4$.

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -2, \quad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, \quad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\tilde{A} = {}^t \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad |A| = a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a+1)^2.$$

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \quad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a - 1, \quad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a - 1,$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = -a - 1, \quad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \quad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a + 1,$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -a - 1, \quad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a + 1, \quad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1,$$

$$\tilde{A} = {}^t \begin{bmatrix} a^2-1 & -a-1 & -a-1 \\ -a-1 & a^2-1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & a^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-1 & -a-1 & -a-1 \\ -a-1 & a^2-1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & a^2-1 \end{bmatrix},$$

$$a \neq 2, -1 \text{ のとき, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{(a-2)(a+1)} \begin{bmatrix} a-1 & -1 & -1 \\ -1 & a-1 & 1 \\ -1 & 1 & a-1 \end{bmatrix}$$

8 次の n 次行列式の値を求めよ. (対角成分とその両隣り以外の成分は全て 0.)

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(1), (2) は例 3.20 の D_n において $b = c = 1$ とし, (1) は $a = 2$, (2) は $a = 1$ としたもの.

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{例 3.20 } D_n = \begin{vmatrix} a & c & & \\ b & a & c & \\ & b & a & \ddots \\ & & \ddots & a & c \\ & & & b & a \end{vmatrix}$$

$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ ($n \geq 3$) ($D_0 := 1$, $D_{-1} := 0$ とすれば $n \geq 1$ でも成立) より,

(1) $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $\therefore D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = 1$ より, $D_n = n + 1$.

(2) $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0$ ($D_0 = 1$) より表を作ると,

n	(0)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
D_n	(1)	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	...

$\therefore D_n$ は, $n = 3k + 2$ のとき 0, $n = 3k, 3k + 1$ のとき $(-1)^k$. (k に関する数学的帰納法を用いて証明される.)

例の別証 (第 1 行で余因子展開): D_n の中の行列を $\tilde{D}_n$ とする. 第 1 行 $= [a \ 0 \ \cdots] + [0 \ c \ 0 \ \cdots]$ と線形性により,

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & & \\ b & a & c & \\ & b & a & \ddots \\ & & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & & \\ b & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c & & 0 \\ b & a & c & \\ & b & a & \ddots \\ 0 & b & & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} + (-1)^{1+2}c \begin{vmatrix} b & c & & \\ 0 & b & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & c \\ & & & b & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - cbD_{n-2}$$

9 クラメルの公式を用いて, 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x - 3y + z = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 3z - 4w = -1 \\ x + 5y - 7z = 3 \\ 2x + 2y + 2z - 3w = 2 \\ 2x + y + 5z + w = 5 \end{cases}$$

係数行列を A , 定数項ベクトルを $\mathbf{b}$ とする.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. |A| = 12, x = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{12}, y = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{12}, z = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}. |A| = 120, x = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{240}{120} = 2,$$

$$y = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{0}{120} = 0, w = \frac{1}{120} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}.$$

10 A を正則行列, B を任意の正方行列とすると, 次を示せ.

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B - CA^{-1}D| \quad \text{3.6.1 節により,} \quad \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \stackrel{Ar'_1}{=} |A| \begin{vmatrix} E & A^{-1}D \\ C & B \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - Cr_1}{=} |A| \begin{vmatrix} E & A^{-1}D \\ O & B - CA^{-1}D \end{vmatrix} = |A| |B - CA^{-1}D|$$

11 A, B, C, D を n 次正方行列とすると, 次を示せ.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| |A-B| \quad (2) \begin{vmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) |A| \neq 0, AC = CA \text{ のとき, } \begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|$$

3.6.1 節による.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \stackrel{c_1 \pm c_2}{=} \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

$$(2) \begin{vmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AO & BO \\ OC & OD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BO & OD \\ BO & OD \end{vmatrix} \stackrel{r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} BO & OD \\ OO & OD \end{vmatrix} = 0 \text{ より } \begin{vmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{vmatrix} = 0$$

(3) $AC = CA$ の両辺に左右から A^{-1} を掛けて, $CA^{-1} = A^{-1}C$. 問題 10 より,

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B - CA^{-1}D| = |A| |B - A^{-1}CD| = |A(B - A^{-1}CD)| = |AB - CD|$$

12 (1) 座標平面上の 2 点 $(1, 2), (3, 5)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(2) 座標空間上の 3 点 $(1, 2, 2), (2, 3, 5), (3, 3, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

$$\text{例 3.23 より, (1) } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 2y - 1 = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 6y - z - 7 = 0$$

13 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2^2 & -3 & 1 & 1 \\ 2^3 & 3^2 & 1 & 7 \\ 2^4 & -3^3 & 1 & 7^2 \\ 2^5 & 3^4 & 1 & 7^3 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2^2 & -2^4 & 2^3 \\ 2^2 & 2^3 & 2^5 & 2^4 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \end{vmatrix}$$

例 3.24(ヴァンデルモンドの行列式) $|V(x_1, x_2, x_3, x_4)|$ の形に変形して差積 $\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を計算する.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 2^3 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix} = |V(2, 3, 5, 7)| = \Delta(2, 3, 5, 7) = (3-2)(5-2)(7-2)(5-3)(7-3)(7-5) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2^2 & -3 & 1 & 1 \\ 2^3 & 3^2 & 1 & 7 \\ 2^4 & -3^3 & 1 & 7^2 \\ 2^5 & 3^4 & 1 & 7^3 \end{vmatrix} \stackrel{2^2 c'_1}{=} \stackrel{(-3)c'_2}{=} 2^2(-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & (-3) & 1 & 7 \\ 2^2 & (-3)^2 & 1 & 7^2 \\ 2^3 & (-3)^3 & 1 & 7^3 \end{vmatrix} = -2^2 \cdot 3 \Delta(2, -3, 1, 7) = -2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = -72000$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2^2 & -2^4 & 2^3 \\ 2^2 & 2^3 & 2^5 & 2^4 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \end{vmatrix} \stackrel{2r'_2}{=} \stackrel{2^2 r'_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2^3 & 2^2 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \leftrightarrow c_4}{=} -2^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2^2 & -2^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} = -2^3 |{}^t V(1, -2, 2, 4)|$$

$$= -2^3 \Delta(1, -2, 2, 4) = 2^7 \cdot 3^3 = 3456$$

14 座標平面上の 3 点 $(1, 1), (2, 3), (3, 7)$ を通る 2 次曲線 $y = ax^2 + bx + c$ を求めよ.

例 3.25 により, クラメルの公式を用いると:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 2, \quad a_0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2^2 \\ 7 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2^2 \\ 1 & 7 & 3^2 \end{vmatrix} = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{より, 求める方程式は } y = 1 - x + x^2.$$

別解: a, b, c は $y = ax^2 + bx + c$ に 3 点の座標 $(1, 1), (2, 3), (3, 7)$ を代入した方程式

$$\begin{cases} 1^2 a + 1b + c = 1 \\ 2^2 a + 2b + c = 3 \\ 3^2 a + 3b + c = 7 \end{cases} \text{ の解なので, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore y = x^2 - x + 1.$$

15 次の等式を示せ.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = c^2(4a+2b+c)(2b+c)$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

$$(6) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

(1) サラスの公式を用いる. 別解として, 下の問題 16 参照.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} = xz(-y) + y(-x)(-y) (+0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

(2) 第 2 列から r を, 第 3 列から $r \sin \theta$ を括り出して残りの行列式を D' とし, D' を第 3 列で余因子展開する.

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta D'. \quad (D' = 1 \text{ を示す.})$$

$$D' := \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} - \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= -\sin^2 \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} - \cos^2 \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = -(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)(-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 1$$

(3) 問題 11(1) より,

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b+c)+a & (a+b)+a \\ (a+b)+a & (a+b+c)+a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a+b+c)-a & (a+b)-a \\ (a+b)-a & (a+b+c)-a \end{vmatrix}$$

$$= \{(2a+b+c)+(2a+b)\}\{(2a+b+c)-(2a+b)\}\{(b+c)+b\}\{(b+c)-b\} = c^2(4a+2b+c)(2b+c)$$

(4) 例 3.20 の漸化式において $a = x^2+1$, $b = c = x$ とすると, $D_n = (x^2+1)D_{n-1} - x^2D_{n-2}$.

$$D_1 = x^2+1, \quad D_2 = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+x^2+1,$$

$$D_3 = (x^2+1)(x^4+x^2+1) - x^2(x^2+1) = x^6+x^4+x^2+1,$$

$$D_4 = (x^2+1)(x^6+x^4+x^2+1) - x^2(x^4+x^2+1) = x^8+x^6+x^4+x^2+1.$$

(5) $a \neq 0$ のとき, $(2, 1), (1, 2)$ 成分を軸にして, 第 1, 2 列を掃き出す.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b-d & 0 & f \\ -c-e-f & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - c/ar_2]{r_3 - b/ar_2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0-d & -bd/a & f-be/a \\ 0-e-f-cd/a & -ce/a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + e/ar_1]{r_3 + d/ar_1} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f-be/a+dc/a \\ 0 & 0 & -f-cd/a+eb/a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & f-be/a+cd/a \\ -(f-be/a+cd/a) & 0 \end{vmatrix} = a^2(f-be/a+cd/a)^2 = (af-be+cd)^2$$

$a = 0$ のときは,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ -b-d & 0 & f \\ -c-e-f & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_3} (-1)^2 \begin{vmatrix} -b-d & 0 & f \\ -c-e-f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b-d & b & c \\ -c-e & d & e \end{vmatrix} = (be-cd)^2 = (af-be+cd)^2$$

(6) 左辺の $n+1$ 次行列式を D_n とおき, 第 1 列で余因子展開して漸化式を求めれば出る.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+2} a_n (-1)^n = xD_{n-1} + a_n = x^2D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n = \dots = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

16 奇数次の交代行列 (${}^tA = -A$ となる行列) A の行列式は 0 であることを示せ.

(注) 偶数次の交代行列の行列式は完全平方式になることが知られている. 問題 15(1),(5) 参照.

A が $2n+1$ 次のとき, $|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A|$ より $|A| = 0$.

17 $A = [a_{ij}]$ が、各 j ($= 1, \dots, n$) に対して $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$ を満たすならば A は正則でないことを示せ.

A の第 1 行に他の行を全て加えると $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, n$) より第 1 行の成分が全て 0 になるので、 $|A| = 0$.

18 A の余因子行列 $\tilde{A}$ について、 $|A| = 0 \Leftrightarrow |\tilde{A}| = 0$ が成り立つことを示せ.

($|A| = 0 \Rightarrow |\tilde{A}| = 0$): $|A| = 0$ とする. このとき、 $A\tilde{A} = |A|E = O$. $|\tilde{A}| \neq 0$ と仮定すると、 $A = O\tilde{A}^{-1} = O$. $A = O$ ならば $\tilde{A} = O$ なので、 $|\tilde{A}| = 0$ となり矛盾. よって $|\tilde{A}| = 0$.

($|A| = 0 \Leftarrow |\tilde{A}| = 0$): A は n 次とし、 $|\tilde{A}| = 0$ とする. このとき $0 = |A||\tilde{A}| = |A\tilde{A}| = \det |A|E = |A|^n$ より $|A|^n = 0$. よって $|A| = 0$.

19 A を n 次正方行列とすると、 $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

$|A| \neq 0$ のとき、 $A\tilde{A} = |A|^n E$ の両辺の行列式をとると $|A||\tilde{A}| = |A|^n$ より $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

$|A| = 0$ のとき、問題 18 より $|\tilde{A}| = 0 = |A|^{n-1}$. よっていずれの場合も $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

20 整数行列 (=成分が全て整数である行列) A について、 A が正則であり A^{-1} が整数行列であることと、 $|A| = \pm 1$ であることは同値であることを示せ.

($\Rightarrow$): 整数行列の行列式の値は整数なので $|A|, |A^{-1}|$ は整数で、 $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$ より $|A| = \pm 1$.

($\Leftarrow$): $|A| = \pm 1$ より A は正則. A が整数行列より余因子行列 $\tilde{A}$ も整数行列で、 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \pm\tilde{A}$ も整数行列.

21 A を n 次正則行列、 $\mathbf{b}$ を n 次元列ベクトル、 c をスカラーとするとき次を示せ.

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{vmatrix} = c|A| - {}^t\mathbf{b}\tilde{A}\mathbf{b}$$

問題 10 より、
$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{vmatrix} = |A|(c - {}^t\mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}) = c|A| - {}^t\mathbf{b}\tilde{A}\mathbf{b}.$$

22 座標平面上の同一直線上にない異なる 3 点 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ を通る円の方程式が次式で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 + b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2 + b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 3.23 と同様に、円の方程式を $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ ($a \neq 0$) と表し、この式と、 (x, y) に (a_i, b_i) ($i = 1, 2, 3$) を代入して得られた式を a, b, c, d の同次方程式と考えると $a \neq 0$ より非自明解をもつ:

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \\ a(a_1^2 + b_1^2) + ba_1 + cb_1 + d = 0 \\ a(a_2^2 + b_2^2) + ba_2 + cb_2 + d = 0 \\ a(a_3^2 + b_3^2) + ba_3 + cb_3 + d = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 + b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2 + b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ より } \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 + b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2 + b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

逆に、 (x, y) に (a_i, b_i) ($i = 1, 2, 3$) を代入すれば行列式 $= 0$. 即ち、この円は 3 点を通る.

なお、 $x^2 + y^2$ の係数 $= (1, 1)$ 余因子は、 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & 0 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1, 3) \\ 3.18 \end{matrix} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}$ より、

$x^2 + y^2$ の係数 $\neq 0 \Leftrightarrow (a_2 - a_1, b_2 - b_1), (a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ は一次独立 $\Leftrightarrow$ 3 点は同一直線上にない、が成り立つ.

23 (巡回行列式) 1 の n 乗根を $\zeta_0 = 1, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ ($\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$) とするとき次を示せ.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (x_1 + \zeta_k x_2 + \zeta_k^2 x_3 + \cdots + \zeta_k^{n-1} x_n)$$

左辺の行列式を D , 右辺の積を D' とする. 即ち,

$$D := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}, \quad D' := \prod_{k=0}^{n-1} (x_1 + \zeta_k x_2 + \zeta_k^2 x_3 + \cdots + \zeta_k^{n-1} x_n)$$

とする. $j=2, 3, \dots, n$ について, D の第 1 列に, 第 j 列の ζ_k^{j-1} 倍を加える $(c_1 + \zeta_k c_2, c_1 + \zeta_k^2 c_3, \dots, c_1 + \zeta_k^{n-1} c_n)$.
すると, $(1, 1)$ 成分は

$$X_k := x_1 + \zeta_k x_2 + \zeta_k^2 x_3 + \cdots + \zeta_k^{n-1} x_n$$

になる. $1 = \zeta_k^n$ に注意すれば, $(2, 1)$ 成分は,

$$x_n + \zeta_k x_1 + \zeta_k^2 \zeta_k x_2 + \cdots + \zeta_k^{n-1} x_{n-1} = \zeta_k (\zeta_k^{n-1} x_n + x_1 + \zeta_k x_2 + \cdots + \zeta_k^{n-2} x_{n-1}) = \zeta_k X_k$$

第 1 列は以下順に $\zeta_k^2 X_k, \dots, \zeta_k^{n-1} X_k$ となり, 第 1 列から X_k を括り出せる. これが $k=0, 1, \dots, n-1$ について成り立つので, D は $X_0 X_1 \cdots X_{n-1} = D'$ で割り切れる. 両辺の多項式の次数は同じ n であり, x_1^n の係数を比較すればともに 1 なので, $D = D'$.

- 24** 一般に, 行列 A から k 個の行と k 個の列を取り出して作った行列を A の k 次小行列といい, その行列式を k 次小行列式という. 正方行列 A ($\neq O$) に対し, 0 でない小行列式の最大次数は A の階数に等しいことを, 即ち次を示せ.

$$\text{rank } A = \max\{k \mid 0 \text{ でない } k \text{ 次小行列式が存在する}\}$$

一般に, 行列 A の小行列 A' の階数は, A を行交換と列交換により左上が A' になる様変形してから A' の部分を標準形にする変形を行えば $\text{rank } A' \leq \text{rank } A$ が分る. A' が $|A'| \neq 0$ となる k 次小行列のときは $\text{rank } A' = k$ より $k = \text{rank } A' \leq \text{rank } A$. 従って, $r := \text{rank } A$ とすると,

$$0 \text{ でない } k \text{ 次小行列式 } |A'| \text{ が存在する} \implies k = \text{rank } A' \leq \text{rank } A = r.$$

定理 2.7 より, A の軸列を並べた $n \times r$ 行列を A_1 とすると $r = \text{rank } A_1 = \text{rank } {}^t A_1$ より, 転置行列 ${}^t A_1$ の軸列を並べた $r \times r$ 行列 A_2 についても $r = \text{rank } A_2 = \text{rank } {}^t A_2$. ${}^t A_2$ は A の r 次小行列で, $\text{rank } {}^t A_2 = r$ より正則なので $|{}^t A_2| \neq 0$. 即ち, 0 でない r 次小行列式 $|{}^t A_2|$ が存在するので, 右辺 $= \text{rank } A$.

4 章

以下、階段行列や行階段型行列への変形の計算過程は省略し、「 $\mapsto$ 」で表す。

問 1 (1) $W_1 = \{\mathbf{x} = {}^t[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は部分空間でないことを示せ。

(2) $W_2 = \{\mathbf{x} = {}^t[x_1 \cdots x_n] \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$ は部分空間であることを示せ。

(3) n 次実対称行列全体の集合 $H_n(\mathbb{R})$ は n 次正方実行列全体 $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ。

(1) $\mathbf{e}_1 = {}^t[1, 0] \in W_1$ だが、 $2\mathbf{e}_1 = {}^t[2, 0] \notin W_1$ より W_1 は [S2] をみたさないので部分空間でない。

(2) $\mathbf{a} = {}^t[a_1 \cdots a_k 0 \cdots 0]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1 \cdots b_k 0 \cdots 0] \in W_2$, $s, t \in \mathbb{R}$ に対し $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ とすると、 $x_i = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$ ($i = k+1, \dots, n$) より $\mathbf{x} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in W_2$. よって W_2 は [S3] をみたすので部分空間である。

(3) $A, B \in H_n(\mathbb{R})$ (${}^tA = A$, ${}^tB = B$), $s, t \in \mathbb{R}$ とすると、 ${}^t(sA + tB) = s{}^tA + t{}^tB = sA + tB$ より $sA + tB \in H_n(\mathbb{R})$. よって $H_n(\mathbb{R})$ は [S3] をみたすので、 $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間である。

問 2 $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ は基底になるか。

$\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトルの組なので、行列として階数が 3 ($\therefore$ 正則で、行列式 $\neq 0$) が基底になる必要十分条件。

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. $\therefore \text{rank } A = 3$ ($|A| = 3 \neq 0$) より A は基底である。

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\therefore \text{rank } B = 2$ ($|B| = 0$) より B は基底でない。

問 3 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき、 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W_A の基底と、 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ の生成する部分空間 $\langle A \rangle$ の基底を求めよ。

$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、基本解 $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が W_A の基底、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が $\langle A \rangle$ の基底になる。

問 4 $m \times n$ K -行列 $A = [a_{ij}]$ は $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ と表せて、 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ は一次独立であることを示せ。

行列単位の定義 $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik} \delta_{j\ell}$ より、 $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ の両辺の (i, j) 成分が a_{ij} なので左辺 = 右辺。

$\{E_{ij}\}$ の一次関係式 $S := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_{ij} E_{ij} = O$ をみたす s_{ij} は $S = [s_{ij}] = O$ より全て 0, $\therefore \{E_{ij}\}$ は一次独立。

問 5 $\mathbb{R}^3$ の基底 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$, $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ を次の様に定める：

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(1) $\mathbf{b}_2$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の一次結合で表せ。

(2) A から B への変換行列 P を求めよ。

$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \mapsto [E|P] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$ より、(1) $\mathbf{b}_2 = 4\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_3$. (2) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

問 6 次の写像 $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は線形写像かどうかを調べよ。

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ x - 2y \end{bmatrix}, \quad f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + 2 \\ x - y + 1 \end{bmatrix}$$

f_1 は線形写像。[L3] を確かめる。 $\mathbf{a} = {}^t[a_1, a_2]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1, b_2]$, $s, t \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$f_1(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t) = f_1\left(\begin{bmatrix} a_1s + b_1t \\ a_2s + b_2t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(a_1s + b_1t) + (a_2s + b_2t) \\ (a_1s + b_1t) - 2(a_2s + b_2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 3b_1 + b_2 \\ b_1 - 2b_2 \end{bmatrix}t = f(\mathbf{a})s + f(\mathbf{b})t.$$

f_2 は線形写像でない。 $f_2(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ より [L0] に反する。

問 7 例 4.28 A, B をそれぞれ $\ell \times m$ K -行列, $n \times k$ K -行列とすると, $m \times n$ K -行列 X に A, B を左右から掛ける写像

$$f: M_{m,n}(K) \rightarrow M_{\ell,k}(K), \quad f(X) = AXB$$

は線形写像になる, を示せ.

$m \times n$ K -行列 X, Y と $s, t \in K$ に対し, [L3]: $f(Xs + Yt) = A(Xs + Yt)B = AXBs + AYBt = f(X)s + f(Y)t$.

問 8 $1_V, g \circ f, f^{-1}$ は線形であることを示せ.

[L3]: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, s, t \in K$ に対し, $1_V(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}t = 1_V(\mathbf{a})s + 1_V(\mathbf{b})t$ より 1_V は線形.

$(g \circ f)(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t) = g(f(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t)) \underset{f: \text{線型}}{=} g(f(\mathbf{a})s + f(\mathbf{b})t) \underset{g: \text{線型}}{=} g(f(\mathbf{a}))s + g(f(\mathbf{b}))t = (g \circ f)(\mathbf{a})s + (g \circ f)(\mathbf{b})t$ より $g \circ f$ は線形. $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in W$ に対し, $\mathbf{a}' = f(\mathbf{a}), \mathbf{b}' = f(\mathbf{b})$ となる $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ が唯一つずつある. このとき, $\mathbf{a} = f^{-1}(\mathbf{a}'), \mathbf{b} = f^{-1}(\mathbf{b}')$, $f^{-1}(\mathbf{a}'s + \mathbf{b}'t) = f^{-1}(f(\mathbf{a})s + f(\mathbf{b})t) \underset{f: \text{線型}}{=} f^{-1}(f(\mathbf{a}s + \mathbf{b}t)) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}t = f^{-1}(\mathbf{a}')s + f^{-1}(\mathbf{b}')t$ より f^{-1} は線形.

問 9 $\mathbb{R}[x]_2$ 上の一次変換 $F: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$:

$$F(p)(x) = e^x \frac{d}{dx}(p(x-1)e^{-x}) = e^x \frac{d}{dx}(\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\}e^{-x})$$

の基底 $[1 \ x \ x^2]$ に関する表現行列を求めよ.

微分 $\frac{d}{dx}$ を ' で表す.

$$p(x) = 1 : F(1) = e^x(1 \cdot e^{-x})' = e^x(-e^{-x}) = -1,$$

$$p(x) = x : F(x) = e^x((x-1)e^{-x})' = e^x(e^{-x} - (x-1)e^{-x}) = 2 - x,$$

$$p(x) = x^2 : F(x^2) = e^x((x-1)^2 e^{-x})' = e^x(2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x}) = -3 + 4x - x^2$$

より,

$$\begin{bmatrix} F(1) \\ F(x) \\ F(x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ 2-x & & \\ -3+4x-x^2 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}. \text{ 転置して, 表現行列は } \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

問 10 $\mathbb{R}^2$ の一次変換 $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x-6y \\ 3x-2y \end{bmatrix}$ の, 基底 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に関する表現行列 F を求めよ.

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 E_2 に関する表現行列を H とすると, 基底 A に関する表現行列 F は $F = A^{-1}HA$ より,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x-6y \\ 3x-2y \end{bmatrix} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore F = A^{-1}HA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

問 11 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z+w \\ x+2z-w \\ x+y+3z-3w \end{bmatrix}$$

で定めるとき, f の核と f の像の基底と次元を求めよ.

$f(\mathbf{x}) = F\mathbf{x}$ の, 核の基底は $F\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解, 像の基底は F の軸列なので,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \text{Ker } f = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \text{ 次元 } 2. \text{ Im } f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \text{ 次元 } 2.$$

4 章章末問題

1 次のベクトルの組 $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ を行列を用いて $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ の一次結合で表せ.

$$(1) \ \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3, \ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3, \ \mathbf{b}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

$$(2) \ A = [x^2, x, 1] \text{ のとき, } \mathbf{b}_1 = x^2 + 2x - 3, \ \mathbf{b}_2 = x^2 + 2, \ \mathbf{b}_3 = 4x - 1$$

$B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ から直接行列を求めても, $\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3$ を縦に並べて ${}^t B$ に対して行列を求めてから転置しても良いが, 式が長いときは ${}^t B$ から求める方が書きやすい. ここでは, (1) は ${}^t B$ から, (2) は直接求める.

$$(1) \ {}^t B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \text{ より転置して, } B = A \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \ B = [x^2 + 2x - 3, x^2 + 2, 4x - 1] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合は部分空間か.

$$(1) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid y=0 \right\} \quad (2) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\} \quad (3) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x+y \leq 2z \right\} \quad (4) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x-2y=3y-z=2x-2z \right\} \\ (5) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid |x+y|=2z \right\}$$

(1),(4) は [S3] を満たし部分空間であることを示す. (2),(3),(5) は反例を挙げて部分空間でないことを示す.

(1)~(5) の部分集合を $W_1 \sim W_5$ とし, $\mathbf{a} = {}^t[a_1 \ a_2 \ a_3]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1 \ b_2 \ b_3] \in W_i$, $s, t \in \mathbb{R}$, $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{c} = {}^t[c_1 \ c_2 \ c_3]$ とする. なお, $\mathbf{0} = {}^t[0 \ 0 \ 0] \in W_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) で全て [S0] を満たす.

(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_1 \Leftrightarrow a_2 = b_2 = 0$. このとき, $c_2 = sa_2 + tb_2 = 0$ より $\mathbf{c} \in W_1$. $\therefore W_1$ は [S3] を満たし部分空間になる.

(2) $\mathbf{a} = {}^t[1 \ 0 \ 1]$, $\mathbf{b} = {}^t[0 \ 1 \ 1]$ とすると, $1^2 + 0^2 - 1^2 = 0$, $0^2 + 1^2 - 1^2 = 0$ より $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_2$. $\mathbf{c} := \mathbf{a} + \mathbf{b} = {}^t[1 \ 1 \ 2]$ は $1^2 + 1^2 - 2^2 = -2 \neq 0$ より $\mathbf{c} \notin W_2$. $\therefore W_2$ は [S1] を満たさないで部分空間でない.

(3) $\mathbf{a} = {}^t[1 \ 0 \ 1]$ とすると, $1 + 0 \leq 2 \cdot 1$ より $\mathbf{a} \in W_3$. $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = {}^t[-1 \ 0 \ -1]$ は $-1 + 0 \not\leq 2(-1)$ より $-\mathbf{a} \notin W_3$. $\therefore W_3$ は [S2] を満たさないで部分空間でない.

(4) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_4$ とすると, $a_1 - 2a_2 = 3a_2 - a_3 = 2a_1 - 2a_3$, $b_1 - 2b_2 = 3b_2 - b_3 = 2b_1 - 2b_3$ が成り立つ. このとき,
 $c_1 - 2c_2 = (sa_1 + tb_1) - 2(sa_2 + tb_2) = s(a_1 - 2a_2) + t(b_1 - 2b_2) = s(3a_2 - a_3) + t(3b_2 - b_3) = 3(sa_2 + tb_2) - (sa_3 + tb_3) = 3c_2 - c_3$
 $= s(3a_2 - a_3) + t(3b_2 - b_3) = s(2a_1 - 2a_3) + t(2b_1 - 2b_3) = 2(sa_1 + tb_1) - 2(sa_3 + tb_3) = 2c_1 - 2c_3$ より
 $c_1 - 2c_2 = 3c_2 - c_3 = 2c_1 - 2c_3$, $\therefore \mathbf{c} \in W_4$. $\therefore W_4$ は [S3] を満たし部分空間になる.

(別証) W_4 は同次連立一次方程式

$$\begin{cases} x - 2y = 3y - z \\ x - 2y = 2x - 2z \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \text{ の解空間なので, 例 4.3 より部分空間になる.}$$

(5) $\mathbf{a} = {}^t[2 \ 0 \ 1]$ とすると, $|2 + 0| = 2 \cdot 1$ より $\mathbf{a} \in W_5$. $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = {}^t[-2 \ 0 \ -1]$ より $|-2 + 0| \neq 2 \cdot (-1)$. $\therefore -\mathbf{a} \notin W_5$ より W_5 は [S2] を満たさないで部分空間でない.

3 次の $\mathbb{R}[x]_n$ の部分集合は部分空間か. ここで $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$, $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$ とする.

$$(1) \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid f(1) = 0, f(2) = 0\} \quad (2) \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid f'(0) = 1, f(1) = 0\}$$

$$(3) \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid f(2) \geq 0, f(3) = 0\} \quad (4) \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid f''(x) + 2f(x) = 0\}$$

(1),(4) は部分空間であり, (2),(3) は部分空間でない.

(1)~(4) の部分集合を $W_1 \sim W_4$, $f(x), g(x) \in W_i$, $s, t \in \mathbb{R}$ とし, $f_0(x) \equiv 0$ (零ベクトル) とする.

(1) $f(x), g(x) \in W_1 \Rightarrow (sf + tg)(1) = sf(1) + tg(1) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$, $(sf + tg)(2) = sf(2) + tg(2) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$ より $(sf + tg)(x) \in W_1$. $\therefore W_1$ は [S3] を満たし部分空間になる.

(2) $f'_0(0) = 0 \neq 1$ より $f_0(x) \notin W_2$. $\therefore W_2$ は [S0] を満たさないで部分空間でない.

(3) $f(x) := 3 - x$ とすると, $f(2) = 1 \geq 0$, $f(3) = 0$ より $f(x) \in W_3$ だが $-f(x) = x - 3$ は $-f(2) = -1 \not\geq 0$ より $f(x) \notin W_3$. $\therefore W_3$ は [S2] を満たさないで部分空間でない.

(4) $f(x), g(x) \in W_4 \Rightarrow (sf + tg)''(x) + 2(sf + tg)(x) = s(f''(x) + 2f(x)) + t(g''(x) + 2g(x)) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$ より $(sf + tg)(x) \in W_4$. $\therefore W_4$ は [S3] を満たし部分空間になる.

4 次のベクトルの組 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になるか.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ が $\mathbb{R}^3$ の基底 $\Leftrightarrow \text{rank } A = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ を用いる. ここでは行列式による判定例を挙げる.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 1 \text{ より基底になる.} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ より基底にならない.}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \text{ より基底になる.} \quad (4) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -7 \text{ より基底になる.}$$

5 次の同次連立一次方程式の解空間の基底と次元を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 9z = 0 \end{cases} \quad (2) x - 2y - 3z = 0 \quad (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

同次方程式の基本解が解空間の基底になるので, 係数行列 A の階段行列 B を作り基本解を求めればよい.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \mapsto B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ より基底 } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 次元 } 1.$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B \text{ (階段行列) より基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 2.$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mapsto B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ より基底なし, 次元 } 0.$$

6 次のベクトルの組が生成する部分空間の次元と基底を求めよ.

$$(1) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ (\mathbf{a}_4)]$ の軸列が A の生成する部分空間の基底になるので A を行階段型行列に変形して求める.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore \text{基底 } \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \text{ 次元 } 2. \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 13 & 8 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore \text{基底 } \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \text{ 次元 } 2.$$

7 次の $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 に対し, 和空間 $W_1 + W_2$ と共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

$$(1) W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(2) W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mid \begin{cases} x - 2y + 2z + 9w = 0 \\ 2x + y - z - 7w = 0 \end{cases} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mid \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ -2x + y + 2z + 6w = 0 \end{cases} \right\}$$

(1) $W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle, W_2 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ の生成系はいずれも一次独立なので基底である. これらを並べた行列 A を階段行列に変形すれば注意 4.8, 4.9 により求まる.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_1 + W_2 \text{ の基底は } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 3. W_1 \cap W_2 \text{ の基底は,}$$

$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1 \text{ より } 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 : 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 1.$$

(2) 方程式を解いて, W_1, W_2 の基底を求め, (1) と同様にする. 共通部分は連立 4 方程式を解いても求まる.

$$W_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, W_2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_1 + W_2 \text{ の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 3.$$

$$W_1 \cap W_2 \text{ の基底は, } -3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 1.$$

(別解)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 \cap W_2 \text{ の基底は } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 1.$$

8 ベクトルの組 $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$ と $B = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ を

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

で定めるとき,

- (1) A, B は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.
- (2) b_1 の, 基底 A に関する座標を求めよ.
- (3) A から B への基底の変換行列 P を求めよ.

例題 4.21 と同様, $[A, B]$ を階段行列に変形して, 左側が E になれば A は基底になり, 右側が P になる. また, P の第 1 列が b_1 の座標になる. B が基底になる事は別途示す.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right] \text{ より (2) } \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (3) \ P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) A の部分が E になったので A は正則, 従って基底になる. また, $|B| = -1$ より B も基底.

9 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 A から B への変換行列を求めよ.

- (1) $A = [x^2, x, 1], \ B = [1, x, x^2]$
- (2) $A = [1, x, x^2], \ B = [x^2+3x-2, 2x^2+6x-3, -2x^2-5x+2]$
- (3) $A = [x^2+3x-2, 2x^2+6x-3, -2x^2-5x+2], \ B = [x^2+x, x^2+1, x+1]$

変換行列を P とする ($AP = B$).

$$(1) \ B = [0x^2+0x+1, 0x^2+x+0, x^2+0x+0] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = AP \text{ より, } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \ B = [-2+3x+x^2, -3+6x+2x^2, 2-5x-2x^2] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = AP \text{ より, } P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) $A' = [1, x, x^2]$ (= (2) の基底 A), (2) の変換行列 P を P_1 とすると, (3) の A は (2) の B なので, $A = A'P_1$, $\therefore A' = AP_1^{-1}$. A' から B への変換行列を P_2 とすると, $B = A'P_2 = AP_1^{-1}P_2$ より $P = P_1^{-1}P_2$.

$$B = [0+x+x^2, 1+0x+x^2, 1+x+0x^2] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A'P_2.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \text{ より, } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

10 次の写像は線形写像かどうかを判定せよ.

$$(1) \ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (2) \ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x + 1$$

$$(3) \ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- (1) $f(sx+ty) = 0$ ($x, y \in \mathbb{R}^2, s, t \in \mathbb{R}$) より [S3] をみたすので, 線形写像である.
- (2) $f(0) = 1$ より [S0] をみたさないなので, 線形写像でない.

$$(3) f\left(s \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} sx+tx' \\ sy+ty' \\ sz+tz' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} sx+tx' \\ sy+ty' \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = sf\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + tf\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

より [S3] をみたすので、線形写像である。

11 次の線形写像の、指定された基底に関する表現行列を求めよ。

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ -x+4y-2z \end{bmatrix}, \text{基底: 標準基底 } E_3 \text{ と } E_2$$

$$(2) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ -y \\ 2x \end{bmatrix}, \text{基底: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ と } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(1) \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ -x+4y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ より表現行列 } H \text{ は } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) E_2 \text{ と } E_3 \text{ に関する表現行列 } H \text{ は } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. A \text{ と } B \text{ に関する表現行列は } B^{-1}HA = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 4 & 5 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$$

12 次の一次変換の、指定された基底に関する表現行列を求めよ。

$$(1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ -x+4y \end{bmatrix}, \text{基底: } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(2) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y-z \\ x+z \\ -x+y \end{bmatrix}, \text{基底: } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

標準基底に関する表現行列を H とすると、 A に関する表現行列は $A^{-1}HA$ より、

$$(1) A^{-1}HA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -14 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(2) A^{-1}HA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

13 次の線形写像 f の核と f の像の基底と次元を求めよ。

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y-2z \\ x+2y-z \\ y+z \end{bmatrix}$$

$$(2) f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+z+w \\ 3x+4y+z+5w \\ 2x+y+4z \end{bmatrix}$$

標準基底に関する f の表現行列 H の軸列が像の基底、方程式 $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解が核の基底なので、

$$(1) H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より、像の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, 2 \text{ 次元, 核の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, 1 \text{ 次元.}$$

$$(2) H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より、像の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, 2 \text{ 次元, 核の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, 2 \text{ 次元.}$$

14 ベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立のとき、次のベクトルの組は一次独立か、一次従属か。

$$(1) \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\}$$

$$(2) \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n\}$$

$$(3) \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1\}$$

小問のベクトルの組を (順序付けて) B として、方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解をもつかどうかを調べる。一次独立な $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n]$ と行列 H を用いて $B = AH$ と表して、方程式 $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を調べれば良い (注意 4.10)。

$$(1) B = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = AH, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より H, B は一次従属で, $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解を $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に代入して, $2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3) - 3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

$$(2) H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ より } H, B \text{ は一次独立. } (H = [h_{ij}] \text{ は } n \times (n-1) \text{ 行列で, 対角成分とその直下の成分が } 1 \text{ (} h_{ii} = h_{i+1,i} = 1 \text{ (} i = 1, \dots, n-1 \text{) 他の成分が } 0 \text{ の行列.)})$$

$$(3) H = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, |H| = 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 2 & n \text{ が奇数} \\ 0 & n \text{ が偶数} \end{cases}, \therefore n \text{ が奇数のとき一次独立, 偶数のとき一次従属で,}$$

$$\sum_{i=1}^{2m} (-1)^i (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}) = -(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) - \dots + (\mathbf{a}_{2m} + \mathbf{a}_1) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{a}_{2m+1} := \mathbf{a}_1).$$

15 次のベクトルの組 A, B が同じ部分空間の基底になることを示し, A から B への基底変換の行列 P を求めよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = [x^2 + 4x - 3, x^2 + 2x - 2, x^2 + 3x - 2], B = [2x^2 + x + 1, x^2 + x - 2, 3x^2 + 2x + 1]$$

(1) $\langle B \rangle \subset \langle A \rangle \Leftrightarrow$ 方程式 $AX = B$ が解をもつ, より方程式 $AX = B$ を解く.

$$[A, B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ より } X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =: P, \text{ rank } A = 2 \text{ より } A \text{ は一次独立なので } \langle A \rangle$$

の基底. $|P| = 2$ より P は正則なので, B も $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ の基底で, P は基底変換の行列になる.

(2) $C = [x^2, x, 1]$ とし, 行列 H_1, H_2 を用いて $A = CH_1, B = CH_2$ と表し, 方程式 $H_1 X = H_2$ を解く.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 12 \\ 1 & -21 \end{bmatrix}, [H_1, H_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 12 \\ -3 & -2 & -2 & 1 & -21 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 10 \end{array} \right] = [E, P].$$

rank $H_1 = 3$ より A は一次独立, $\therefore A$ は $\langle A \rangle$ の基底で, $P = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ は $|P| = -2$ より正則. よって B も $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ の基底で P は変換行列となる.

16 次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_5(x)$ を順に見て一次独立なベクトルの組を 1 組選び出し, 残りのベクトルをその一次結合で表せ.

$$(1) p_1(x) = 1 + x + x^2, p_2(x) = -2x + x^2, p_3(x) = 2 + 3x^2,$$

$$p_4(x) = 3 + x^2, p_5(x) = 1 + 4x - 4x^2$$

$$(2) p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x, p_2(x) = x^3 + 3x^2 + 1, p_3(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2,$$

$$p_4(x) = -2x^3 - 6x^2 + x + 1, p_5(x) = -x^3 - 5x^2 + 7x$$

(1) $B = [p_1(x), \dots, p_5(x)]$ とおき, 基底 $A = [1, x, x^2]$ と行列 H により $B = AH$ と表すと,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } \{p_1, p_2, p_4\} \text{ は一次独立で, } p_3 = 2p_1 + p_2, p_5 = -2p_1 - 3p_2 + p_4$$

(2) $B = [p_1(x), \dots, p_5(x)]$ とおき, 基底 $A = [x^3, x^2, x, 1]$ と行列 H により $B = AH$ と表すと,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -6 & -5 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{p_1, p_2, p_4\} \text{ は一次独立で, } p_3 = -p_1 + 2p_2, p_5 = 2p_1 - p_2 + p_4.$$

17 次の V のベクトルの組が一次独立であることを示し, それを含む V の基底を与えよ.

$$(1) V = \mathbb{R}^3, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2) V = \mathbb{R}[x]_2, \begin{matrix} p_1(x) = x^2 + 1, \\ p_2(x) = x^2 + 2x + 1 \end{matrix}$$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は一次独立で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1\}$ ($\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3\}$) は $\mathbb{R}^3$ の基底.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $A = [x^2, x, 1]$ と行列 H を用いて $B = [p_1(x), p_2(x), x^2, x, 1]$ を $B = AH$ と表すと,
 $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\{p_1(x), p_2(x)\}$ は一次独立で $\{p_1(x), p_2(x), x^2\}$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底.

18 次の $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 に対し, W_1, W_2 の基底と次元, および和空間 $W_1 + W_2$ と共通部分 $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x - y - 3z + 5w = 0 \\ 2x - y - 4z + 8w = 0 \end{array} \right\}$$

W_2 の方程式を解いて基底と次元を求める:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 \text{ の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 2.$$

W_1 の生成系と W_2 の基底を並べて階段行列に変形し, W_1 と $W_1 + W_2$ の基底と次元を求める:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 9 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_1 \text{ の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \text{ 次元 } 2. W_1 + W_2 \text{ の基底 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

次元 3. W_1 の基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, W_2 の基底を $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ とすると $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 4\mathbf{b}_1$, $\therefore -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 4\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ が $W_1 \cap W_2$

の基底, 即ち, $-\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ より, $W_1 \cap W_2$ の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 1.

19 次の写像 $F, G: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$

$$F(p)(x) = (x+1) \frac{d}{dx}(p(x-1)), \quad G(p)(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 p(t) dt$$

について,

(1) F, G は一次変換 (線形写像) になることを示せ.

(2) F の, 基底 $[x^2, x, 1]$ に関する表現行列を求めよ.

(3) F の, 基底 $[1, x, x^2]$ に関する表現行列を求めよ.

(4) G の, 基底 $[x^2, x, 1]$ に関する表現行列を求めよ.

(1) $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_2, s, t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$F(sp+ tq)(x) = (x+1) \frac{d}{dx}(sp(x-1) + tq(x-1)) = s(x+1) \frac{d}{dx}(p(x-1)) + t(x+1) \frac{d}{dx}(q(x-1)) = sF(p)(x) + tF(q)(x),$$

$$G(sp+ tq)(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 (sp+ tq)(t) dt = s \int_{-1}^1 (x-t)^2 p(t) dt + t \int_{-1}^1 (x-t)^2 q(t) dt = sG(p)(x) + tG(q)(x)$$

よりどちらも [L3] をみたし, 線形写像になる.

$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ に対し,

$$F(p_0)(x) = 0, F(p_1)(x) = (x+1) \frac{d(x-1)}{dx} = x+1, F(p_2)(x) = (x+1) \frac{d(x-1)^2}{dx} = (x+1)2(x-1) = 2x^2 - 2 \text{ より,}$$

$$(2) F([p_2, p_1, p_0])(x) = [2x^2 - 2, x+1, 0] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \therefore \text{表現行列は } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) F([p_0, p_1, p_2])(x) = [0, 1+x, -2+2x^2] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \therefore \text{表現行列は } \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) G(p_0)(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 dt = \left[x^2 t - x t^2 + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2x^2 + \frac{2}{3}, \quad G(p_1)(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 t dt = -\frac{4x}{3},$$

$$G(p_2)(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 t^2 dt = \frac{2x^2}{3} + \frac{2}{5}$$

$$G([p_2, p_1, p_0])(x) = \left[\frac{2x^2}{3} + \frac{2}{5}, -\frac{4x}{3}, 2x^2 + \frac{2}{3} \right] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \therefore \text{表現行列は} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

20 線形写像 $f: V \rightarrow W$ と V のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ に対し次を示せ.

(1) $\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ が一次独立ならば $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ も一次独立である.

(2) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立で, $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ ならば, $\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ も一次独立である.

どちらも対偶を示す.

(1) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が一次従属ならば, $\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i = \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{s} = {}^t[s_1 \dots s_n] \neq \mathbf{0}$ がある. このとき

$$\mathbf{0} = f\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{a}_i) s_i \quad \text{より, } \{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\} \text{ も一次従属.}$$

(2) $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$, $\{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ が一次従属で, $\sum_{i=1}^n f(\mathbf{a}_i) s_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ とすると,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{a}_i) s_i = \mathbf{0}. \quad \therefore \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i \in \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\} \quad \text{より} \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i s_i = \mathbf{0}. \quad \therefore \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \text{ は一次従属.}$$

21 n 次元ベクトル空間 V の一次変換 $f: V \rightarrow V$ に対し, 次は同値であることを示せ.

(1) $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ (2) $\text{Im } f = V$

線形写像の次元定理 4.15 により $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$. これより,

(1) $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = n \Leftrightarrow \text{Im } f = V$ (2).

22 ベクトル空間 V の一次変換 $f: V \rightarrow V$ が $f \circ f = f$ をみたすとき, 次式を示せ.

$$V = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

$\mathbf{a} \in V$ に対し, $f(\mathbf{a} - f(\mathbf{a})) = f(\mathbf{a}) - f(f(\mathbf{a})) = \mathbf{0}$ より, $\mathbf{a} - f(\mathbf{a}) \in \text{Ker } f$.

$\therefore \mathbf{a} = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{a} - f(\mathbf{a})) \in \text{Im } f + \text{Ker } f. \quad \therefore V = \text{Im } f + \text{Ker } f.$

次に, $\mathbf{a} \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ とすると, $\mathbf{a} \in \text{Im } f$ より $\mathbf{a} = f(\mathbf{b})$ となる $\mathbf{b} \in V$ があり, $\mathbf{a} \in \text{Ker } f$ より $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

$\therefore \mathbf{0} = f(\mathbf{a}) = f(f(\mathbf{b})) = f(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ より $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$. よって, 定理 4.9 より直和になる.

23 3 次実対称行列全体のつくる $M_3(\mathbb{R})$ の部分空間 $H_3(\mathbb{R})$ の次元と基底を求めよ.

$$A = [a_{ij}] \in H_3(\mathbb{R}) \Rightarrow a_{ji} = a_{ij} \quad (i < j) \quad \text{より} \quad A = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

より $E_{ii} \quad (i=1, 2, 3)$, $E_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq 3)$ は生成系, $\sum_{i=1}^3 a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) = O \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3)$ より

一次独立, 即ち, $E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}$ は基底で, $H_3(\mathbb{R})$ は 6 次元.

24 n 次正方行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}$ への線形写像 $f: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ は, ある n 次正方行列 A により, 次式で表されることを示せ.

$$f(X) = \text{tr } AX$$

$f(E_{ij}) = a_{ji}$, $A = [a_{ij}] = {}^t[f(E_{ij})]$ とおくと, $X = [x_{ij}]$ に対し,

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^n (XA)_{ii} = \text{tr } XA = \text{tr } AX$$

25 $m \times n$ 行列 A, B に対して, 次式を示せ.

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ とすると,

$$\langle A+B \rangle = \langle \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n \rangle \subset \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle + \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle.$$

これと和空間の次元定理 4.8 より

$$\text{rank}(A+B) = \dim \langle A+B \rangle \leq \dim(\langle A \rangle + \langle B \rangle) \leq \dim \langle A \rangle + \dim \langle B \rangle = \text{rank } A + \text{rank } B.$$

26 $m \times n$ 行列 A と $n \times \ell$ 行列 B が $AB = O$ をみたすとき, 次式を示せ.

$$\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$$

$AB = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_\ell] = [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]$ より $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell$ は方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解, 即ち, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in W_A$.

$\therefore \langle B \rangle \subset W_A$. $\therefore \text{rank } B = \dim \langle B \rangle \leq \dim W_A = n - \text{rank } A$. 移項して $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$.

5 章

問 1 $a = \begin{bmatrix} 2i \\ 1-i \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3i \\ 1+i \end{bmatrix}$ に対し, (a, b) , $\|a\|$, (b, a) , $\|b\|^2$ を求めよ.

$$(a, b) = (2i) \cdot (-3i) + (1-i) \cdot (1+i) = -6 + 2i, \quad \|a\| = (|2i|^2 + |1-i|^2)^{\frac{1}{2}} = (2^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6},$$

$$(b, a) = (-3i) \cdot (2i) + (1+i) \cdot (1-i) = -6 - 2i = \overline{(a, b)}, \quad \|b\|^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11.$$

問 2 このことを確かめよ.(幾何ベクトルの内積は内積の公理をみたと.)

$a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $\angle BOA = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする.

$$[I1]: \angle BOA = \angle BOA = \theta \text{ より, } (b, a) = \|b\| \|a\| \cos \theta = \|a\| \|b\| \cos \theta = (a, b)$$

$$[I3]: \angle AOA = 0 \text{ より } (a, a) = \|a\| \|a\| \cos 0 = \|a\|^2 \geq 0, \text{ かつ } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$[I2]: a = 0 \text{ のときは } (a, b) = 0 \text{ などより } [I2] \text{ は成立. } a \neq 0 \text{ とし, } a \text{ と同じ向きに単位ベクトルを } e = \frac{1}{\|a\|} a \text{ とす}$$

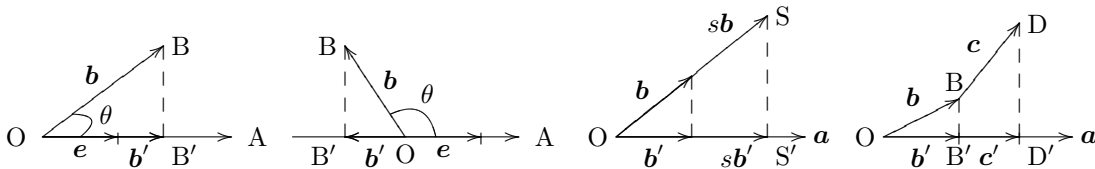
る. B から直線 OA に下ろした垂線の足を B' とし, $b' := \overrightarrow{OB'}$ とすると, $b' = be$ ($b \in \mathbb{R}$) と表せて (b は e に関する b' の座標), $b = \|b\| \cos \theta$, $(a, b) = \|a\| b = (a, b')$ である.

$$[I2](ii): sb = \overrightarrow{OS} \text{ (} s \in \mathbb{R} \text{) とし. S から直線 OA に下ろした垂線の足を } S' \text{ とすると } \overrightarrow{OS'} = sb' = sbe \text{ より, } (a, sb) = \|a\| sb = s \|a\| b = s(a, b).$$

$$[I2](i): c = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD} \text{ と } a \text{ のなす角を } \varphi \text{ とする. C, D から直線 OA に下ろした垂線の足を } C', D' \text{ とし, } c' := \overrightarrow{OC'} \text{ とすると, } c' = ce \text{ (} c \in \mathbb{R} \text{) と表せて, } c = \|c\| \cos \varphi, (a, c) = (a, c') = \|a\| c \text{ であり, } \overrightarrow{B'D'} = c'.$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{BD'} = b' + c' = (b+c)e \text{ より,}$$

$$(a, b+c) = (a, \overrightarrow{OD}) = (a, \overrightarrow{OD'}) = \|a\| (b+c) = \|a\| b + \|a\| c = (a, b) + (a, c).$$



問 3 このことを確かめよ. ($(x, y)_G$ は $\mathbb{C}^n$ の一つの内積になる.)

$$[I1]: \overline{(x, y)_G} = (x^* G y)^* = y^* G^* x^{**} = y^* G x = (y, x)_G.$$

$$[I2](i): (x, y+y')_G = x^* G(y+y') = x^* G y + x^* G y' = (x, y)_G + (x, y')_G,$$

$$[I2](ii): (x, sy)_G = x^* G(sy) = s(x^* G y) = s(x, y)_G \text{ (} s \in \mathbb{C} \text{)}.$$

$$[I3]: (x, x)_G = x^* A^* A x = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0. \text{ (} x, x)_G = \|Ax\|^2 = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

問 4 上の b_1, b_2, b_3 を b_2, b_3, b_1 の順で正規直交化せよ.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 := b_2 \text{ とおく. } (a_1, a_1) = 2, \text{ (} a_1, b_3 \text{) = 1 より,}$$

$$b_3 - a_1 \frac{(a_1, b_3)}{(a_1, a_1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad a_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと, } (a_2, a_2) = 6, \text{ (} a_1, b_1 \text{) = 1, (} a_2, b_1 \text{) = 1.}$$

$$b_1 - a_1 \frac{(a_1, b_1)}{(a_1, a_1)} - a_2 \frac{(a_2, b_1)}{(a_2, a_2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-3+1 \\ 6-3+1 \\ -3-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad a_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ とおくと}$$

$$a_1, a_2, a_3 \text{ は直交系で, これらを正規化して正規直交系 } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ をえる.}$$

問 5 $W^\perp$ は部分空間になることを示せ.

$$a, b \in W^\perp, s, t \in K, w \in W \text{ に対し } (sa+tb, w) = \bar{s}(a, w) + \bar{t}(b, w) = \bar{s}0 + \bar{t}0 = 0 \text{ より } [S3] \text{ をみたと.}$$

$$\text{問 6 次を示せ. (1)} (W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp, \quad (2) (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

V の正規直交基底 $[A, B, C, D] = [a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell, c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_n]$ を次の様に構成する:

A を $W_1 \cap W_2$ の正規直交基底とし, これを延長して W_1, W_2 の正規直交基底 $[A, B], [A, C]$ をつくと

$[A, B, C]$ は W_1+W_2 の正規直交基底になる. さらにこれを延長して V の正規直交基底 $[A, B, C, D]$ をえる.

$$(W_1 \cap W_2) = \langle A \rangle, \quad W_1 = \langle A, B \rangle, \quad W_2 = \langle A, C \rangle, \quad W_1+W_2 = \langle A, B, C \rangle, \quad V = \langle A, B, C, D \rangle.$$

このとき, $(W_1 \cap W_2)^\perp = \langle B, C, D \rangle$, $W_1^\perp = \langle C, D \rangle$, $W_2^\perp = \langle B, D \rangle$, $(W_1 + W_2)^\perp = \langle D \rangle$ より,
 (1) $W_1^\perp \cap W_2^\perp = \langle D \rangle = (W_1 + W_2)^\perp$. (2) $W_1^\perp + W_2^\perp = \langle B, C, D \rangle = (W_1 \cap W_2)^\perp$.

問 7 $\mathbb{C}^3$ において, 次の部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ.

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \begin{matrix} x - y + 2iz = 0 \\ 2x + y - iz = 0 \end{matrix} \right\}$

(1) $W^\perp$ は $x + 3y - 2z = 0$ の解空間なので, $W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2i \\ 2 & 1 & -i \end{bmatrix}$ に対する $W = W_A$ の直交補空間は $\langle A^* \rangle$ なので, $W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$. 尚, $W = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 5i \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$.

問 8 例 5.12 の A が直交行列であること, 及び, θ が一意的に定まることを示せ. $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a^2 + b^2 = 1$, $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$

$A = [a_1 \ a_2]$, $a_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ とおけば, $\|a_1\|^2 = \|a_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1$, $(a_1, a_2) = 0$ より A は直交行列.

$|a| \leq 1$ より $a = \cos \theta'$ をみたす θ' が $0 \leq \theta' \leq \pi$ の範囲で唯 1 つある. このとき $\sin \theta' = \pm b$ なので,
 $\sin \theta' = b$ なら $\theta := \theta'$, $\sin \theta' = -b$ なら $\theta := -\theta'$ として, $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲で θ が唯 1 つに定まる.

問 9 m を実数とすると, 行列 $A_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix}$ は直交行列であること, 及び行列式 $|A_m|$ の値が -1 になることを示せ.

$A_m = [a_1 \ a_2]$ とすると, $\|a_1\|^2 = \|a_2\|^2 = \frac{(m^2-1)^2 + (2m)^2}{(1+m^2)^2} = 1$, $(a_1, a_2) = 0$ より A_m は直交行列で,

$$|A_m| = \frac{-(m^2-1)^2 - (2m)^2}{(1+m^2)^2} = -1.$$

問 10 n 次ユニタリ行列 U_1, U_2, U に対し, 次のユニタリ行列になることを示せ:

(1) E_n , (2) $U_1 U_2$, (3) $U^{-1} = U^*$.

(1) $E_n^* E_n = E_n E_n = E_n$. (2) $(U_1 U_2)^* U_1 U_2 = U_2^* U_1^* U_1 U_2 = U_2^* E U_2 = U_2^* U_2 = E$.

(3) $U^* U = E$ より U は正則で, $U^* = U^{-1}$. $\therefore E = U U^* = (U^*)^* U^*$. $\therefore U^{-1} = U^* \in U(n)$.

問 11 このことを示せ. (例 5.13)

(1) $\mathbb{R}^2$ の点 x を極座標を用いて $x = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}$ と表すと,

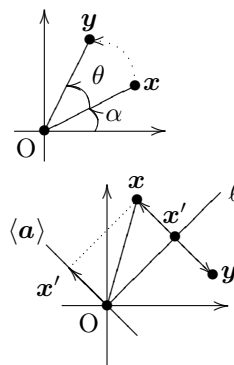
$$y = R(\theta)x = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta (r \cos \alpha) - \sin \theta (r \sin \alpha) \\ \sin \theta (r \cos \alpha) + \cos \theta (r \sin \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix}$$

より, y は x を原点を中心として角 θ だけ回転した点である.

(2) $\ell: mx - y = 0$ の係数行列は $[m, -1]$ より $a := \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} \perp \ell$.

$$A_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} -2m^2 & 2m \\ 2m & -2 \end{bmatrix} = E - \frac{2}{\|a\|^2} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} [m, -1]$$

$= E - \frac{2a^t a}{\|a\|^2}$ より, $A_m x = x - 2a \frac{a^t x}{\|a\|^2} = x - 2a \frac{(a, x)}{\|a\|^2}$. $x' := a \frac{(a, x)}{\|a\|^2}$ は直線 ℓ と垂直な直線 $\langle a \rangle$ への x の直交射影であり, $y := A_m x = x - 2x'$ は直線 ℓ に関し x と対称な点である.



5 章章末問題

1 次の実数ベクトル a, b について, $\|a\|, \|b\|, (a, b)$, および, なす角 θ を求めよ.

(1) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) $\|a\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\|b\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, $(a, b) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$,

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \|a\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \quad \|b\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{30},$$

$$(a, b) = 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = -15, \quad \cos \theta = \frac{-15}{\sqrt{10}\sqrt{30}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

2 次の複素数ベクトル a, b について, $\|a\|, \|b\|, (a, b)$, および, (b, a) を求めよ.

$$(1) a = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2) a = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \\ 2-i \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3i \\ 3i \end{bmatrix}$$

$$(1) \|a\| = \sqrt{1^2 + |i|^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad \|b\| = \sqrt{|2i|^2 + |-1|^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$(a, b) = 1 \cdot (2i) + (-i) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 3 + 3i, \quad (b, a) = (-2i) \cdot 1 + (-1) \cdot i + 3 \cdot 1 = 3 - 3i$$

$$(2) \|a\| = \sqrt{1 + |i|^2 + |2i|^2 + |2-i|^2} = \sqrt{1 + 1 + 4 + 4 + 1} = \sqrt{11},$$

$$\|b\| = \sqrt{|1-2i|^2 + |3i|^2 + |3i|^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 9} = \sqrt{23},$$

$$(a, b) = (1-i) \cdot (1-2i) + (-2i) \cdot 3i + (2+i) \cdot 3i = 1 - 2 - 3i + 6 + 6i - 3 = 2 + 3i,$$

$$(b, a) = (1+2i) \cdot (1+i) + (-3i) \cdot 2i + (-3i) \cdot (2-i) = 1 - 2 + 3i + 6 - 6i - 3 = 2 - 3i$$

3 座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内のベクトル b の平面 W への直交射影を求めよ.

$$(1) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2) W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$W = \langle a_1, a_2 \rangle$ とおく. 必要なら a_1, a_2 を直交化し, 補題 5.3, あるいはその直前の式より求める.

$$(1) (a_1, a_2) = 0 \text{ より } a_1 \perp a_2. \quad p_W(b) = a_1 \frac{(a_1, b)}{\|a_1\|^2} + a_2 \frac{(a_2, b)}{\|a_2\|^2} = \frac{3}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{6}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(2) $(a_1, a_2) = 1$ より, a_1, a_2 を直交化する.

$$a_2 - a_1 \frac{(a_1, a_2)}{\|a_1\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad a'_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ とおくと } W = \langle a_1, a'_2 \rangle \text{ で,}$$

$$p_W(b) = a_1 \frac{(a_1, b)}{\|a_1\|^2} + a'_2 \frac{(a'_2, b)}{\|a'_2\|^2} = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 次のベクトルの組から, この順で正規直交化せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$$

ベクトルの組を $a_1, a_2, \dots$ として, 直交系 $b_1, b_2, \dots$ を構成し, 正規化する.

$$(1) b_1 := a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 - b_1 \frac{(b_1, a_2)}{\|b_1\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ とおく.}$$

$$a_3 - b_1 \frac{(b_1, a_3)}{\|b_1\|^2} - b_2 \frac{(b_2, a_3)}{\|b_2\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-8+5 \\ -8+5 \\ 18-8-10 \end{bmatrix} = \frac{3}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおいて正規化すると, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$(2) b_1 := a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 - b_1 \frac{(b_1, a_2)}{\|b_1\|^2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad b_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおく.}$$

$$a_3 - b_1 \frac{(b_1, a_3)}{\|b_1\|^2} - b_2 \frac{(b_2, a_3)}{\|b_2\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad b_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ とおいて正規化}$$

すると, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$(3) \mathbf{b}_1 := \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{b}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ とおく.}$$

$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)}{\|\mathbf{b}_1\|^2} - \mathbf{b}_2 \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)}{\|\mathbf{b}_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{14}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -32 \\ 48 \\ -32 \\ -16 \end{bmatrix} = \frac{4}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b}_3 := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ と}$$

おく.

$$\mathbf{a}_4 - \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_4)}{\|\mathbf{b}_1\|^2} - \mathbf{b}_2 \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_4)}{\|\mathbf{b}_2\|^2} - \mathbf{b}_3 \frac{(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4)}{\|\mathbf{b}_3\|^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{2}{18} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{18}{36} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b}_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおいて正規化すると,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{b}_1 := \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{b}_1\|^2} = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおいて正規化する}$$

と, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

5 単位ベクトル $\mathbf{a} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ を含む $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を構成せよ.

$$\mathbf{a}' := 3\mathbf{a} \text{ において, } [\mathbf{a}', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \text{ を行変形する: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \therefore \mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \text{ は一次独立}$$

$$\text{より } \mathbb{R}^3 \text{ の基底. これを正規直交化する: } \mathbf{e}_1 - \mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく.

$$\mathbf{e}_2 - \mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) - \mathbf{a}_2 \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{a}_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{-1}{18} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{9}{18} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと } \mathbf{a}, \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_3 \text{ は直交基底. これらを正規化して, } \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ は正規直交基底.}$$

他の基底 (例えば, $\mathbf{a}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) を選び別の結果を得ても可.

6 次の $\mathbb{C}^4$ の部分空間 W と直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

$$(1) \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle (2) \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle (3) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{matrix} x+y+z+w=0 \\ x+2y+2z+w=0 \end{matrix} \right\} (4) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{matrix} x+iy+z+iw=0 \\ x+y+iz+iw=0 \end{matrix} \right\}$$

例 5.10 により $W, W^\perp$ の基底を求め, 正規直交化する. (1),(2) では $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$

において, この順で直交化後, 正規化して W の正規直交基底をえる. また, 「 $A^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 」 = 「 $W^\perp$ の基底」を求め, これを正規直交化して $W^\perp$ の正規直交基底をえる.

$$(1) \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ より, } W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{これを } \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \text{ の順で正規直交化}$$

する: $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1)}{\|\mathbf{b}_2\|^2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より, $W^\perp = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

(2) $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix} - \frac{-2i}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3i \\ -i \end{bmatrix}$ より, $W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3i \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$.

$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 1-i & i \end{bmatrix}$ より, $\mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. この順で正規直交化する:

$\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{\|\mathbf{b}_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ より, $W^\perp = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(3),(4) では連立方程式の係数行列を A とおく. W は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間で, 基本解 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ がその基底で, $A^* = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$ が $W^\perp$ の基底なので, これらを正規直交化すればよい.

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. これらは直交しているので正

規化して, $W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$A^* = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ より直交化すると: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. 正規化して

$W^\perp = \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & i \\ 1 & 1 & i & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\mathbf{b}_1 := \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 := \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1$ の順で直交化する:

$\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \\ 2 \\ -1+i \end{bmatrix}$. 正規化して $W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \\ 2 \\ -1+i \end{bmatrix} \right\rangle$.

$A^* = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 1 \\ 1 & -i \\ -i & -i \end{bmatrix}$ よりこの順で直交化すると: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \\ -1-2i \\ -i \end{bmatrix}$.

正規化して $W^\perp = \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \\ -1-2i \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$.

7 次の行列は直交行列であることを示せ.

(1) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$

(1), (2) の行列 A の列ベクトルの組 $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]$ が正規直交系であることを確かめればよい.

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \|a_1\|^2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad \|a_2\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \quad \|a_3\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1, \\
& (a_1, a_2) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (a_1, a_3) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{6}} = 0, \quad (a_2, a_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{\sqrt{6}} = 0. \\
(2) \quad & \|a_1\|^2 = (\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\
& \|a_2\|^2 = (\cos \theta \cos \varphi)^2 + (\cos \theta \sin \varphi)^2 + (-\sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \|a_3\|^2 = (-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi = 1, \\
& (a_1, a_2) = \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \sin \varphi + \cos \theta (-\sin \theta) = \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \sin \theta \cos \theta = 0, \\
& (a_1, a_3) = \sin \theta \cos \varphi (-\sin \varphi) + \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad (a_2, a_3) = \cos \theta \cos \varphi (-\sin \varphi) + \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0.
\end{aligned}$$

8 二次の直交行列 U は, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, または $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ と表されることを示せ.

$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a \ b]$ とする. $\|a\|^2 = a^2 + c^2 = 1$ より $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$ と表される. 同様に,

$\|b\|^2 = b^2 + d^2 = 1$ より $b = -\sin \varphi$, $d = \cos \varphi$, $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \theta & \cos \varphi \end{bmatrix}$ と表せ, $(a, b) = 0$ より

$(a, b) = ab + cd = -\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta - \varphi) = 0$. $\therefore \varphi = \theta$, または $\varphi = \theta \pm \pi$.

$\det U = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\theta - \varphi) = \pm 1$.

$\det U = \cos(\theta - \varphi) = 1$ のとき, $\varphi = \theta$ より, $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

$\det U = \cos(\theta - \varphi) = -1$ のとき, $\varphi = \theta \pm \pi$ より, $\sin \varphi = -\sin \theta$, $\cos \varphi = -\cos \theta$, $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.

9 $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし, $W = \langle a, b \rangle$ とする.

(1) a, b の順で正規直交化して, W の正規直交基底 $U_1 = [u_1 \ u_2]$ を求めよ.

(2) b, a の順で正規直交化して, W の正規直交基底 $U_2 = [u_3 \ u_4]$ を求めよ.

(3) U_1 から U_2 への変換行列 U ($U_2 = U_1 U$) を求め, U が直交行列であることを確かめよ.

$$(1) \quad b - a \frac{(a, b)}{\|a\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ より, } u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \quad a - b \frac{(b, a)}{\|b\|^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ より, } u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(3) U は方程式 $U_1 X = U_2$ の解なのでこれを解く:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ より,} \\
& U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}. \quad {}^t U U = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = E \text{ より直交行列.}
\end{aligned}$$

10 n 次正方実行列 A, B に対し次は同値であることを示せ.

(1) $A + iB$ はユニタリ行列である. (2) $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ は直交行列である.

(1) $(A + iB)^* = {}^t A - i {}^t B$ より,

(1) $\Leftrightarrow ({}^t A - i {}^t B)(A + iB) = E_n \Leftrightarrow {}^t A A + {}^t B B = E_n, {}^t A B - {}^t B A = O$.

(2) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^t A & {}^t B \\ -{}^t B & {}^t A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^t A A + {}^t B B = E_n, {}^t A B - {}^t B A = O \\ -{}^t B A + {}^t A B = O, {}^t B B + {}^t A A = E_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow (1).$

11 $\mathbb{R}^n$ の一般の実内積 $(a, b)'$ は, ある実対称行列 G により

$$(a, b)' = {}^t a G b \quad (= (a, b)_G)$$

と表されることを示せ.

$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $E = [e_1 \cdots e_n]$ のグラム行列 (例 5.4) を G とする. 即ち, $g_{ij} = (e_i, e_j)'$, $G = [g_{ij}]$ とおく. このとき, $g_{ji} = (e_j, e_i)' = (e_i, e_j)' = g_{ij}$ より G は実対称行列で,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ に対し, } (a, b)' = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i (e_i, e_j)' b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i g_{ij} b_j = {}^t a G b.$$

12 実内積空間 V のベクトル a, b に対し, 次を示せ.

- (1) (菱形) $\|a\| = \|b\| \iff (a+b) \perp (a-b)$
- (2) (三平方の定理) $a \perp b \iff \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$
- (3) $(a, b) = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2)$
- (1) $(a+b, a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2$ より, $\|a\| = \|b\| \iff (a+b, a-b) = 0 \iff (a+b) \perp (a-b)$
- (2),(3) [I5]: $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \pm 2(a, b)$ より,
- (2) $a \perp b \iff (a, b) = 0 \iff \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$. (3) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4(a, b)$.

13 内積空間 V のベクトル a, b に対し, 次を示せ.

- (1) (中線定理) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$
- (2) (三角不等式) $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a-b\|$
- (3) $(a, b) = \frac{1}{4}\{(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) + i(\|a-ib\|^2 - \|a+ib\|^2)\}$
- (4) $|(a, b)| = \|a\|\|b\| \iff a, b$ は一次従属である.
- (1) [I5]: $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(a, b)$ より, $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$.
- (2) [N4](三角不等式): $\|a\| = \|(a-b) + b\| \leq \|a-b\| + \|b\|$ を移項して, $\|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|$. a と b を入れ替えて, $\|b\| - \|a\| \leq \|b-a\| = \|a-b\|$.
- (3) (1) の [I5] より $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4 \operatorname{Re}(a, b)$. [I5] と注意 5.3 により, $\|a \pm ib\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \mp 2 \operatorname{Im}(a, b)$. これより, $\|a-ib\|^2 - \|a+ib\|^2 = 4 \operatorname{Im}(a, b)$.
 $\therefore (a, b) = \operatorname{Re}(a, b) + i \operatorname{Im}(a, b) = \frac{1}{4}\{(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) + i(\|a-ib\|^2 - \|a+ib\|^2)\}$
- (4) $b=0$ なら $(a, b) = \|a\|\|b\| = 0$ で $\{a, b\}$ は一次従属, より成立. $b \neq 0$ とする.
 $(\Rightarrow)$ [N3] の証明中, $|(a, b)| = \|a\|\|b\|$ なら $\|sa+tb\|^2 = 0$ より $sa+tb = 0$ ($s := \|b\|^2 > 0$).
 $(\Leftarrow)$ $a = cb$ と表されるので, $|(a, b)| = |\bar{c}(b, b)| = |c|\|b\|^2 = |c|\|b\| \cdot \|b\| = \|a\|\|b\|$.

14 14. 内積空間の正規直交系 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に対し次を示せ.

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\| = \sqrt{n}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n u_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n (u_i, u_i) + \sum_{i \neq j} (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = n.$$

$$\therefore \|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\| = \sqrt{n}.$$

15 内積空間 V のベクトル b の, 部分空間 W への直交射影 $p_W(b)$ を b' とする. このとき W のベクトル a に対し次を示せ.

$$\|b - b'\| \leq \|b - a\| \quad (\text{等号成立は } a = b' \text{ のときに限る})$$

$$[I5] \text{ と } (b-b', b'-a) = 0 \text{ より, } \|b-a\|^2 = \|(b-b') + (b'-a)\|^2 = \|b-b'\|^2 + \|b'-a\|^2 \geq \|b-b'\|^2.$$

$$\therefore \|b-b'\| \leq \|b-a\| \text{ で, } \|b-b'\| = \|b-a\| \iff \|b'-a\|^2 = 0 \iff a = b'.$$

16 内積空間 V の正規直交系 $U = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ と任意の $\mathbf{b} \in V$ に対し次を示せ.

$$(1) \|\mathbf{b} - \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\mathbf{u}_j, \mathbf{b})|^2$$

$$(2) \|\mathbf{b}\|^2 \geq \sum_{j=1}^n |(\mathbf{u}_j, \mathbf{b})|^2 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{b}) \text{ のときに限る})$$

(1) $\mathbf{b}' := \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{b})$ は部分空間 $\langle U \rangle$ への $\mathbf{b}$ の直交射影 (補題 5.3) なので, $(\mathbf{b}', \mathbf{b} - \mathbf{b}') = 0$.

$\therefore$ 左辺 $= (\mathbf{b} - \mathbf{b}', \mathbf{b} - \mathbf{b}') = (\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{b}') = \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{b}') = \|\mathbf{b}\|^2 - \sum_{j=1}^n (\mathbf{b}, \mathbf{u}_j)(\mathbf{u}_j, \mathbf{b}) =$ 右辺.

(2) (1) の左辺 ≥ 0 , かつ, 左辺 $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{0}$ より (2) を得る.

17 (最小二乗法) $m \times n$ K -行列 $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n]$ と $\mathbf{b} \in K^m$ に対し, $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ を最小にする $\mathbf{x} \in K^n$ は, 連立一次方程式

$$A^* A \mathbf{x} = A^* \mathbf{b}$$

の解であることを示せ.

$W = \langle A \rangle$, $\mathbf{b}' = p_W(\mathbf{b}) \in \langle A \rangle$ とすると, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ は解 $\mathbf{x}_1$ をもち ($A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}'$), 問題 15 より $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ の最小値は $\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|$. $\therefore \mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ のとき $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ は最小値をとる. $\mathbf{b}' - \mathbf{b} \in \langle A \rangle^\perp$ より $A^*(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ (例 5.10). 即ち, $A^* A \mathbf{x}_1 = A^* \mathbf{b}' = A^* \mathbf{b}$ より $\mathbf{x}_1$ は $A^* A \mathbf{x} = A^* \mathbf{b}$ の解.

18 $\mathbb{R}[x]$ の内積を, $p, q \in \mathbb{R}[x]$ に対し, 次式で定める.

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

(1) $1, x, x^2$ の長さ, および内積 $(1, x)$, $(1, x^2)$, (x, x^2) を求めよ.

(2) $1, x, x^2$ をこの順で正規直交化せよ.

$$(1) (x^m, x^n) = \int_{-1}^1 x^m x^n dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & (m+n \text{ が奇数}) \\ 2/(m+n+1) & (m+n \text{ が偶数}) \end{cases}, \therefore \|x^n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

より, $\|1\| = \sqrt{2}$, $\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|x^2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $(1, x) = (x, x^2) = 0$, $(1, x^2) = \frac{2}{3}$.

(2) $1, x$ は直交しているので x^2 を直交化する: $x^2 - 1 \frac{(1, x^2)}{\|1\|^2} - x \frac{(x, x^2)}{\|x\|^2} = x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$.

$\|3x^2 - 1\|^2 = \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)^2 dx = \frac{9 \cdot 2}{5} - \frac{6 \cdot 2}{3} + 2 = \frac{8}{5}$ より正規化して, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}x$, $\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$.

19 ルジャンドルの多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$, $P_0(x) = 1$) と問題 18 の内積に関し次を示せ.

(1) $n = 0, 1, 2$ について, $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ を求めよ.

(2) $m < n$ のとき, m 次多項式 $f(x)$ に対し $(f, P_n) = 0$. 特に, $(P_m, P_n) = 0$. (従って, $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ は直交系.)

(3) $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. (従って, $\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ は正規直交系.)

(1) 問題 18(2) に一致する. $n = 0: \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $n = 1: \sqrt{\frac{2+1}{2}} \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$.

$n = 2: \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2}} \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2^3} (x^4 - 2x^2 + 1)'' = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 - 1) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)$

(2,3) $f \in \mathbb{R}[x]$ に対し, $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}$ とする. $y = x^2 - 1$, $C_n = \frac{1}{2^n n!}$ とおくと, $P_n(x) = C_n (y^n)^{(n)}$. 部分積分により,

$$(f, (y^n)^{(n)}) = \int_{-1}^1 f(x) (y^n)^{(n)} dx = \left[f(x) (y^n)^{(n-1)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(1)}(x) (y^n)^{(n-1)} dx$$

$[f(x)(y^n)^{(n-1)}]_{-1}^1 = 0$ を示す. $x = \pm 1 \Rightarrow y = (x^2 - 1) = 0$ より, 帰納的に $0 \leq k \leq n-1$ のとき,
 $(y^n)^{(k)} = q_k(x)y^{n-k}$ ($q_0(x) \equiv 1$, $q_1(x) = 2nx$, $q_k(x)$ は k 次多項式) と表せることを示せばよい.
 $(y^n)^{(k)} = q_k(x)y^{n-k}$ が成り立つと仮定すると, 積の微分法より,

$$(y^n)^{(k+1)} = q'_k(x)y^{n-k} + q_k(x)(n-k)(2x)y^{n-k-1} = \{q'_k(x)y + 2(n-k)xq_k(x)\}y^{n-k-1} = q_{k+1}(x)y^{n-k-1}$$

($q_{k+1}(x) := q'_k(x)(x)(x^2-1) + 2(n-k)xq_k(x)$ は $k+1$ 次多項式). よって, 任意の多項式 $g(x)$ に対し,

$$\left[g(x)(y^n)^{(n-k)} \right]_{-1}^1 = \left[g(x)q_{n-k}(x)y^k \right]_{-1}^1 = \left[g(x)q_{n-k}(x)y^{k-1}(x^2-1) \right]_{-1}^1 = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

特に, $[f(x)(y^n)^{(n-1)}]_{-1}^1 = [f(x)q_{n-1}(x)(x^2-1)]_{-1}^1 = 0$ より,

$$(f, (y^n)^{(n)}) = - \int_{-1}^1 f^{(1)}(x)(y^n)^{(n-1)} dx = -(f^{(1)}, (y^n)^{(n-1)})$$

同様に, f が m 次 ($m \leq n$) のとき $[f^{(k-1)}(x)(y^n)^{(n-k)}]_{-1}^1 = 0$ ($1 \leq k \leq m$). $f^{(m)}$ は定数より,

$$(f, (y^n)^{(n)}) = -(f^{(1)}, (y^n)^{(n-1)}) = \dots = (-1)^m (f^{(m)}, (y^n)^{(n-m)}) = (-1)^m f^{(m)} \int_{-1}^1 (y^n)^{(n-m)} dx$$

$$(2) \quad (m < n) \quad \int_{-1}^1 (y^n)^{(n-m)} dx = \left[(y^n)^{(n-m-1)} \right]_{-1}^1 = 0 \quad \text{より} \quad (f, (y^n)^{(n)}) = 0.$$

$$(3) \quad (m = n) \quad (f, (y^n)^{(n)}) = (-1)^n (f^{(n)}, y^n) = (-1)^n f^{(n)} \int_{-1}^1 y^n dx. \quad \text{再び部分積分により}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y^n dx &= \left[xy^n \right]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 x^2 y^{n-1} dx = (-1)^2 \frac{2^2 n(n-1)}{1 \cdot 3} \int_{-1}^1 x^4 y^{n-2} dx = \dots \\ &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \int_{-1}^1 x^{2n} dx = (-1)^n 2^n n! \cdot 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$f = (y^n)^{(n)}$ とする. y^n は $2n$ 次より, $f^{(n)} = (y^n)^{(2n)} = (x^{2n})^{(2n)} = (2n)!$. $P_n = C_n (y^n)^{(n)}$ より,

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= C_n^2 ((y^n)^{(n)}, (y^n)^{(n)}) = C_n^2 (-1)^n ((y^n)^{(2n)}, y^n) \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^2 (-1)^n (2n)! (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

6 章

以下の略解中, 固有空間の基底, 行列を対角化する正則行列等や対角行列は一通りではない.

問 1 次の行列 A の固有値 β を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

固有多項式 $F_A(x) = |xE - A|$ を因数分解するか, 固有方程式 $F_A(x) = 0$ を解く.

$$(1) F_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -4 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \text{ より, } \beta = 3, -2$$

$$(2) \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x - 2 \text{ より, } \beta = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & -i \\ -i & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 2 \text{ より, } \beta = 1 \pm i$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x-1)(x-3) \text{ より, } \beta = 1, -1, 3$$

$$(5) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -2 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2 \text{ より, } \beta = 2, 1 \text{ (重根).}$$

問 2 次の行列の固有値と固有空間の基底を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -10 & -1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

与えられた行列 A の固有値 α を重複を含めて全て求め, 相異なる各固有値 β について, $A - \beta E = \mathbf{0}$ を解く.

$$(1) F_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x = x(x-2) \text{ より, 固有値 } \beta = 0, 2.$$

$$\beta = 0 : A - 0E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2 : A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \text{ より, 固有値 } \beta = \pm i. \quad \beta = i : A - iE = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_i = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = -i : A + iE = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$(3) \begin{vmatrix} x-4 & -4 & -2 \\ -1 & x-6 & -1 \\ 3 & 10 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x-2)(x-3)(x-4) \text{ より, 固有値 } \beta = 2, 3, 4.$$

$$\beta = 2 : A - 2E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & -10 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 3 : A - 3E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -10 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 4 : A - 4E = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -10 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-4 & 1 & -5 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2 \text{ より, 固有値 } \alpha = 2, 1, 1. \quad \beta = 2, 1 \text{ (重根).}$$

$$\beta = 2 : A - 2E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 1 : A - E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

問 3 問 2 の行列 A が対角化可能かどうかを判定し, 対角化可能なら $P^{-1}AP = D$ となる正則行列 P と対角行列 D を求めよ.

(1),(2),(3) は固有値が全て異なるので対角化可能 (系 6.3) で, 固有空間の基底を並べた正則行列 P により, 対応する固有値を対角線上に順に並べた対角行列 D に対角化される:

$$(1) P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2) P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \quad (3) P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(4) 固有値 1 の重複度 = 2, 固有空間の次元 = 1 より対角化不能 (定理 6.4).

問 4 次の行列 A に対し, A^n を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A を正則行列 P により, $P^{-1}AP = D$ と対角化し, $A^n = PD^nP^{-1}$ により求める.

$$(1) \left| \begin{array}{cc} x-7 & -3 \\ 6 & x+2 \end{array} \right| = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \text{ より, 固有値 } \beta = 1, 4.$$

$$\beta = 1: \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \beta = 4: \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ とおくと, } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = D, A = PDP^{-1}, A^n = PD^nP^{-1} \text{ より,}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2n+1}-1 & 2^{2n}-1 \\ 2-2^{2n+1} & 2-2^{2n} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \left| \begin{array}{ccc} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{array} \right| = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2) \text{ より, 固有値 } \beta = 0, 1, 2.$$

$$\beta = 0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \beta = 1: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad P := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1}AP = D, A = PDP^{-1}, A^n = PD^nP^{-1} \text{ より,}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

問 5 次の A と $f(x)$ に対する $f(A)$ を求めよ.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, f(x) = x^5 + x^4 \quad (2) A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, f(x) = x^8 + x^6 - 2$$

$F_A(A) = O$ (定理 6.7) を利用して求める.

$$(1) F_A(x) = \left| \begin{array}{cc} x-1 & 1 \\ -1 & x \end{array} \right| = x^2 - x + 1, (x+1)F_A(x) = x^3 + 1, F_A(A) = O \text{ より, } A^3 = -E, A^2 = A - E.$$

$$f(A) = A^5 + A^4 = -A^2 - A = E - 2A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) F_A(x) = \left| \begin{array}{ccc} x-2 & 8 & -7 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & -4 & x+2 \end{array} \right| = x^3 - x. \therefore F_A(A) = A^3 - A = O, A^3 = A.$$

$$f(A) = A^8 + A^6 - 2E = 2A^2 - 2E = 2 \begin{bmatrix} 2 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -3 & 12 & -8 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 24 & -16 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

問 6 次の実対称行列 A を直交行列 U で対角化せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

固有値と固有空間の基底を求め, 必要があれば直交化し, 正規化して並べれば U を得る.

(1) $\begin{vmatrix} x-2 & \\ -2 & x \end{vmatrix} = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. より, 固有値 $\beta = \pm 2$. $\beta = 2: \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.
 $\beta = -2: \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$ よりこれらは直交している, 正規化して

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とおけばこれは直交行列で, } U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ より, 固有値 $\alpha = 1, 1, -1$.

$\beta = 1: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. これらは直交している.

$\beta = -1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. これは $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と直交している, 正規化して,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とおけばこれは直交行列で, } U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)x^2$ より, 固有値 $\alpha = 0, 0, 3$.

$\beta = 0: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. これらは直交していないので直交化する:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \text{これらを正規化して, } \mathbf{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{とおく.}$$

$\beta = 3: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. これは $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ と直交している, 正規化して, $\mathbf{u}_3 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$U := [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{は直交行列で, } U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

問 7 次の行列 A が正規行列であることを示し, A をユニタリ行列で対角化せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

正規行列であることは $A^*A = AA^*$ を示せばよい. 後は前問と同様.

(1) $A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AA^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, A は正規行列 (直交かつ交代行列).

$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$ より, 固有値 $\beta = \pm i$. $\beta = i: \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_i = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\beta = -i: \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. $\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right) = [-i \ 1] \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ より, これらは直交している.

正規化して, $U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, とおけば U はユニタリ行列で, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

なお, $W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$ より, $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ でもよい. 以下も同様.

(2) $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} = A$ より A はエルミート行列. $A^*A = A^2 = AA^*$ より, A は正規行列.

$\begin{vmatrix} x-1 & i \\ -i & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x = x(x-2)$ より, 固有値 $\beta = 0, 2$. $\beta = 0: \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\beta = 2: \begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. $U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

問 8 次の二次形式 f の行列 A を求めよ.

$$(1) f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 \quad (2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3$$

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & 3 \end{bmatrix}$$

問 9 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで, $f(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 4yz$ の最大値, 最小値を求めよ.

$\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ より, 二次形式 $f(\mathbf{x})$ の行列 A の固有値の最大値最小値を求めればよい.

$$\text{二次形式 } f(\mathbf{x}) \text{ の行列 } A \text{ は, } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)(x+1) \text{ より, 固有値 } \beta = -1, 1, 3.$$

よって, $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ の下での $f(\mathbf{x})$ の最大値は 3, 最小値は -1 . $\beta = 3, -1$ のときの単位固有ベクトルを求める:

$$\beta = 3: \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 単位固有ベクトルは } \mathbf{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = -1: \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 単位固有ベクトルは } \mathbf{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

よって, $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ の下で $f(\mathbf{x})$ は, $\mathbf{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 3, $\mathbf{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 -1 をとる.

6 章章末問題

1 次の行列の固有値を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

固有多項式 $F_A(x) = |xE - A|$ を因数分解するか, 固有方程式 $F_A(x) = 0$ を解く.

$$(1) F_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) \text{ より, 固有値は } 5, -1.$$

$$(2) \begin{vmatrix} x+i & -1 \\ -1 & x-i \end{vmatrix} = x^2 \text{ より, 固有値は } 0, 0.$$

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & -5 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)(x-2) \text{ より, 固有値は } 1, 2, 3.$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x-2 & -2 \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x-2)(x^2-2) \text{ より, 固有値は } 2, \pm\sqrt{2}.$$

$$(5) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -3 & -4 \\ -2 & x-3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)x(x-2) \text{ より, 固有値は } 0, 1, 2, 3.$$

$$(6) \begin{vmatrix} x & 1 & -2 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \stackrel{r_3 \leftarrow r_2}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & -2 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{第3行で展開}}{=} -(1-x) \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ = (x-1)\{-(-x-1)^2 + x(x-1)^2\} = (x-1)^4 \text{ より, 固有値は } 1, 1, 1, 1.$$

2 次の行列 A の固有値と固有空間の基底を全て求め, A が対角化可能かどうか判定し, 対角化可能なら $P^{-1}AP = D$ とする正則行列 P と対角行列 D を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad (8) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列 A の固有値 α を重複を含めて全て求め、相異なる各固有値 β について、 $A - \beta E = \mathbf{0}$ を解いて固有空間 W_β の基底を求める。各 β について $\dim W_\beta = \beta$ の重複度なら対角化可能で、全ての固有空間の基底を並べた行列 P により、対応する固有値を並べた対角行列 D に対角化される。そうでないときは対角化不能。

$$(1) |xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4) \text{ より固有値 } \beta = 1, 4. \quad \beta = 1: A - 1E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 4: A - 4E = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値が異なるので対角化可能。固有空間の基底を並べた行列 $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則で、 $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 。

$$(2) \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 1 \text{ より, 固有値 } \beta = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$\beta = 2 + \sqrt{3}: \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{2+\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2 - \sqrt{3}: \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{2-\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値が異なるので対角化可能で、 $P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ 。

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)^2 \text{ より固有値 } \alpha = 2, 2. \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim W_2 = 1 < \text{重複度 } 2$ より対角化不能。

$$(4) \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2) \text{ より, 固有値 } \alpha = 1, 1, 2.$$

$$\beta = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \beta = 2: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim W_1 = 2 = \text{重複度}$ より対角化可能で、 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

$$(5) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)[\{(x-1)(x-2) - 1\} + 1] = (x-1)^2(x-2) \text{ より, 固有値 } \alpha = 1, 1, 2.$$

$$\beta = 1: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \beta = 2: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim W_1 = 1 < \text{重複度 } 2$ より対角化不能。

$$(6) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ -2 & x-4 & 4 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 \text{ より, 固有値 } \alpha = 1, 2, 2.$$

$$\beta = 1: \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2: \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim W_2 = 2 = \text{重複度}$ より対角化可能で、 $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x-1 & -5 & -7 \\ -1 & x-5 & -1 \\ 2 & -2 & x-8 \end{vmatrix} = x^3 - 14x^2 + 60x - 72 = (x-2)(x-6)^2 \quad \text{より, 固有値 } \alpha = 2, 6, 6.$$

$$\beta = 2 : \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \beta = 6 : \begin{bmatrix} -5 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim W_6 = 1 < \text{重複度 } 2$ より対角化不能.

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2) \quad \text{より, 固有値 } \beta = -1, 1, 2.$$

$$\beta = -1 : \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-2}{7} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 1 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値が全て異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1) \quad \text{より, 固有値 } \beta = 1, i, -i.$$

$$\beta = 1 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = i : \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & 1-i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_i = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = -i : \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 \\ -1 & 0 & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値が全て異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

3 次の行列 A と多項式 $f(x)$ に対し, $f(A)$ を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^{20} - 2x^{13} + x^8 - 1$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^{40} + 3x^{27} + x^{12}$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^{1000}$$

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^n$$

まず固有多項式を求める. それから, 対角化して求めるか, $F_A(A) = O$ (定理 6.7) を利用して求める.

$$(1) \quad F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ -2 & x+3 \end{vmatrix} = x^2 - 1 \quad \text{より } A^2 - E = O. \quad \therefore A^2 = E \quad \text{より,}$$

$$f(A) = A^{20} - 2A^{13} + A^8 - E = E - 2A + E - E = E - 2A = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$(2) F_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 + 1 \text{ より } A^2 + E = O. \therefore A^2 = -E, A^4 = E \text{ より,}$$

$$f(A) = A^{40} + 3A^{27} + A^{12} = 2E + 3A^3 = 2E + 3A(-E) = 2E - 3A = \begin{bmatrix} -4 & -15 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(3) F_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & -6 \\ -1 & x+3 & 3 \\ 1 & -3 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - x \text{ より } A^3 - A = O. \therefore A^3 = A \text{ より } A^{3^n} = A \text{ (} n: \text{自然数)}.$$

$$1000 = 729 + 243 + 27 + 1 (= 3^6 + 3^5 + 3^3 + 1) \text{ より, } A^{1000} = A^{729+243+27+1} = A^4 = A^3 A = A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(4) F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2) \text{ より } A \text{ を対角化する:}$$

$$\beta=0: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \beta=1: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta=2: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. P; = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } A^n = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

4 次の実対称行列 A を直交行列 U で対角化せよ. 即ち, $U^{-1}AU = D$ となる直交行列 U と対角行列 D を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8) \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

全ての固有値と固有空間の基底を求め, 必要があれば直交化し, 正規化して並べれば U を得る.

$$(1) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-2) \text{ より } \beta=0, 2. \beta=0: \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta=2: \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 正規化して, } U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} x-5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & x+1 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 32 = (x+4)(x-8) \text{ より } \beta = -4, 8.$$

$$\beta = -4: \begin{bmatrix} 9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-4} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 8: \begin{bmatrix} -3 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_8 = \left\langle \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 正規化して,}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2) \text{ より } \beta=0, 1, 2. \beta=0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta=1: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \beta=2: \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{これらを正規化して, } U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & -2 \\ 0 & x-4 & -2 \\ -2 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 + 18x = x(x-3)(x-6) \text{ より } \beta = 0, 3, 6.$$

$$\beta = 0 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 3 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 6 : \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ これらを正規化して,}$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) \text{ より } \alpha = 1, 1, 4.$$

$$\beta = 1 : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 直交化して, } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = 4 : \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を正規化して,}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(6) \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 1 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & x-2 & 2 \\ 1 & 2 & x-1 \end{vmatrix} (x+2) \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+2)(x-2)(x-4) \text{ より } \beta = -2, 2, 4.$$

$$\beta = -2 : \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 2 : \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 4 : \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ これらを正規化して,}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x-3)(x^2 - 2x - 1) \text{ より } \beta = 1 \pm \sqrt{2}, 3.$$

$$\beta = 1 - \sqrt{2} : \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_{1-\sqrt{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 1 + \sqrt{2} : \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_{1+\sqrt{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta=3: \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ これらを正規化して,}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} x-1 & -8 & 4 \\ -8 & x-1 & -4 \\ 4 & -4 & x-7 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 - 81x + 729 = (x+9)(x-9)^2 \text{ より } \alpha = -9, 9, 9.$$

$$\beta = -9: \begin{bmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_{-9} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta=9: \begin{bmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } W_9 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle. \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{と直交化してからこれらを正規化して, } U = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5 次の行列 A が正規行列であることを示し, ユニタリ行列 U で対角化せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} i & -1+i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{bmatrix}$$

正規行列であることは $A^*A = AA^*$ を示せばよい. 後は前問と同様.

$$(1) (A^* = {}^t A), {}^t AA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A^t A \text{ より正規行列. } \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 + 1 \text{ より, } \beta = 1 \pm i.$$

$$\beta = 1 \pm i: \begin{bmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{1 \pm i} = \left\langle \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \left(U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \right)$$

$$(2) A^* = -A, A^*A = -A^2 = AA^* \left(= \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \right) \text{ より正規行列.}$$

$$\begin{vmatrix} x-i & 1-i \\ -1-i & x \end{vmatrix} = x^2 - ix + 2 = (x-2i)(x+i) \text{ より, } \beta = 2i, -i.$$

$$\beta = 2i: \begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1+i & -2i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{2i} = \left\langle \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = -i: \begin{bmatrix} 2i & -1+i \\ 1+i & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & (1+i)/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -(1+i)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i-1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i-1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(3) A はエルミート行列 ($A^* = A, A^*A = A^2 = AA^*$) なので正規行列で,

$$\begin{vmatrix} x-1 & -i & 0 \\ i & x & -i \\ 0 & i & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)^2 - 2(x-1) = (x+1)(x-1)(x-2) \text{ より, } \beta = 2, 1, -1.$$

$$\beta=2: \begin{bmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & -2 & i \\ 0 & -i & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \beta=1: \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & -1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = -1: \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2}i & 0 & -2i \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4) A はエルミート行列なので正規行列で,

$$\begin{vmatrix} x-1 & -i & -i \\ i & x-1 & -i \\ i & i & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3 - 3(x-1) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) \text{ より, } \beta = 1, 1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\beta = 1: \begin{bmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 1 + \sqrt{3}: \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & i & i \\ -i & -\sqrt{3} & i \\ -i & -i & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \omega := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ を用いて, } W_{1+\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} \omega \\ -\omega^2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = 1 - \sqrt{3}: \begin{bmatrix} \sqrt{3} & i & i \\ -i & \sqrt{3} & i \\ -i & -i & \sqrt{3} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{1-\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} \omega^2 \\ -\omega \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$|\omega| = 1 \text{ より, } U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ -1 & -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

6 次の二次形式の直交標準形と、標準形にする直交行列 U , 及び符号を求めよ.

$$(1) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$(2) 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$(3) -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

二次形式の行列 A の固有値と固有空間の基底を求め、基底を正規直交化した直交行列 U で対角化する.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. |xE - A| = (x-2)^2(x+1) \text{ より, 固有値 } \alpha = 2, 2, -1. \text{ 標準形 } 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2. \text{ 符号 } (2, 1).$$

$$\beta = 2: \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 直交化して, } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = -1: \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 正規化して, } U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. |xE - A| = x(x-3)^2 \text{ より, 固有値 } \alpha = 3, 3, 0. \text{ 標準形 } 3y_1^2 + 3y_2^2. \text{ 符号 } (2, 0).$$

$$\beta = 3: \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 直交化して, } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = 0: \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 正規化して, } U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}. |xE - A| = (x-4)(x+2)^2 \text{ より, 固有値 } \alpha = 4, -2, -2. \text{ 標準形 } 4y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \text{ 符号 } (1, 2).$$

$$\beta = 4: \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\beta = -2: \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } W_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \text{ 直交化して, } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix}, \left(\text{直交化の順を変えると, } U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \right)$$

7 次の、() 内の条件のもとで $f(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) の最大値、最小値を求めよ.

(1) $f(\mathbf{x}) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 4zx$ ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

(2) $f(\mathbf{x}) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2zx$ ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

(3) $f(\mathbf{x}) = \frac{x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz}{x^2 + y^2 + 4z^2}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

(1),(2) は $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ なので、 $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ として、 A の固有値、単位固有ベクトルを求める方法を用いる.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. $F_A(x) = |xE - A| = (x-4)(x-1)(x+1)$ より固有値 $\beta = 4, 1, -1$.

$\beta = 4$: $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、正規化して、 $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 4 をとる.

$\beta = -1$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、正規化して、 $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 -1 をとる.

(2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $F_A(x) = |xE - A| = (x-4)(x-2)(x-1)$ より固有値 $\beta = 4, 2, 1$.

$\beta = 4$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、正規化して、 $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 4 をとる.

$\beta = 1$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、正規化して、 $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 1 をとる.

(3) $z' = 2z$, $\mathbf{x}' = {}^t[x \ y \ z']$ とおくと、 $f(\mathbf{x}) = \frac{x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz}{x^2 + y^2 + 4z^2} = \frac{x^2 + 2y^2 + z'^2 - 2xy + 2yz'}{x^2 + y^2 + z'^2} =: \frac{g(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}'\|^2}$ と表せる. 定理 6.14 より、二次形式 $g(\mathbf{x}')$ の行列 A の固有値の最大値、最小値が $f(\mathbf{x})$ の最大値、最小値になる.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. $|xE - A| = x(x-1)(x-3)$ より A の固有値 $\beta = 3, 1, 0$. 以下、 $s \neq 0$ とする.

$\beta = 3$: $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、 $W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. よって、 $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき $f(\mathbf{x})$ は最大値 3 をとる.

$\beta = 0$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、 $W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. よって、 $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき $f(\mathbf{x})$ は最小値 0 をとる.

8 a, b, c を 0 でない定数とするとき、次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} a & i & b & -i \\ -i & a & i & b \\ b & -i & a & i \\ i & b & -i & a \end{bmatrix}$

ここでは s, t, u, v は任意の定数で $s \neq 0$, $(t, u) \neq (0, 0)$ 又は $(t, u, v) \neq (0, 0, 0)$ とし、複号は同順とする.

(1) $\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^2 - b^2 = (x-a+b)(x-a-b)$ より、固有値 $\beta = a \pm b$.

$\beta = a \pm b$: $\begin{bmatrix} \mp b & b \\ b & \mp b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、 $\beta = a \pm b$ に対する固有ベクトルは、 $s \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^2 + b^2 = (x-a+bi)(x-a-bi)$ より、固有値 $\beta = a \pm bi$.

$\beta = a \pm bi$: $\begin{bmatrix} \mp bi & -b \\ b & \mp bi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より、 $\beta = a \pm bi$ に対する固有ベクトルは、 $s \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(3) \begin{vmatrix} x-a & -b & -b \\ -b & x-a & -b \\ -b & -b & x-a \end{vmatrix} = (x-a-2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & x-a & -b \\ 1 & -b & x-a \end{vmatrix} = (x-a-2b) \begin{vmatrix} x-a+b & 0 \\ 0 & x-a+b \end{vmatrix} = (x-a-2b)(x-a+b)^2 \text{ より,}$$

固有値 $\alpha = a+2b, a-b, a-b$.

$$\beta = a+2b: \begin{bmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a+2b \text{ に対する固有ベクトルは, } s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = a-b: \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a-b \text{ に対する固有ベクトルは, } t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-a & -b & 0 \\ -c & x-a & -b \\ 0 & -c & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 - 2bc(x-a) = (x-a)\{(x-a)^2 - 2bc\} \text{ より, 固有値 } \beta = a, a \pm \sqrt{2bc}.$$

$$\beta = a: \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & b/c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a \text{ に対する固有ベクトルは, } s \begin{bmatrix} -b/c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ c \end{bmatrix}.$$

$$\beta = a \pm \sqrt{2bc}: \begin{bmatrix} \mp\sqrt{2bc} & b & 0 \\ c & \mp\sqrt{2bc} & b \\ 0 & c & \mp\sqrt{2bc} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b/c \\ 0 & 1 & \mp\sqrt{2bc}/c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a \pm \sqrt{2bc} \text{ に対する固有ベクトルは,}$$

$$s \begin{bmatrix} b/c \\ \pm\sqrt{2bc}/c \\ 1 \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} b \\ \pm\sqrt{2bc} \\ c \end{bmatrix}.$$

$$(5) \text{ この行列 } A \text{ は } \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}, \left(B = \begin{bmatrix} a & i \\ -i & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b & -i \\ i & b \end{bmatrix} \right) \text{ の形なので, 一般に, } \begin{vmatrix} B & C \\ C & B \end{vmatrix} = |B+C||B-C| \text{ より,}$$

$$F_A(x) = |xE_4 - A| = |xE_2 - B - C||xE_2 - B + C| = \begin{vmatrix} x-a-b & 0 \\ 0 & x-a-b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-a+b & -2i \\ 2i & x-a+b \end{vmatrix} = (x-a-b)^2 \{(x-a+b)^2 - 4\} \\ = (x-a-b)^2(x-a+b+2)(x-a+b-2) \text{ より, 固有値 } \alpha = a-b \pm 2, a+b, a+b.$$

$b=1$ のとき, $\beta = a-3, a+1$ (3 重根), $b=-1$ のとき, $\beta = a+3, a-1$ (3 重根),

$b \neq \pm 1$ のとき, $\beta = a-b \pm 2, a+b$ (重根).

$b \neq \pm 1$ のとき:

$$\beta = a-b \pm 2: A - (a-b \pm 2)E = \begin{bmatrix} b \mp 2 & i & b & -i \\ -i & b \mp 2 & i & b \\ b & -i & b \mp 2 & i \\ i & b & -i & b \mp 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3, r_2+r_4} \begin{bmatrix} \mp 2 & 2i & \pm 2 & -2i \\ 0 & 2b \mp 2 & 0 & 2b \mp 2 \\ b & -i & b \mp 2 & i \\ i & b & -i & b \mp 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{\mp 1}{2b \mp 2} r_1} \begin{bmatrix} 1 & \mp i & -1 & \pm i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & -i & b \mp 2 & i \\ i & b & -i & b \mp 2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r_1 \pm i r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & -i & b \mp 2 & i \\ i & b & -i & b \mp 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - b r_1, r_4 - i r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 2b \mp 2 & i \mp 2bi \\ 0 & b & 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + i r_2, r_4 - b r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b \mp 2 & 2i \mp 2bi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2b \mp 2} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mp i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mp i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a-b \pm 2 \text{ に対する固有ベクトルは, } s \begin{bmatrix} \mp i \\ -1 \\ \pm i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = a+b: A - (a+b)E = \begin{bmatrix} -b & i & b & -i \\ -i & -b & i & b \\ b & -i & -b & i \\ i & b & -i & -b \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1, r_4+r_2} \begin{bmatrix} -b & i & b & -i \\ -i & -b & i & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{i r_2} \begin{bmatrix} -b & i & b & -i \\ 1 & -bi & -1 & bi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -bi & -1 & bi \\ -b & i & b & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{r_2 + b r_1} \begin{bmatrix} 1 & -bi & -1 & bi \\ 0 & i - b^2 i & 0 & b^2 i - i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{i-b^2 i} r_2} \begin{bmatrix} 1 & -bi & -1 & bi \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + b i r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より,}$$

$$b \neq \pm 1 \text{ のとき, } \beta = a+b \text{ に対する固有ベクトルは, } t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$b = \pm 1$ のとき:

$$\beta = a \mp 3 : A - (a \mp 3)E = \begin{bmatrix} \pm 3 & i & \pm 1 & -i \\ -i & \pm 3 & i & \pm 1 \\ \pm 1 & -i & \pm 3 & i \\ i & \pm 1 & -i & \pm 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mp i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } \beta = a \mp 3 \text{ に対する固有ベクトルは, } s \begin{bmatrix} \pm i \\ -1 \\ \mp i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta = a \pm 1 : A - (a \pm 1)E = \begin{bmatrix} \mp 1 & i & \pm 1 & -i \\ -i & \mp 1 & i & \pm 1 \\ \pm 1 & -i & \mp 1 & i \\ i & \pm 1 & -i & \mp 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \mp i & -1 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より,}$$

$$\beta = a \pm 1 \text{ に対する固有ベクトルは, } t \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \mp i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ((t, u, v) \neq (0, 0, 0)).$$

9 次の n 次行列 A_n ($n \geq 1$) の固有多項式を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$G_n = xE_n - A_n$ とおき, $F_n(x) = |G_n|$ を, 3 章章末問題 15(6) の行列式と同様に, 第 1 列に余因子展開を用いる:

$$(1) F_n(x) = |G_n| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x|G_{n-1}| + (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} = x|G_{n-1}| + a_n = x(x|G_{n-2}| + a_{n-1}) + a_n \cdots = x^{n-1}|G_1| + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$|G_1| = F_1(x) = x + a_1$ より, $F_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

(別解) $n+1$ 次行列式 $F_{n+1}(x)$ は 3 章章末問題 15(6) の $n+1$ 次行列式において, $a_1 \sim a_n$ を $a_2 \sim a_{n+1}$ とし, a_0 を $x+a_1$ としたものなので, $F_{n+1}(x) = x^n(x+a_1) + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n+1} = x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$.

(注) この行列及び固有方程式は, 線形漸化式や線形常微分方程式の解法に現れる.

$$(2) F_1(x) = G_1 = x-1, F_2(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2-1. \quad n \geq 3 \text{ のとき, } F_n(x) \text{ を第 1 列で展開後, 最終列で展開すると:}$$

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} x & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & G_{n-2} & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} G_{n-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -1 \\ G_{n-2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = x^2 |G_{n-2}| + (-1)^{n+2+n+1} |G_{n-2}| = (x^2-1)F_{n-2}(x)$$

より,

$$n = 2m \text{ のとき } F_{2m}(x) = (x^2-1)^{m-1} F_2(x) = (x^2-1)^m = (x+1)^m (x-1)^m,$$

$$n = 2m-1 \text{ のとき } F_{2m-1}(x) = (x^2-1)^{m-1} F_1(x) = (x+1)^{m-1} (x-1)^m.$$

10 $V = \mathbb{R}[x]_2$ 上の次の一次変換 F の固有値 β と固有空間 $W_\beta(F) \subset V$ を求めよ.

$$(1) F(p(x)) = p(3x+1) \quad (2) F(p)(x) = (x+3) \frac{dp}{dx}(x)$$

$$(3) F(p(x)) = (x+2) \frac{dp}{dx}(x-1) + 2p(x)$$

F の基底 $[x^2 \ x \ 1]$ に関する表現行列 A , その固有値 β , A の固有空間 V_β より, F の固有空間 W_β を求める.

$$(1) [F(x^2), F(x), F(1)] = [9x^2+6x+1, 3x+1, 1] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より, } A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 固有値は } \beta = 9, 3, 1.$$

$$\beta = 9 : A - 9E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -8 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } V_9 = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_9 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle 4x^2+4x+1 \rangle.$$

$$\beta = 3 : A - 3E = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_3 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle 2x+1 \rangle.$$

$$\beta=1: A-E = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_1 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle 1 \rangle.$$

$$(2) \quad [F(x^2), F(x), F(1)] = [2x^2+6x, \ x+3, \ 0] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より, } F \text{ の基底 } [x^2 \ x \ 1] \text{ に関する表現行列は,}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{例題 4.33}). \quad \text{固有値は } \beta = 2, 1, 0.$$

$$\beta=2: A-2E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1/9 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_2 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x^2+6x+9 \rangle.$$

$$\beta=1: A-E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_1 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x+3 \rangle.$$

$$\beta=0: A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_0 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle 1 \rangle.$$

$$(3) \quad [F(x^2), F(x), F(1)] = [4x^2+2x-4, \ 3x+2, \ 2] = [x^2, x, 1] \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{より, } F \text{ の基底 } [x^2 \ x \ 1] \text{ に関する表現行列}$$

$$\text{は, } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{固有値は } \beta = 4, 3, 2.$$

$$\beta=4: A-4E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_4 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x^2+2x \rangle.$$

$$\beta=3: A-3E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_3 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x+2 \rangle.$$

$$\beta=2: A-2E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{より } V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad W_2 = \left\langle [x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle 1 \rangle.$$

11 (定理 6.10 の逆) 正規行列 A に対し次を示せ.

- (1) A の固有値が全て実数ならば A はエルミート行列である.
- (2) A の固有値が全て絶対値 1 の複素数ならば A はユニタリ行列である.
- (3) A の固有値が全て純虚数または 0 ならば A は歪エルミート行列である.

A をユニタリ行列 U で対角化し, $U^{-1}AU = D$ (対角行列) とすると $A = UDU^{-1} = UDU^*$, $D^* = \overline{D}$.

- (1) D は実行列なので $D^* = D$ より, $A^* = (UDU^*)^* = U^{**}D^*U^* = UDU^* = A$.
- (2) $D^*D = \overline{D}D = E$ より, $A^*A = (UD^*U^*)(UDU^*) = UD^*DU^* = UEU^* = E$.
- (3) $D^* = \overline{D} = -D$ より, $A^* = U^*D^*U = U^*(-D)U = -A$.

12 正則行列 A に対し, $A^{-1} = f(A)$ となる多項式 $f(x)$ が存在することを示せ.

$F_A(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$, ($c_n = (-1)^n|A| \neq 0$) とするとき,

$F_A(A) = A(A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}E) + c_nE = O$ (定理 6.7). $f(x) := -(1/c_n)(x^{n-1} + \cdots + c_{n-1})$ とおけば,

$Af(A) = -(1/c_n)A(A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}E) = -(1/c_n)(F_A(A) - c_nE) = E$ より, $A^{-1} = f(A)$.

なお, A の固有値 α と固有ベクトル $\mathbf{p}$ ($\neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$) に対し, $Af(A) = E$, $Af(A)\mathbf{p} = \alpha f(\alpha)\mathbf{p} = E\mathbf{p} = 1\mathbf{p}$ より, $(\alpha f(\alpha) - 1)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\therefore \alpha f(\alpha) - 1 = 0$, $f(\alpha) = \alpha^{-1}$. 即ち, $A^{-1}\mathbf{p} = f(A)\mathbf{p} = \alpha^{-1}\mathbf{p}$ となり, $\mathbf{p}$ は A^{-1} の α^{-1} に対する固有ベクトルになる.

13 n 次正方行列 A の固有多項式, 固有値に関し次を示せ.

(1) A と tA の固有多項式, 固有値は一致する.

(2) A が正則で, $F_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ ならば, 逆行列 A^{-1} の固有多項式は $F_{A^{-1}}(x) = (x - \alpha_1^{-1}) \cdots (x - \alpha_n^{-1})$, 従って, A^{-1} の固有値は $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$.

(3) B も n 次正方行列ならば, AB と BA の固有多項式, 固有値は一致する.

(1) $F_{{}^tA}(x) = |xE - {}^tA| = |{}^t(xE - A)| = |xE - A| = F_A(x)$.

(2) A が正則なので $|A| = \prod_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. $x \neq 0$ のとき,

$$F_{A^{-1}}(x) = |xE - A^{-1}| = |(xA - E)A^{-1}| = |xA - E||A^{-1}| = |A|^{-1}|(-x)(x^{-1}E - A)| = |A|^{-1}(-x)^n |x^{-1}E - A| \\ = \left\{ \prod_{i=1}^n \alpha_i^{-1} \right\} (-x)^n F_A(x^{-1}) = \prod_{i=1}^n (-x\alpha_i^{-1}) \prod_{i=1}^n (x^{-1} - \alpha_i) = \prod_{i=1}^n \{-x\alpha_i^{-1}(x^{-1} - \alpha_i)\} = \prod_{i=1}^n (-\alpha_i^{-1} + x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i^{-1}).$$

(3) A が正則のときは $A^{-1}(AB)A = BA$ より, $F_{AB}(x) = F_{BA}(x)$ ([EV8]). 一般には, $C = \begin{bmatrix} xE - AB & A \\ O & xE \end{bmatrix}$,

$$P = \begin{bmatrix} E & O \\ B & E \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} xE & A \\ O & xE - BA \end{bmatrix} \text{ とおくと, } P^{-1} = \begin{bmatrix} E & O \\ -B & E \end{bmatrix}, P^{-1}CP = D \text{ となる. } |D| = |P^{-1}CP| = |C|,$$

$$|C| = |xE - AB||xE|, |D| = |xE||xE - BA| \text{ より } F_{AB}(x) = |xE - AB| = |xE - BA| = F_{BA}(x).$$

14 直交行列 U に対し, 次を示せ.

(1) $|U| = -1$ ならば U は固有値に -1 をもつ.

(2) $|U| = 1$ で U が奇数次ならば U は固有値に 1 をもつ.

一般に, 実数係数の代数方程式 $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ が虚根 $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\alpha \notin \mathbb{R}$, $f(\alpha) = 0$) をもてば,

$f(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^n + c_1\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + c_n = \overline{\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_n} = \overline{f(\alpha)} = \bar{0} = 0$ より, $\bar{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の根で, α と $\bar{\alpha}$ の重複度も等しい.

(これにより, 実数係数の多項式は, 実数係数の 2 次式 $(x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + |\alpha|^2)$ と 1 次式の積に分解される.)

直交行列 U の固有多項式は実数係数で, 固有値 α の絶対値は 1 ($|\alpha| = 1$) より, α が虚数なら $\bar{\alpha}$ も U の固有値になり, $\alpha\bar{\alpha} = 1$. 虚数の固有値は偶数個で, その全ての積は 1 . α が実数なら $\alpha = \pm 1$. $|U|$ は全ての固有値の積より,

(1) $|U| = -1$ ならば U は固有値 -1 を奇数個 ($\neq 0$ 個) もつ.

(2) U が奇数次のときは U は実数の固有値 (± 1) を奇数個もち, $|U| = 1$ ならば固有値 1 を奇数個もつ.

15 3 次の直交行列 A はある直交行列 U により, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ と表されることを示せ. 従って,

$U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ とするとき, A の定める一次変換は, $|A| = 1$ のときは直線 $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ を軸とする θ 回転を表し, $|A| = -1$ のときは $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ を軸とする θ 回転と平面 $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ に関する対称移動の合成を表す.

問題 14 より, A は固有値 $|A|$ ($= \pm 1$) をもつ. $|A|$ に対する単位固有実ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とし, $\mathbf{u}_1$ を延長して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ をつくと $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} |A| & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} =: T$ となる (定理 6.2 の証明参照). U, A, U^{-1} は直交行列なので, その積 T も直交行列 (第 5 章問 10). 従って T の第 1 行ベクトルの長さは 1 ($|A| = \pm 1$) より $* = \mathbf{0}$ となり, A_1 も直交行列で, $|A_1| = 1$ となる. このとき, 第 5 章問題 5.8 より $A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ となり, 求める結果をえる.

(別解) $\mathbf{u}_1$ を $|A|$ に対する単位固有実ベクトルとする. A の, $|A|$ 以外の固有値が ± 1 (重根) のときは A は直交行列で対角化され, $1, -1$ に応じて $\theta = 0, \pi$ とすればよい. $|A|$ 以外の固有値が虚数 $\alpha, \bar{\alpha}$ のとき, α に対する単位固有ベクトルを $\mathbf{p}$ とすれば, $A\bar{\mathbf{p}} = \overline{A\mathbf{p}} = \overline{\alpha\mathbf{p}} = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}}$ より $\bar{\mathbf{p}}$ が $\bar{\alpha}$ に対する固有ベクトルになる. $\alpha = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{p} + \bar{\mathbf{p}})$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})$ とおくと, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は実単位ベクトルで, $A\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3$, $A\mathbf{u}_3 = -b\mathbf{u}_2 + a\mathbf{u}_3$.

$$|\alpha| = 1 \text{ より } a = \cos \theta, b = \sin \theta \text{ と表せるので, } U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \text{ とおけば } AU = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

16 n 次正方行列 A の固有値 α に関し次を示せ. ここで k は自然数とする.

(1) A が $A^k = E$ をみたすならば $\alpha^k = 1$.

- (2) A がべき等行列 ($A^2 = A$) ならば $\alpha = 0$, または 1 .
 (3) A がべき零行列 ($A^k = O$ となる k がある) ならば $\alpha = 0$.

$\mathbf{p}$ を, A の固有値 α に対する固有ベクトル ($A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) とすると, $A^k\mathbf{p} = A^{k-1}\alpha\mathbf{p} = \cdots = \alpha^k\mathbf{p}$. 一般に,
 $s, t \in \mathbb{C}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, $s\mathbf{p} = t\mathbf{p}$ ならば $(s-t)\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ より $s-t=0$. $\therefore s=t$. これより,

- (1) $\alpha^k\mathbf{p} = A^k\mathbf{p} = E\mathbf{p} = 1\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^k = 1$.
 (2) $\alpha^2\mathbf{p} = A^2\mathbf{p} = A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha-1) = 0$ より $\alpha = 0, 1$.
 (3) $\alpha^k\mathbf{p} = A^k\mathbf{p} = O\mathbf{p} = 0\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^k = 0$. $\therefore \alpha = 0$.

17 (べき零行列) n 次正方行列 N に対し, 次を示せ.

- (1) 次は同値である.
 (i) N はべき零行列である. (ii) N の固有値は全て 0 である. (iii) $N^n = O$.
 (2) O でないべき零行列 N は対角化不能である.
 (1) (iii) $\Rightarrow$ (i) は明らか. (i) $\Rightarrow$ (ii) は問題 16(3) で示した.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): N を正則行列 P で三角化すれば (ii) より, $P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: T$. $T^2, T^3, \dots$ を計算すれば, T^2 は

対角線の 1 つ右の成分が全て 0 になり, T^k は対角線の $k-1$ 個右まで 0 になり, 最終的に $T^n = O$ となる:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad T^n = O.$$

このことを帰納的に示す: $T = [t_{ij}]$ とすると, $1 \leq j \leq i$ のとき $t_{ij} = 0$. $k \geq 1$ として

$T^k = [u_{ij}]$ とおき, $u_{ij} = 0$ ($1 \leq j < i+k$) と仮定して, $(TT^k)_{ij} = 0$ ($1 \leq j \leq i+k$) を示せばよい.

$$(TT^k)_{ij} = \sum_{m=1}^n t_{im}u_{mj} = \sum_{m \leq i} t_{im}u_{mj} + \sum_{i < m} t_{im}u_{mj}$$

の右辺第一項は $t_{im} = 0$ ($1 \leq m \leq i$) より 0 . 仮定より $u_{mj} = 0$ ($j < m+k$) なので, $j \leq i+k$ のとき, 第二項も $j \leq i+k < m+k$ より $u_{mj} = 0$. よって, $1 \leq j \leq i+k$ のとき $(TT^k)_{ij} = 0$.

よって, $N^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} = O$.

- (2) $N \neq O$ より (1) の $T \neq O$. $\therefore \text{rank } N = \text{rank } T > 0$. よって $\dim W_0 = n - \text{rank } N < n$ だが, 0 の重複度は n より対角化不能 (定理 6.4).

18 n 次べき等行列 A について次を示せ.

- (1) $E-A$ もべき等である.
 (2) A は対角化可能である.
 (3) $\text{tr } A = \text{rank } A = \text{固有値 } 1 \text{ の重複度}$.

(1) $(E-A)^2 = E - 2A + A^2 = E - A$.

- (2) 問題 16(2) より A の固有値は $1, 0$. これらの重複度を r, s ($r+s=n$) とし, A を正則行列 P で三角化すると,

$$P^{-1}AP = T = \begin{bmatrix} T_1 & B \\ O & T_0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} T_1 : r \text{ 次上三角行列で対角成分は全て } 1 \\ T_0 : s \text{ 次上三角行列で対角成分は全て } 0 \end{cases}$$

とできる. $T^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = T$ より T もべき等, $\therefore T^s = T$.

問題 17(1)(iii) の解答より $T_0^s = O$ なので,

$$T^s = \begin{bmatrix} T_1^s & B' \\ O & T_0^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^s & B' \\ O & O \end{bmatrix} = T = \begin{bmatrix} T_1 & B \\ O & T_0 \end{bmatrix} \quad \therefore T_0 = O$$

($\therefore T$ は階数 r の行階段型行列で $\text{tr } T = r$ なので (3) が成り立つことが分る.)

一方, $T_1^2 = T_1 = [t_{ij}]$ の, (対角線の 1 つ右の) $(i, i+1)$ 成分を比較すると $2t_{i,i+1} = t_{i,i+1}$ より $t_{i,i+1} = 0$. これを用いると, (2 つ右の) $(i, i+2)$ 成分も $2t_{i,i+2} = t_{i,i+2}$ より $t_{i,i+2} = 0$. これを繰り返すと $T_1 = E = E_r$ となる.

$$\therefore T = \begin{bmatrix} E & B \\ O & O \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} E-B & \\ O & E \end{bmatrix} \text{ とおく. } TQ = \begin{bmatrix} E & B \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E-B & \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E-B & \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix} = QE'_r, \quad E'_r := \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

より, $(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}TQ = E'_r$ と対角化される.

(3) (2) より r は固有値 1 の重複度 とするとき, $\text{tr } A = \text{tr } E'_r = r = \text{rank } E'_r = \text{rank } A$.

19 べき等エルミート行列 ($P^2 = P$, $P^* = P$) を射影行列という. このとき次を示せ.

(1) n 次射影行列 P は, 階数が r のとき, あるユニタリ行列 $U = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ により, $U^{-1}PU = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = E'_r$ と対角化される. 従って, P の定める線形写像は部分空間 $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ への直交射影を表す.

(2) n 次正規行列 A の相異なる固有値を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, β_i の重複度を m_i ($\sum_{i=1}^k m_i = n$) とするとき, A は

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = E, \quad P_i P_j = O \quad (i \neq j) \quad \text{rank } P_i = m_i$$

をみたす射影行列の組 $P_1, P_2, \dots, P_k$ により

$$A = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \cdots + \beta_k P_k$$

と表せる.

(1) P はエルミート行列なので, あるユニタリ行列 U で対角化され, P はべき等なので固有値は 1, 重複度は r (問題 18(3)) より, $U^{-1}PU = E'_r$ と対角化される.

(2) A はあるユニタリ行列 U により $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \beta_1 E_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k E_{m_k} \end{bmatrix}$ と対角化できる. このとき,

$$P_i = U \begin{bmatrix} O & & \\ & E_{m_i} & \\ & & O \end{bmatrix} U^{-1} \text{ と定めればよい.}$$

20 n 次エルミート行列 H が正値 (半正値) であるとは, 全ての $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) に対して $\mathbf{x}^* H \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^* H \mathbf{x} \geq 0$) が成り立つときをいう. このとき次を示せ.

(1) エルミート行列 H に対し次は同値である.

(i) H は (半) 正値である. (ii) H の固有値は全て正 (または 0) である.

(2) 正値エルミート行列 H は正則行列である.

(3) A が正則 (複素) 行列ならば $A^* A, A A^*$ は (半) 正値エルミート行列である.

(4) H が (半) 正値エルミート行列ならば $H = X^2$ となる (半) 正値エルミート行列 X が存在する. (この X を $\sqrt{H}$ と表す.)

(5) 正則行列 A は, あるユニタリ行列 U, U' と正値エルミート行列 H, H' により $A = UH = H'U'$ と表せる.

(1) 定理 6.15 と同様, H の固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とし, H をユニタリ行列 $U = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ ($H\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i$) で対角化して, $U^{-1}HU = U^*HU = D$ とする. 以下正値の場合について示す. 半正値のときは $>, <$ を $\geq, \leq$ にかえて同様.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $0 < \mathbf{u}_i^* H \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* \alpha_i \mathbf{u}_i = \alpha_i \|\mathbf{u}_i\|^2 = \alpha_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ ならば, 任意の $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} = {}^t[y_1 \cdots y_n] = U^{-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) と表すと,

$$\mathbf{x}^* H \mathbf{x} = \mathbf{y}^* U^* H U \mathbf{y} = \mathbf{y}^* D \mathbf{y} = \alpha_1 |y_1|^2 + \cdots + \alpha_n |y_n|^2 > 0.$$

(2) $|H| = \alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$ より正則.

(3) $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対し, $\mathbf{x}^* (A^* A) \mathbf{x} = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 \geq 0$. A が正則なら $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ より $\|A\mathbf{x}\|^2 > 0$. AA^* も同様.

(4) H をユニタリ行列 U で対角化して, $U^*HU = D$ とする. D は対角成分が固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ の対角行列. $\sqrt{D}$ を対角成分が $\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}$ の実対角行列とすると $\sqrt{D}^* \sqrt{D} = \sqrt{D}^2 = D$. このとき, $B := U\sqrt{D}U^*$ とおけば, $B^2 = (U\sqrt{D}U^*)(U\sqrt{D}U^*) = UDU^* = H$.

(5) (2)(3) より $A^* A = H^2$ となる正値エルミート行列 H がある. $U := AH^{-1}$ とおけば,

$$U^*U = H^{*-1}A^*AH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = E \text{ より } U \text{ はユニタリ行列.}$$

同様に, H' を $AA^* := H'^2$, $U' := H'^{-1}A$ で定めると $U'U'^* = E$.

21 (ケーリー変換) H をエルミート行列とするととき次を示せ.

(1) $E \pm iH$ は正則である.

(2) $U = (E - iH)(E + iH)^{-1}$ はユニタリ行列である.

(3) (2) の U は固有値 -1 をもたず, $E + U$ は正則である.

(4) (2) の U に対し, $H = -i(E - U)(E + U)^{-1}$.

(1) H の固有値 α は実数. この固有ベクトルを $\mathbf{p}$ ($H\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$) とすると, $(E \pm iH)\mathbf{p} = \mathbf{p} \pm iH\mathbf{p} = (1 \pm i\alpha)\mathbf{p}$.
 $\therefore E \pm iH$ の固有値は $1 \pm i\alpha \neq 0$ より $E \pm iH$ は正則.

(2) 一般に, 行列 B, C が可換で C が正則なら, $CBC^{-1} = BCC^{-1} = B$.

$\therefore BC^{-1} = C^{-1}(CBC^{-1}) = C^{-1}B$. つまり B と C^{-1} も可換 (1章問題 7).

以下, $B = E - iH$, $C = E + iH$ とおくと, B, C は可換, (1) より正則で $U = BC^{-1}$. また, $B^* = E + iH^* = C$, $C^* = B$,
 $U^* = C^{*-1}B^* = B^{-1}C = CB^{-1} = (BC^{-1})^{-1} = U^{-1}$ より U はユニタリ行列である.

(3) (1) より $(E \pm iH)\mathbf{p} = (1 \pm i\alpha)\mathbf{p}$. 即ち, $B\mathbf{p} = (E - iH)\mathbf{p} = (1 - i\alpha)\mathbf{p}$, $C\mathbf{p} = (E + iH)\mathbf{p} = (1 + i\alpha)\mathbf{p}$.

問題 12 の略解より $C^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{1 + i\alpha}\mathbf{p}$. $U\mathbf{p} = BC^{-1}\mathbf{p} = \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha}\mathbf{p}$. $\frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha} \neq -1$ より U は固有値に -1 をもたず,
 $E + U$ は正則である.

(4) $E + U = E + BC^{-1} = (C + B)C^{-1} = 2C^{-1}$, $E - U = E - BC^{-1} = (C - B)C^{-1} = 2iHC^{-1}$.

$\therefore -i(E - U)(E + U)^{-1} = -i(2iHC^{-1})\frac{1}{2}C = H$.