

「工学のための線形代数」問題の略解 (計算問題は答のみ掲載)

2021 年 5 月 1 日

1 章

問 1 第 3 行 $[9 \ 0 \ -1 \ -2]$, 第 4 列 $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$, $(2, 3)$ 成分 7, $(3, 4)$ 成分 -2

問 2 (1) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -7 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 11 & 19 & 33 \end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 16 \\ 14 & 14 & 10 \end{bmatrix}$

問 3 $\begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 17 & 22 & 27 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

問 4 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

問 5 $\sum_i a_{ii} b_{ii}$

問 6 (1) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$, $BA = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq O$

(2) $X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ とおいて, 方程式 $AX = E$ を成分で表すと,

$AX = \begin{bmatrix} x+y & z+w \\ 2x+2y & 2z+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \therefore \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} z+w = 0 \\ 2z+2w = 1 \end{cases}$ となり, この解 X は存在しない.

$YA = E$ も同様.

(3) $AB = \begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $AB = BA$.

問 7 ${}^tA = \begin{bmatrix} 2i & -3i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 3i & 1+2i \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} -2i & 3i \\ 1 & 1+2i \end{bmatrix}$

問 8 $\overline{(ABC)} = \overline{(AB)}\overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $(ABC)^* = C^*(AB)^* = C^*B^*A^*$

問 9 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$, $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ より $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

問 10 (4) $\overline{A(A^{-1})} = \overline{A}A^{-1} = \overline{E} = E$, $\overline{(A^{-1})A} = \overline{A^{-1}}\overline{A} = \overline{E} = E$ より.

(5) $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = E^* = E$, $(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = E^* = E$ より.

問 11 $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = (A_2 \cdots A_k)^{-1}A_1^{-1} = (A_3 \cdots A_k)^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1} = \cdots = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

問 12 左から 3 番目までは容易. 4 番目は計算による.

問 13 $\iota(\frac{1}{2}(A + {}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^tA) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

$\iota(\frac{1}{2}(A - {}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

$\frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) = A$.

問 14 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ を上三角行列とする. $i > j$ のとき, $a_{ij} = b_{ij} = 0$ より $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ は, $k < i$ の

とき $a_{ik} = 0$, $k \geq i > j$ のとき $b_{kj} = 0$ より 0. $\therefore AB$ は上三角行列. 同様に, $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii}$.

下三角行列も同様.

問 15 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とする.

(1) $\text{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr } A + \text{tr } B$. $\text{tr } sA = \sum_{i=1}^n sa_{ii} = s \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) = s \text{tr } A$.

(2) $\text{tr } AB = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr } BA$.

問 16 (1) $\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} A+XC & B+XD \\ C & D \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} A & BP \\ C & DP \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} A & AX+B \\ C & CX+D \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$

1 章章末問題

1 (1) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (6) -6

2 略

3 (1) $\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 2+i & 3-i \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 2-i & 3+i \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 7+5i & 2+i \\ 5-2i & 3+i \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2i & 3+i \\ 1+i & 2+4i \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 10+i & 1-i \\ 8+3i & -i \end{bmatrix}$

4 AA^{-1} , $A^{-1}A$ を計算して E になることを示す.

5 (1) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^n = O$ ($n \geq 3$) (2) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$ (3) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (4) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 (1) $A = AE = A(BC) = (AB)C = EC = C$.

(2) $AB = AC$ の両辺に A^{-1} を左から掛けると, 左辺 $= A^{-1}AB = EB = B$, 右辺 $= A^{-1}AC = C$ より $B = C$.
 同様に, $B = BAA^{-1} = CAA^{-1} = C$.

(3) $A^n(A^{-1})^n = A^{n-1}(AA^{-1})(A^{-1})^{n-1} = A^{n-1}E(A^{-1})^{n-1} = A^{n-1}(A^{-1})^{n-1} = \cdots = E$. 同様に, $(A^{-1})^n A^n = E$ より $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

7 $A^n B = A^{n-1}(AB) = A^{n-1}BA = A^{n-2}BA^2 = \cdots = BA^n$. A が正則のとき $n \geq 1$ として, $A^n B = BA^n$ の両辺に左右から A^{-n} を掛けると,
 左辺 $= A^{-n}A^n B A^{-n} = BA^{-n}$, 右辺 $= A^{-n}B$ より出る.

8 (1) 両辺の積 PP^{-1} , $P^{-1}P$ を計算して単位行列になることを確かめる.

(2) $Q^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$.

9 (1),(2) とともに $AB = BA$. 左辺 $-$ 右辺 $= BA - AB = O \Leftrightarrow AB = BA$.

10 (1) $\text{tr} AB = \text{tr} BA$ より $\text{tr}((AB)C) = \text{tr}(C(AB)) = \text{tr}((CA)B) = \text{tr}(B(CA))$.

(2) (1) より $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr} A$.

11 $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$, $\text{tr} E_n = n$ より存在すれば矛盾する.

12 (1) $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. (2) ${}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA$.

(3) $(A^*A)_{ii} = \sum_{j=1}^m (A^*)_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^m \overline{a_{ji}} a_{ji} = \sum_{j=1}^m |a_{ji}|^2 (\geq 0)$ より, $\text{tr} A^*A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ji}|^2 \geq 0$.

(4) (2) より $\text{tr} A^*A = 0 \Rightarrow$ 全ての i, j について $|a_{ji}|^2 = 0 \Rightarrow A = O$.

13 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ とすれば $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j = \mathbf{b}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) $\therefore A = B$.

14 (1) $A^{k-1}A = A^k = E = AA^{k-1}$ より $A^{-1} = A^{k-1}$.

(2) $A \neq E$ を正則と仮定すると, 両辺に A^{-1} を掛ければ $A = E$ となり矛盾. (3) A を正則と仮定すると, 両辺に A^{-k} を掛ければ $E = O$ となり矛盾.

$$15 \quad (E+A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i = E - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1}.$$

$$(E-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

$$16 \quad (1) \quad P(E+P) = P+P^2 = (E+P)P \text{ と問題 7 より } P(E+P)^{-1} = (E+P)^{-1}P.$$

$$(2) \quad \text{注意 1.7 より } P \text{ は正則で, } {}^t(E \pm P) = E \pm {}^tP = {}^tPP \pm {}^tP = {}^tP(P \pm E) \text{ より,}$$

$${}^tA = {}^t(E+P)^{-1} {}^t(P-E) = (E+{}^tP)^{-1} {}^tP(E-P) = \{{}^tP(P+E)\}^{-1} {}^tP(E-P)$$

$$= (P+E)^{-1} {}^tP^{-1} {}^tP(E-P) = (P+E)^{-1}(E-P) = (E-P)(P+E)^{-1} = -A.$$

$$(3) \quad E-A = (P+E)(P+E)^{-1} - (P-E)(E+P)^{-1} = \{(P+E) - (P-E)\}(E+P)^{-1}$$

$$= 2(E+P)^{-1} \text{ より } E-A \text{ は正則で, } (E-A)^{-1} = \frac{1}{2}(E+P).$$

$$(4) \quad E+A = 2P(E+P)^{-1}. (E+A)(E-A)^{-1} = 2P(E+P)^{-1} \frac{1}{2}(E+P) = P.$$

$$17 \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ とおく. } A = aE + N, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = N^4 = \cdots = O \text{ より,}$$

$$A^n = (aE + N)^n = a^n E^n + {}_nC_1 a^{n-1} E^{n-1} N + {}_nC_2 a^{n-2} E^{n-2} N^2 + \cdots + N^n$$

$$= a^n E + n a^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} N^2 = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

$$18 \quad (1), (2), (3) \text{ は } [X, Y] \text{ など に } XY - YX \text{ など を代入して計算する. (3) は } [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] = -[[Z, X], Y]$$

$$\text{を示せばよい.}$$

$$(4) \quad {}^t[X, Y] = {}^t(XY) - {}^t(YX) = {}^tY {}^tX - {}^tX {}^tY = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = YX - XY = -[X, Y].$$

$$19 \quad (1) \quad \text{両辺の } (i, j) \text{ 成分は } a_{ij}.$$

$$(2) \quad (p, q) \text{ 成分をみると, } (E_{ij}E_{kl})_{pq} = \sum_r (E_{ij})_{pr} (E_{kl})_{rq} = \sum_r (\delta_{ip}\delta_{jr})(\delta_{kr}\delta_{lq}) = \delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{lq} = \delta_{jk}(E_{il})_{pq}$$

$$20 \quad AE_{k\ell} = E_{k\ell}A \quad (1 \leq k, \ell \leq n) \text{ より } a_{ij} = 0, \quad a_{ii} = a_{jj} \quad (i \neq j) \text{ を示す.}$$

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_i a_{ik} E_{i\ell} \quad (\text{第 } \ell \text{ 列が } \mathbf{a}_j, \text{ 他の列が } \mathbf{0} \text{ の行列}),$$

$$E_{k\ell}A = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_j a_{\ell j} E_{kj} \quad (\text{第 } k \text{ 行が } \mathbf{a}^\ell, \text{ 他の行が } \mathbf{0} \text{ の行列}).$$

$$\ell = k \text{ として } \sum_i a_{ik} E_{ik} = \sum_j a_{kj} E_{kj} \text{ より, } i \neq k, j \neq k \Rightarrow a_{ik} = a_{kj} = 0, \text{ 即ち, } i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0. \text{ これを代入し}$$

$$\text{て, } AE_{k\ell} = a_{kk} E_{k\ell}, \quad E_{k\ell}A = a_{\ell\ell} E_{k\ell} \text{ より } a_{kk} = a_{\ell\ell}. \text{ 即ち, } a_{11} = \cdots = a_{nn}. \therefore A = a_{11}E.$$

2 章

$$\text{問 1} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

問 2 略

$$\text{問 3} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 2 \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 3 \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 2$$

$$\text{問 4} \quad A \text{ が正則} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \text{ が唯一つの解. } A \text{ は } n \text{ 次とする. } \text{rank } A \leq \text{rank } [A, \mathbf{b}] \leq n \text{ と定理 2.4 より, } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{が唯一つの解をもつ} \Leftrightarrow \text{rank } [A, \mathbf{b}] = \text{rank } A = n \Leftrightarrow \text{rank } A = n. \text{ 定理 2.8 より } A \text{ は正則.}$$

$$\text{問 5} \quad A\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, s) \text{ より } A(t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_s\mathbf{x}_s) = t_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + t_sA\mathbf{x}_s = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$A(\tilde{\mathbf{d}} + t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_s\mathbf{x}_s) = A\tilde{\mathbf{d}} + A(t_1\mathbf{x}_1 + \cdots + t_s\mathbf{x}_s) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

問 6

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2) \quad \text{解なし.}$$

問 7 (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

問 8

(1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$.

問 9 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots, \mathbf{a}_n]$ に対し, $\text{rank } A \leq m < n$ (注意 2.3) と定理 2.6(3) による.

問 10 $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$

問 11 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ は一次独立, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = 3\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_3$.

問 12

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, (3) 正則でない.

問 13 略

問 14 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

問 15 定理 2.13(1),(4) より, (1) $\text{rank } AB \leq \text{rank } A \leq n < m = \text{rank } E_m$. $\therefore AB \neq E_m$.

(2) $m = \text{rank } AB \leq \text{rank } A \leq n$, $n = \text{rank } BA \leq \text{rank } B \leq m$ より $m = n$.

問 16 (1) $\text{rank } [A, A] = \text{rank } [A, O] = \text{rank } A$. (2) $\text{rank } \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \text{rank } A$.

2 章章末問題

1 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 階数 2. (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 階数 2. (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 階数 3.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 階数 2. (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 階数 3. (6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 階数 3.

2 (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3) 解なし

(4) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3 (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

(4) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} t$ (5) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t$

4 (1) $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

5 (1) 一次独立 (2) 一次従属 (3) 一次従属

6 (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5$ は一次独立. $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立. $\mathbf{a}_3 = -4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2$.

$$7 (1) \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 10 & 17 & 1 \\ -8 & -14 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0pt \end{bmatrix} \quad (6) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -8 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8/3 & -5/3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$9 (1) P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -9 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$10 (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 2 \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 2 \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 階数 } 2$$

11 (1) rank A (2) rank A (3) $2\text{rank } A$

12 (1) $a = -6$: 階数 2, $a \neq -6$: 階数 3 (2) $a = 1$: 階数 1, $a \neq 1$: 階数 3

(3) $a = 1$: 階数 1, $a = -1/2$: 階数 2, $a \neq 1, -1/2$: 階数 3

$$13 (1) a \neq 6: \text{解なし}, a = 6: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) a = -4 \text{ かつ } b \neq 2: \text{解なし}, a = -4 \text{ かつ } b = 2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$a \neq -4: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{b-2}{a+4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a+4} \begin{bmatrix} b-2 \\ 2b-4 \\ -a-b-2 \\ b-2 \end{bmatrix}$$

$$(3) b \neq 1: \text{解なし}, b = 1 \text{ かつ } a = 1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b = 1 \text{ かつ } a \neq 1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) a = -1: \text{解なし}, a = 2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \neq -1, 2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} a+1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) a=1: \text{解なし. } a=-2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \neq 1, -2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 0 \\ a-1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(6) a=b=1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a=b \neq 1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$a=1 \text{ かつ } b \neq 1: \text{解なし, } a \neq 1 \text{ かつ } b \neq a: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 1-b \\ a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}$$

$$14 \quad (1) \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 11 & -9 \\ -9 & 11 \end{bmatrix} \quad (2) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ -2 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -6 & 1 & -1 \\ -5 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} ab-c & -b & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6) \text{正則でない}$$

$$(7) a=1, -2: \text{正則でない, } a \neq 1, -2: \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

15 (1) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.8). (2) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.5). $\text{rank } [A, \mathbf{b}] \leq n$ より (3) $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$ (定理 2.4).
 $\therefore$ これらは全て同値.

16 定理 2.13(2)(左右から正則行列を掛けても階数は変わらない) を用いる.

$$(1) [A, B] \begin{bmatrix} E & 2E \\ O & E \end{bmatrix} = [A, 2A+B] \text{ より } \text{rank } [A, 2A+B] = \text{rank } [A, B].$$

$$(2) [A, B, O] \begin{bmatrix} E & O & 3E \\ O & E & -2E \\ O & O & E \end{bmatrix} = [A, B, 3A-2B] \text{ より } \text{rank } [A, B, 3A-2B] = \text{rank } [A, B, O] = \text{rank } [A, B].$$

$$(3) \begin{bmatrix} E & 3E \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 2E \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} \text{ より } \text{rank } \begin{bmatrix} A & 2A+3B \\ O & B \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \text{rank } A + \text{rank } B.$$

17 A を階段行列 $B=PA$ に変形する正則行列 P に対し, $\mathbf{b}=P^{-1}\mathbf{e}_m$ とおく. $\text{rank } A < m \Leftrightarrow B$ の第 m 行は $\mathbf{0}$ より $\text{rank } [A, \mathbf{b}] = \text{rank } [B, \mathbf{e}_m] > \text{rank } A$. よって方程式 $A\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{e}_m$ は解をもたない.

18 A の軸列を $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}$ とすればよい. このとき, A を階段行列にする正則行列 P により $PA' = E$ となるので P が逆行列になる.

19 (1) $\Rightarrow$ (2): $\text{rank } A = s \leq r$ とすると, $PAQ = F_{mn}(s)$ (P, Q は正則) と標準形に変形できる.

$$F_{mn}(s) = F_{mr}(s)F_{rn}(s) \text{ なので, } B = P^{-1}F_{mr}(s), \quad C = F_{rn}(s)Q^{-1} \text{ とおけば}$$

$$BC = P^{-1}F_{mr}(s)F_{rn}(s)Q^{-1} = P^{-1}F_{mn}(s)Q^{-1} = A.$$

$$(2) \Rightarrow (1): \text{rank } B \leq r \text{ より, } \text{rank } A = \text{rank } BC \leq \text{rank } B \leq r.$$

20 (1) A の標準形を $PAQ = F_{mn}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} =: F$ (P, Q は正則行列) とし,

$$X = QF'P \quad (F' = F_{nm}(r)) \text{ とおけばよい. このとき,}$$

$$AXA = (P^{-1}FQ^{-1})(QF'P)(P^{-1}FQ^{-1}) = P^{-1}FF'FQ^{-1} = P^{-1}FQ^{-1} = A$$

$$(F' = \begin{bmatrix} E_r & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (B, C, D \text{ は任意の行列}) \text{ でも, } X = QF'P \text{ は一般逆行列になる.})$$

$$(2) A(E-XA)\mathbf{y} = A\mathbf{y} - AXA\mathbf{y} = A\mathbf{y} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

$$(3) \mathbf{x}_1 \text{ を 1 つの解とすると, } A(X\mathbf{b}) = (AX)(A\mathbf{x}_1) = (AXA)\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}.$$

$$(4) X\mathbf{b} + (E_n - XA)\mathbf{x}_0 = X\mathbf{b} + \mathbf{x}_0 - X(A\mathbf{x}_0) = X\mathbf{b} + \mathbf{x}_0 - X\mathbf{b} = \mathbf{x}_0.$$

3章

問1 (1) -2 (2) -2 (3) 1 (4) -10

問2 10

問3 左辺 $= \sum_{\mathbf{p}} (\text{sgn } \mathbf{p}) \bar{a}_{1p_1} \bar{a}_{2p_2} \cdots \bar{a}_{np_n} = \overline{\sum_{\mathbf{p}} (\text{sgn } \mathbf{p}) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}} =$ 右辺

問4 略

問5 (1) 0 (2) -2 (3) $a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$

問6 (1) -9 (2) 6

問7 $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$

問8 (1) $x = 6$, 階数 1 (2) $x = 0, \pm\sqrt{2}$, 階数 2 (3) $x = -1, 2$. $x = -1$ のとき階数 1, $x = 2$ のとき階数 2

問9 3, -3, 1

3章章末問題

1 (1) $(-1)^{4+3+2+1} = 1$ (2) $(-1)^{n-1}$ (3) $(-1)^n$

2 (1) 1 (2) $10a - 10$ (3) 1 (4) 0 (5) -3 (6) -2 (7) 4 (8) 96 (9) 16 (10) -6

3 $|AB| \underset{\text{定理 3.8}}{=} |A||B| = |B||A| \underset{\text{定理 3.8}}{=} |BA|$

4 略

5 系 3.10 の対偶.

6 $(x+n-1)(x-1)^{n-1}$

7 (1) 行列式 -4, 余因子行列 $\begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, 逆行列 $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(2) 行列式 $a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a+1)^2$, 余因子行列 $\begin{bmatrix} a^2-1 & -a-1 & -a-1 \\ -a-1 & a^2-1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & a^2-1 \end{bmatrix}$,

$a \neq 2, -1$ のとき, 逆行列 $\frac{1}{(a-2)(a+1)} \begin{bmatrix} a-1 & -1 & -1 \\ -1 & a-1 & 1 \\ -1 & 1 & a-1 \end{bmatrix}$

8 (1) $n+1$ (2) $n = 3k, 3k+1$ のとき $(-1)^k$, $n = 3k+2$ のとき 0

9 (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

10 3.6.1 節により,

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \overset{Ar'_1}{=} |A| \begin{vmatrix} E & A^{-1}D \\ C & B \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftarrow Cr_1}{=} |A| \begin{vmatrix} E & A^{-1}D \\ O & B - CA^{-1}D \end{vmatrix} = |A| |B - CA^{-1}D|$$

11 3.6.1 節による.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \overset{c_1 \pm c_2}{=} \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftarrow r_1}{=} \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|$$

$$(2) \begin{vmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AO & OD \\ OC & CD \end{vmatrix} \begin{vmatrix} BD \\ BD \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} BD \\ BD \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftarrow r_1}{=} \begin{vmatrix} BD \\ OO \end{vmatrix} = 0 \text{ より } \begin{vmatrix} AB & AD \\ CB & CD \end{vmatrix} = 0$$

(3) $AC = CA$ の両辺に左右から A^{-1} を掛けて, $CA^{-1} = A^{-1}C$. 問題 10 より, 左辺 $= |A| |B - CA^{-1}D| = |A| |B - A^{-1}CD| = |A(B - A^{-1}CD)| = |AB - CD|$

12 例 3.23 より, (1) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 2y - 1 = 0$ (2) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 6y - z - 7 = 0$

13 例 3.24(ヴァンデルモンドの行列式)の形に変形して差積を計算する.

(1) $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ (2) $-2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = -72000$ (3) $2^7 \cdot 3^3 = 3456$

14 例 3.25 により, クラメル公式を用いると:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 2, \quad c = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2^2 \\ 7 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 1, \quad b = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2^2 \\ 1 & 7 & 3^2 \end{vmatrix} = -1, \quad a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

別解: a, b, c は $y = ax^2 + bx + c$ に 3 点の座標を代入した方程式

$$\begin{cases} 1^2a + 1b + c = 1 \\ 2^2a + 2b + c = 3 \\ 3^2a + 3b + c = 7 \end{cases} \text{ の解なので, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より } y = x^2 - x + 1.$$

15 (1) サラスの公式を用いる. 別解として, 下の問題 16 参照.

(2) 第 2 列から r を, 第 3 列から $r \sin \theta$ を括り出して, 第 3 行で余因子展開する.

(3) 問題 11(1) より,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \begin{vmatrix} (a+b+c)+a & (a+b)+a \\ (a+b)+a & (a+b+c)+a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a+b+c)-a & (a+b)-a \\ (a+b)-a & (a+b+c)-a \end{vmatrix} \\ &= \{(2a+b+c)+(2a+b)\}\{(2a+b+c)-(2a+b)\}\{(b+c)+b\}\{(b+c)-b\} = \text{右辺} \end{aligned}$$

(4) 例 3.20 の漸化式において $a = x^2 + 1$, $b = c = x$ とすると,

$$D_1 = x^2 + 1, \quad D_2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1,$$

$$D_3 = (x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) - x^2(x^2 + 1) = x^6 + x^4 + x^2 + 1,$$

$$D_4 = (x^2 + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1) - x^2(x^4 + x^2 + 1) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$$

(5) (2,1), (1,2) 成分を軸にして, 第 1, 2 列を掃き出す.

(6) 左辺を D_n とおき, 第 1 行で余因子展開して得る次式より帰納的に示せる.

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1+1}a_n(-1)^n = xD_{n-1} + a_n.$$

16 A が $2n+1$ 次のとき, $|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A|$ より $|A| = 0$.

17 A の第 1 行に他の行を全て加えると第 1 行の成分が全て 0 になるので, $|A| = 0$.

18 ($\Leftarrow$): A は n 次で, $|\tilde{A}| = 0$ とする. このとき $0 = |A||\tilde{A}| = |A\tilde{A}| = \det |A|E = |A|^n$ より $|A|^n = 0$.
よって $|A| = 0$.

($\Rightarrow$): $|A| = 0$ とする. このとき, $A\tilde{A} = |A|E = O$. $|\tilde{A}| \neq 0$ と仮定すると, $A = O\tilde{A}^{-1} = O$.

このとき $\tilde{A} = O$, $|\tilde{A}| = 0$ となり矛盾. よって $|\tilde{A}| = 0$.

19 $|A| \neq 0$ のとき, $A\tilde{A} = |A|^n E$ の両辺の行列式をとると $|A||\tilde{A}| = |A|^n$ より $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$.

$|A| = 0$ のとき, 問題 18 より $|\tilde{A}| = 0 = |A|^{n-1}$.

20 行列式は各成分の多項式なので, 整数行列の行列式の値は整数, に注意すれば,

($\Rightarrow$): $|A|, |A^{-1}|$ は整数で, $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$ より $|A| = \pm 1$.

($\Leftarrow$): $|A| = \pm 1$ より A は正則. A が整数行列より余因子行列 $\tilde{A}$ も整数行列で, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \pm\tilde{A}$ も整数行列.

21 問題 10 より, 左辺 $= |A|(c - {}^t\mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}) = c|A| - {}^t\mathbf{b}\tilde{A}\mathbf{b} = \text{右辺}$.

22 例 3.23 と同様に, 円の方程式を $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ ($a \neq 0$) と表し, この式と, (x, y) に (a_i, b_i) ($i=1, 2, 3$) を代入して得られた式を a, b, c, d の同次方程式と考える.

23 左辺の行列式を D とする. $j=2, 3, \dots, n$ について, 第 1 列に, 第 j 列の ζ_k^{j-1} 倍を加える $(c_1 + \zeta_k c_2, c_1 + \zeta_k^2 c_3, \dots, c_1 + \zeta_k^{n-1} c_n)$. すると, $(1, 1)$ 成分は $X_k = x_1 + \zeta_k x_2 + \zeta_k^2 x_3 + \dots + \zeta_k^{n-1} x_n$ になる. $1 = \zeta_k^n$ に注意すれば, 第 1 列の 2 行目以下は順に $\zeta_k X_k, \zeta_k^2 X_k, \dots, \zeta_k^{n-1} X_k$ となり, 第 1 列から X_k を括り出せる. これが $k=0, 1, \dots, n-1$ について成り立つので, D は $X_0 X_1 \dots X_{n-1}$ ($=$ 右辺) で割り切れる. 両辺の多項式の次数は同じ n であり, x_1^n の係数を比較すればともに 1 なので, 左辺 $=$ 右辺.

24 一般に, 行列 A とその小行列 A' に対し, $\text{rank } A' \leq \text{rank } A$ が成り立ち, A' が $|A'| \neq 0$ となる k 次小行列のときは $\text{rank } A' = k$ より, $k = \text{rank } A' \leq \text{rank } A =: r$.

定理 2.7 より, A の軸列を並べた $n \times r$ 行列を A_1 とすると $r = \text{rank } A_1 = \text{rank } {}^t A_1$ より, 転置行列 ${}^t A_1$ の軸列を並べた $r \times r$ 行列 A_2 についても $r = \text{rank } A_2 = \text{rank } {}^t A_2$. ${}^t A_2$ は A の r 次小行列で, $\text{rank } {}^t A_2 = r$ より正則なので $|{}^t A_2| \neq 0$. 即ち, 0 でない r 次小行列式 $|{}^t A_2|$ が存在するので, 右辺 $= \text{rank } A$.

4 章

問 1 (1) $e_1 = {}^t[1, 0] \in W_1$ だが, $2e_1 = {}^t[2, 0] \notin W_1$ より W_1 は [S2] をみたさないので部分空間でない.

(2) $a = {}^t[a_1 \dots a_k \ 0 \dots 0]$, $b = {}^t[b_1 \dots b_k \ 0 \dots 0] \in W_2$, $s, t \in \mathbb{R}$ に対し $x = sa + tb$ とすると, $x_i = s0 + t0 = 0$ ($i=k+1, \dots, n$) より $x = sa + tb \in W_2$. よって W_2 は [S3] をみたすので部分空間である.

(3) $A, B \in H_n(\mathbb{R})$ (${}^t A = A$, ${}^t B = B$), $s, t \in \mathbb{R}$ とすると, ${}^t(sa + tb) = s{}^t A + t{}^t B = sA + tB$ より $sa + tb \in H_n(\mathbb{R})$. よって $H_n(\mathbb{R})$ は [S3] をみたすので, $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間である.

問 2 A は基底. B は基底でない.

問 3 $A \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より ${}^t[1 \ -3 \ 1]$ が W_A の基底, a_1, a_2 が $\langle A \rangle$ の基底になる.

問 4 行列単位の定義 $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ より, $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ の両辺の (i, j) 成分が a_{ij} なので左辺 $=$ 右辺. $\{E_{ij}\}$ の一次関係式 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij} s_{ij} = O$ をみたす s_{ij} は $S := [s_{ij}] = O$ より一次独立.

問 5 $[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mapsto [E|P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ より, (1) $b_2 = 4b_1 - b_3$. (2) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

問 6 f_1 は線形写像. f_2 は線形写像でない.

問 7 $m \times n$ K -行列 X, Y と $s, t \in K$ に対し, [L3] $f(sX + tY) = A(sX + tY)B = sAXB + tAYB = sf(X) + tf(Y)$

問 8 [L3] を示す. $a, b \in V$, $s, t \in K$ に対し, $1_V(sa + tb) = sa + tb = s1_V(a) + t1_V(b)$ より 1_V は線形.

$(g \circ f)(sa + tb) = g(f(sa + tb)) \underset{f: \text{線型}}{=} g(sf(a) + tf(b)) \underset{g: \text{線型}}{=} sg(f(a)) + tg(f(b)) = s(g \circ f)(a) + t(g \circ f)(a)$ より $g \circ f$ は線形. $a', b' \in W$ に対し, $a' = f(a)$, $b' = f(b)$ となる $a, b \in V$ が唯一つずつある. このとき, $a = f^{-1}(a')$, $b = f^{-1}(b')$, $f^{-1}(sa' + tb') = f^{-1}(sf(a) + tf(b)) \underset{f: \text{線型}}{=} f^{-1}(f(sa + tb)) = sa + tb = sf^{-1}(a') + tf^{-1}(b')$ より f^{-1} は線形.

問 9 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

問 10 $F = A^{-1}HA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

問 11 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\text{Ker } f = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, 次元 2. $\text{Im } f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, 次元 2.

4 章章末問題

1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2 (1),(4) は部分空間であり, (2),(3),(5) は部分空間でない.

3 (1),(4) は部分空間であり, (2),(3) は部分空間でない.

4 (1) 基底になる (2) 基底にならない (3) 基底になる (4) 基底になる

5 (1) 基底 $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 次元 1 (2) 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2 (3) 基底なし, 次元 0

6 (1) 基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, 次元 2 (2) 基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, 次元 2

7 (1) W_1+W_2 : 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 3. $W_1 \cap W_2$: 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 1
 (2) W_1+W_2 : 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 3. $W_1 \cap W_2$: 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 1

8 (1) 略 (2) $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

9 (1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

10 (1) 線形写像である. (2) 線形写像でない. (3) 線形写像である.

11 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 4 & 5 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

12 (1) $\begin{bmatrix} -4 & -14 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 01 & 0 \\ 00 & -2 \end{bmatrix}$

13 (1) 像の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2, 核の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 1.

(2) 像の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2, 核の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2.

14 (1) 一次従属 (2) 一次独立 (3) n が奇数のとき一次独立, 偶数のとき一次従属

15 (1) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $P = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

16 (1) $\{p_1, p_2, p_4\}$, $p_3 = 2p_1 + p_2$, $p_5 = -2p_1 - 3p_2 + p_4$

(2) $\{p_1, p_2, p_4\}$, $p_3 = -p_1 + 2p_2$, $p_5 = 2p_1 - p_2 + p_4$

17 (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1\}$ (2) $\{p_1(x), p_2(x), x^2\}$

18 W_1 : 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2. W_2 : 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 2.

W_1+W_2 : 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 3. $W_1 \cap W_2$: 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 次元 1.

19 (1) 略 (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

20 対偶を示す. (1) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が一次従属ならば, $\sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s_i = \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{s} = {}^t[s_1 \cdots s_n] \neq \mathbf{0}$ がある. このとき

$$\mathbf{0} = f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s_i\right) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{a}_i) s_i \text{ より, } \{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\} \text{ も一次従属.}$$

(2) $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$, $\{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ が一次従属で $\sum_{i=0}^n f(\mathbf{a}_i) s_i = \mathbf{0}$ ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) とすると,

$$f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s_i\right) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{a}_i) s_i = \mathbf{0}. \therefore \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s_i \in \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\} \text{ より } \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i s_i = \mathbf{0}. \therefore \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \text{ は一次従属.}$$

21 線形写像の次元定理 4.15 による.

22 $\mathbf{a} \in V$ に対し, $f(\mathbf{a} - f(\mathbf{a})) = f(\mathbf{a}) - f(f(\mathbf{a})) = \mathbf{0}$ より, $\mathbf{a} - f(\mathbf{a}) \in \text{Ker } f$.

$\therefore \mathbf{a} = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{a} - f(\mathbf{a})) \in \text{Im } f + \text{Ker } f$. $\therefore V = \text{Im } f + \text{Ker } f$. 次に, $\mathbf{a} \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ とすると, $\mathbf{a} \in \text{Im } f$ より $\mathbf{a} = f(\mathbf{b})$ となる $\mathbf{b} \in V$ があり, $\mathbf{a} \in \text{Ker } f$ より $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. $\therefore \mathbf{0} = f(\mathbf{a}) = f(f(\mathbf{b})) = f(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ より $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$. よって直和になる.

23 6 次元. 基底 $E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}$

24 $f(E_{ij}) = a_{ji}$, $A = [a_{ij}] = {}^t[f(E_{ij})]$ とおくと, $X = [x_{ij}]$ に対し,

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^n (XA)_{ii} = \text{tr } XA = \text{tr } AX$$

25 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n]$ とすると,

$$\langle A+B \rangle = \langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \rangle \subset \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle + \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle \text{ より}$$

$$\text{rank}(A+B) = \dim \langle A+B \rangle \leq \dim(\langle A \rangle + \langle B \rangle) \leq \dim \langle A \rangle + \dim \langle B \rangle = \text{rank } A + \text{rank } B.$$

26 $B = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_\ell]$ とする. $AB = [A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_\ell] = [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]$ より, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \in W_A$.

$$\therefore \langle B \rangle \subset W_A. \therefore \text{rank } B = \dim \langle B \rangle \leq \dim W_A = n - \text{rank } A.$$

5 章

問 1 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -6 + 2i$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{6}$, $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = -6 - 2i$, $\|\mathbf{b}\|^2 = 11$.

問 2 略. 数学 B 参照.

問 3 [I1]: $\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_G = (\mathbf{x}^* G \mathbf{y})^* = \mathbf{y}^* G^* \mathbf{x}^{**} = \mathbf{y}^* G \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{x})_G$.

[I2](i): $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}')_G = \mathbf{x}^* G (\mathbf{y} + \mathbf{y}') = \mathbf{x}^* G \mathbf{y} + \mathbf{x}^* G \mathbf{y}' = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_G + (\mathbf{x}, \mathbf{y}')_G$,

[I2](ii): $(\mathbf{x}, s\mathbf{y})_G = \mathbf{x}^* G (s\mathbf{y}) = s(\mathbf{x}^* G \mathbf{y}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y})_G$ ($s \in \mathbb{C}$).

[I3]: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_G = \boldsymbol{x}^* A^* A \boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^* (A\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_G = \|A\boldsymbol{x}\|^2 = 0 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

問 4 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

問 5 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W^\perp, s, t \in K, \boldsymbol{w} \in W$ に対し $(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) = \bar{s}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) + \bar{t}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) = \bar{s}0 + \bar{t}0 = 0$ より [S3] をみtas.

問 6 V の 正規直交基底 $[A, B, C, D] = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m, \boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_n]$ を次の様に構成する:

A を $W_1 \cap W_2$ の正規直交基底とし, これを延長して W_1, W_2 の正規直交基底 $[A, B], [A, C]$ をつくと

$[A, B, C]$ は $W_1 + W_2$ の正規直交基底になる. さらにこれを延長して V の正規直交基底 $[A, B, C, D]$ をえる.

このとき, $(W_1 \cap W_2)^\perp = \langle B, C, D \rangle, W_1^\perp = \langle C, D \rangle, W_2^\perp = \langle B, D \rangle, (W_1 + W_2)^\perp = \langle D \rangle$ より,

(1) $W_1^\perp \cap W_2^\perp = \langle D \rangle = (W_1 + W_2)^\perp$. (2) $W_1^\perp + W_2^\perp = \langle B, C, D \rangle = (W_1 \cap W_2)^\perp$.

問 7 (1) $W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$

問 8 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2], \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ とおけば, $\|\boldsymbol{a}_1\|^2 = \|\boldsymbol{a}_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ より A は直交行

列. $|a| \leq 1$ より $a = \cos \theta'$ をみtas θ' が $0 \leq \theta' \leq \pi$ の範囲で唯 1 つある. このとき $\sin \theta' = \pm b$ なので,

$\sin \theta' = b$ なら $\theta := \theta', \sin \theta' = -b$ なら $\theta := -\theta'$ として, $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲で θ が唯 1 つに定まる.

問 9 $A_m = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2]$ とすると, $\|\boldsymbol{a}_1\|^2 = \|\boldsymbol{a}_2\|^2 = \frac{(m^2-1)^2 + (2m)^2}{(1+m^2)^2} = 1, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$ より A_m は直交行列で,

$$|A_m| = \frac{-(m^2-1)^2 - (2m)^2}{(1+m^2)^2} = -1.$$

問 10 (1) $E_n^* E_n = E_n E_n = E_n$. (2) $(U_1 U_2)^* U_1 U_2 = U_2^* U_1^* U_1 U_2 = U_2^* E U_2 = E$.

(3) $U^* U = E$ より U は正則で, $U^* = U^{-1}$. $\therefore E = U U^* = (U^*)^* U^*$. $\therefore U^{-1} = U^* \in U(n)$.

問 11 (1) $\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ を極座標を用いて $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}$ と表すと,

$$\boldsymbol{y} = R(\theta) \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta (r \cos \alpha) - \sin \theta (r \sin \alpha) \\ \sin \theta (r \cos \alpha) + \cos \theta (r \sin \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix}$$

より, $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ を原点を中心として角 θ だけ回転した点である.

(2) $A_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -1+m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} -2m^2 & 2m \\ 2m & -2 \end{bmatrix} = E_2 - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \begin{bmatrix} m^2 & -m \\ -m & 1 \end{bmatrix} = E - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} [m-1]$
 $= E - \frac{2\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ より, $A_m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{a} \frac{\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{a} \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$.

5 章章末問題

1 (1) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{2}, \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{6}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 3, \theta = \frac{\pi}{6}$

(2) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{10}, \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{30}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -15, \theta = \frac{5\pi}{6}$

2 (1) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3}, \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{14}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 3+3i, (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 3-3i$

(2) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{11}, \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{23}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2+3i, (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 2-3i$

3 必要なら W の基底を直交化し, 補題 5.3, あるいはその直前の式より求める.

(1) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (2) 基底を直交化して, $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より, $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

4 (1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(3) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

5 $[a e_1 e_2 e_3]$ から a を含む $\mathbb{R}^3$ の基底を選ぶと $[a e_1 e_2]$. これを正規直交化して, $\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

他の基底を選び別の結果を得ても可.

6 例 5.10 により $W, W^\perp$ の基底を求め, 正規直交化する. 正規直交基底は一意的ではないので他の取り方でも可.

$$(1) \quad W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W^\perp = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(2) \quad W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3i \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W^\perp = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(3) \quad W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W^\perp = \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(4) \quad W = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \\ 2 \\ -1+i \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W^\perp = \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \\ -1-2i \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$$

7 列ベクトルの組が正規直交系であるか, ${}^t U U = E$ であることを確かめればよい.

8 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a \ b]$ とする. $\|a\|^2 = a^2 + c^2 = 1$, $\|b\|^2 = 1$ より $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ と表せる.

$(a, b) = \sin(\theta - \varphi) = 0$, $\det U = \cos(\theta - \varphi) = \pm 1$ より,

$\det U = 1$ のとき, $\varphi = \theta$, $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. $\det U = -1$ のとき, $\varphi = \theta \pm \pi$, $U = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.

$$9 \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

10 (1) $(A+iB)^* = {}^t A - i {}^t B$ より,

$$(1) \Leftrightarrow ({}^t A - i {}^t B)(A+iB) = E_n \Leftrightarrow {}^t A A + {}^t B B = E_n, \quad {}^t A B - {}^t B A = O.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^t A & {}^t B \\ -{}^t B & {}^t A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-B \\ B \quad A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^t A A + {}^t B B = E_n, \quad {}^t A B - {}^t B A = O \\ -{}^t B A + {}^t A B = O, \quad {}^t B B + {}^t A A = E_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow (1).$$

11 $g_{ij} = (e_i, e_j)'$, $G = [g_{ij}]$ (例 5.4 のグラム行列) とおくと, $g_{ji} = (e_j, e_i)' = (e_i, e_j)' = g_{ij}$ より G は実対称行列

$$\text{で, } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ に対し, } (a, b)' = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i (e_i, e_j)' b_j = {}^t a G b.$$

12 (1) $(a+b, a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2$ より出る.

(2,3) [I5] $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \pm 2(a, b)$ より出る.

13 (1) [I5] : $\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(a, b)$ より出る.

(2) [N4] (三角不等式) : $\|a\| = \|(a-b) + b\| \leq \|a-b\| + \|b\|$ を移項して, $\|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|$.

同様に, $\|b\| - \|a\| \leq \|b-a\| = \|a-b\|$.

(3) (1) の [I5] より $\operatorname{Re}(a, b)$ が出る. $\operatorname{Im}(a, b)$ は [I5,6] による次式から出る: $\|a \pm ib\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \mp 2 \operatorname{Im}(a, b)$.

(4) $b=0$ なら $(a, b) = \|a\| \|b\| = 0$ で $\{a, b\}$ は一次従属, より成立. $b \neq 0$ とする.

($\Rightarrow$) [N3] の証明中, $|(a, b)| = \|a\| \|b\|$ なら $\|sa+tb\|^2 = 0$ より $sa+tb=0$.

($\Leftarrow$) $a=cb$ と表されるので, $|(a, b)| = |\overline{c}(b, b)| = |c| \|b\|^2 = \|a\| \|b\|$.

14 $\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{u}_n\|^2$ より出る.

15 [I5] と $(\mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{b}'-\mathbf{a}) = 0$ より, $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|^2 + \|\mathbf{b}'-\mathbf{a}\|^2 \geq \|\mathbf{b}-\mathbf{b}'\|^2$. 等号成立は $\|\mathbf{b}'-\mathbf{a}\|^2 = 0$ のとき.

16 (1) $\mathbf{b}' := \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{b})$ は部分空間 $\langle U \rangle$ への $\mathbf{b}$ の直交射影 (補題 5.3) なので, $(\mathbf{b}', \mathbf{b}-\mathbf{b}') = 0$.

$\therefore$ 左辺 $= (\mathbf{b}-\mathbf{b}', \mathbf{b}-\mathbf{b}') = (\mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{b}') = \|\mathbf{b}\|^2 - \sum_{j=1}^n (\mathbf{b}, \mathbf{u}_j)(\mathbf{u}_j, \mathbf{b}) =$ 右辺.

(2) (1) の左辺 ≥ 0 , かつ, 左辺 $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}-\mathbf{b}' = \mathbf{0}$ より (2) を得る.

17 $W = \langle A \rangle$, $\mathbf{b}' = p_W(\mathbf{b}) \in \langle A \rangle$ とすると, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ は解 $\mathbf{x}_1$ をもち ($A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}'$), 問題 15 より $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ の最小値は $\|\mathbf{b}'-\mathbf{b}\|$. $\mathbf{b}'-\mathbf{b} \in \langle A \rangle^\perp$ より $A^*(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ (例 5.10). 即ち, $A^*A\mathbf{x}_1 = A^*\mathbf{b}' = A^*\mathbf{b}$ より $\mathbf{x}_1$ は $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ の解.

18 (1) $(x^m, x^n) = \int_{-1}^1 x^m x^n dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & (m+n \text{ が奇数}) \\ 2/(m+n+1) & (m+n \text{ が偶数}) \end{cases} \therefore \|x^n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ より,

$$\|1\| = \sqrt{2}, \|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \|x^2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}, (1, x) = (x, x^2) = 0, (1, x^2) = \frac{2}{3}. \quad (2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$$

19 (1) 問題 18(2) に一致する.

(2,3) $f \in \mathbb{R}[x]$ に対し, $f^{(k)} := \frac{d^k}{dx^k} f$ とする. $y = x^2-1$, $C_n = \frac{1}{2^n n!}$ とおくと, $P_n(x) = C_n(y^n)^{(n)}$.

積の微分法より $k \leq n$ のとき, $(y^n)^{(k)} = q_k(x)y^{n-k}$ ($q_k(x)$ は k 次多項式) と表せる. 部分積分により,

$$(f, (y^n)^{(n)}) = \int_{-1}^1 f(x)(y^n)^{(n)} dx = \left[f(x)(y^n)^{(n-1)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(1)}(x)(y^n)^{(n-1)} dx$$

$$\left[f(x)(y^n)^{(n-1)} \right]_{-1}^1 = \left[f(x)q_{n-1}(x)(x^2-1) \right]_{-1}^1 = 0 \text{ より,}$$

$$(f, (y^n)^{(n)}) = -(f^{(1)}, (y^n)^{(n-1)})$$

同様にして, f が m 次 ($m \leq n$) のとき $\left[f^{(k-1)}(x)(y^n)^{(n-k)} \right]_{-1}^1 = 0$ ($1 \leq k \leq m$) で $f^{(m)}$ は定数より,

$$(f, (y^n)^{(n)}) = -(f^{(1)}, (y^n)^{(n-1)}) = \cdots = (-1)^m (f^{(m)}, (y^n)^{(n-m)}) = (-1)^m f^{(m)} \int_{-1}^1 (y^n)^{(n-m)} dx$$

$$(2) \quad (m < n) \quad \int_{-1}^1 (y^n)^{(n-m)} dx = \left[(y^n)^{(n-m-1)} \right]_{-1}^1 = 0 \text{ より } (f, (y^n)^{(n)}) = 0.$$

$$(3) \quad (m = n) \quad (f, (y^n)^{(n)}) = (-1)^n f^{(n)} \int_{-1}^1 y^n dx. \quad \text{再び部分積分により}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y^n dx &= \left[xy^n \right]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 x^2 y^{n-1} dx = (-1)^2 \frac{2^2 n(n-1)}{1 \cdot 3} \int_{-1}^1 x^4 y^{n-2} dx = \cdots \\ &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \int_{-1}^1 x^{2n} dx = (-1)^n 2^n n! \cdot 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$f = (y^n)^{(n)}$ のとき, $f^{(n)} = (y^n)^{(2n)} = (x^{2n})^{(2n)} = (2n)!$ より,

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= C_n^2((y^n)^{(n)}, (y^n)^{(n)}) = C_n^2(-1)^n((y^n)^{(2n)}, y^n) \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^2 (-1)^n (2n)! (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

6 章

問 1 (1) $\beta = 3, -2$ (2) $\beta = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$ (3) $\beta = 1 \pm i$ (4) $\beta = 1, -1, 3$ (5) $\beta = 2, 1$ (重根)

問 2 (1) $\beta = 0, 2$, $W_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $\beta = \pm i$, $W_i = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

(3) $\beta = 2, 3, 4$, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

(4) $\beta = 2, 1$ (重根), $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

問 3 (1),(2),(3) は対角化可能. (1) $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

(3) $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (4) 固有値 1 の重複度 2, 固有空間の次元 1 より対角化不可能.

問 4 (1) $\begin{bmatrix} 2^{2n+1}-1 & 2^{2n}-1 \\ 2-2^{2n+1} & 2-2^{2n} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

問 5 (1) $F_A(x) = x^2 - x + 1$, $(x+1)F_A(x) = x^3 + 1$ より $A^3 = -E$, $A^2 = A - E$. $f(A) = -A^2 - A = E - 2A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $F_A(x) = x^3 - x$, $\therefore A^3 - A = O$. $f(A) = 2A^2 - 2E = \begin{bmatrix} -8 & 24 & -16 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

問 6 (1) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

問 7 正規行列であることは $A^*A = AA^*$ を示せばよい.

(1) A は直交行列かつ交代行列. $U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. $\left(U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \right)$

(2) A はエルミート行列. $U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

問 8 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

問 9 $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 3, $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 -1 .

6 章章末問題

1 (1) $5, -1$ (2) $0, 0$ (3) $1, 2, 3$ (4) $2, \pm\sqrt{2}$ (5) $0, 1, 2, 3$ (6) $1, 1, 1, 1$

2 (1) 固有値 1, 4. $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

固有値が異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$

(2) 固有値 $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$. $W_{2+\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_{2-\sqrt{3}} = \left\langle \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

固有値が異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}.$

(3) 固有値 2, 2. $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \dim W_2 = 1 < \text{重複度 } 2 \text{ より対角化不能.}$

(4) 固有値 1, 1, 2. $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\dim W_1 = 2 = \text{重複度}$ より対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(5) 固有値 1, 1, 2. $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\dim W_1 = 1 < \text{重複度 } 2 \text{ より対角化不能.}$

(6) 固有値 1, 2, 2. $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\dim W_2 = 2 = \text{重複度}$ より対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(7) 固有値 2, 6, 6. $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\dim W_1 = 1 < \text{重複度 } 2 \text{ より対角化不能.}$

(8) 固有値 -1, 1, 2. $W_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle, W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

固有値が全て異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(9) 固有値 1, $i, -i$. $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, W_i = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, W_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

固有値が全て異なるので対角化可能で, $P = \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$

3 (1) $F_A(x) = x^2 - 1$ より $A^2 - E = O$. $\therefore A^2 = E$ より,

$f(A) = A^{20} - 2A^{13} + A^6 - E = E - 2A + E - E = E - 2A = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

(2) $F_A(x) = x^2 + 1$ より $A^2 + E = O$. $\therefore A^2 = -E, A^4 = E$ より,

$f(A) = A^{40} + 3A^{27} + A^{12} = 2E + 3A^3 = 2E + 3A(-E) = 2E - 3A = \begin{bmatrix} -4 & -15 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(3) $F_A(x) = x^3 - x$ より $A^3 - A = O$. $\therefore A^3 = A$ より $A^{3^n} = A$ (n : 自然数).

$1000 = 729 + 243 + 27 + 1 (= 3^6 + 3^5 + 3^3 + 1)$ より, $A^{1000} = A^{729+243+27+1} = A^4 = A^3 A = A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $F_A(x) = x(x-1)(x-2)$ より A は対角化可能.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$A^n = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 \quad (1) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad U = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(7) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(8) \quad U = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$5 \quad (1) \quad (A^* = {}^t A, \quad {}^t A A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A^t A \text{ より正規行列で, } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \quad \left(U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \right)$$

$$(2) \quad A^* = -A, \quad A^* A = -A^2 = A A^* \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \right) \text{ より正規行列で, } U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i-1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(3) A はエルミート行列 ($A^* = A$) なので正規行列で ($A^* A = A^2 = A A^*$),

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2}i & 0 & -2i \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4) A はエルミート行列なので正規行列で,

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ -1 & -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}. \quad \text{ここで, } \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

$$6 \quad (1) \quad 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2, \quad U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2, 1)$$

$$(2) \quad 3y_1^2 + 3y_2^2, \quad U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2, 0)$$

$$(3) \quad 4y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad (1, 2) \quad \left(U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \right)$$

7 (1),(2) は $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$ なので, $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ として, $F_A(x)$, 固有値, 単位固有ベクトルを求める方法を用いる.

(1) $F_A(x) = (x-4)(x-1)(x+1)$. 固有値 $4, 1, -1$ より,

$\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 4 , $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 -1 をとる.

(2) (1) $F_A(x) = (x-4)(x-2)(x-1)$. 固有値 $4, 2, 1$ より,

$\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 4 , $\mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 1 をとる.

(3) $z' = 2z$, $\mathbf{x}' = {}^t[x \ y \ z']$ とおくと, $f(\mathbf{x}) = \frac{x^2 + 2y^2 + z'^2 - 2xy + 2yz'}{x^2 + y^2 + z'^2} =: \frac{g(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}'\|^2}$ と表せる.

定理 6.14 より, 二次形式 $g(\mathbf{x}')$ の行列 A の固有値の最大値, 最小値が $f(\mathbf{x})$ の最大値, 最小値になる. A の固有

値は $3, 1, 0$ で, $\mathbf{x}' = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 3 , $\mathbf{x}' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 0 をとる. 従って, $f(\mathbf{x})$ は任意

の $s \neq 0$ に対し, $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最大値 3 , $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき最小値 0 をとる.

8 ここでは s, t, u, v は任意の定数で $s \neq 0$, $(t, u) \neq (0, 0)$ とし, 複号は同順で, 固有値と固有ベクトルの並び順も同順とする.

(1) 固有値 $a \pm b$, 固有ベクトル $s \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) 固有値 $a \pm ib$, 固有ベクトル $s \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) 固有値 $a+2b$, $a-b, a-b$, 固有ベクトル $s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4) 固有値 $a, a \pm \sqrt{2bc}$, 固有ベクトル $s \begin{bmatrix} -b/c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$, $s \begin{bmatrix} b/c \\ \pm \sqrt{2bc/c} \\ 1 \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} b \\ \pm \sqrt{2bc} \\ c \end{bmatrix}$

(5) この行列 A は $\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$, $\left(B = \begin{bmatrix} a & i \\ -i & a \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b & -i \\ i & b \end{bmatrix} \right)$ の形なので,

$$F_A(x) = |xE_4 - A| = |xE_2 - B - C| |xE_2 - B + C| = (x-a-b)^2 \{(x-a+b)^2 - 4\}$$

$= (x-a-b)^2(x-a+b+2)(x-a+b-2)$ より, 固有値 $a-b \pm 2$, $a+b, a+b$.

$b \neq \pm 1$ のとき, 固有値 $\beta = a-b \pm 2$, $a+b$ に対する固有ベクトルは $s \begin{bmatrix} \mp i \\ -1 \\ \pm i \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$b = \pm 1$ のとき, 固有値 $\beta = a \mp 3$, $a \pm 1$ (3 重根) に対する固有ベクトルは $s \begin{bmatrix} \pm i \\ -1 \\ \mp i \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \begin{bmatrix} \pm i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \mp i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $((t, u, v) \neq (0, 0, 0))$.

9 (1) $F_n(x) = |xE_n - A_n|$ は 3 章章末問題 15(6) の行列式と同様に, 余因子展開を用いて計算する:

$F_n(x) = |xE_n - A_n|$ を第 1 列で展開すると $F_n(x) = xF_{n-1}(x) + a_n$. $F_1(x) = x + a_1$ より,

$$F_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

(注) この行列及び固有方程式は, 線形漸化式や線形常微分方程式の解法に現れる.

(2) $G_n = xE_n - A_n$, $F_n(x) = |G_n|$ とおくと, $F_1(x) = x - 1$, $F_2(x) = x^2 - 1$.

$n \geq 3$ のとき, $F_n(x)$ を第 1 列で展開後, 最終列で展開すると:

$$F_n(x) = x \begin{vmatrix} G_{n-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & -1 \\ G_{n-2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = x^2 |G_{n-2}| + (-1)^{n+2+n+1} |G_{n-2}| = (x^2 - 1) F_{n-2}(x) \quad \text{より,}$$

$n = 2m$ のとき $F_n(x) = (x + 1)^m (x - 1)^m$,

$n = 2m + 1$ のとき $F_n(x) = (x + 1)^m (x - 1)^{m+1}$.

10 F の基底 $[x^2 \ x \ 1]$ に関する表現行列 A , $A(F)$ の固有値 β , 固有値の並び順で A の固有空間の基底及び F の固有空間を列挙する:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \beta = 9, 3, 1. \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, W_9(F) = \langle 4x^2 + 4x + 1 \rangle, W_3(F) = \langle 2x + 1 \rangle, W_1(F) = \langle 1 \rangle.$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \beta = 2, 1, 0. \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, W_2(F) = \langle x^2 + 6x + 9 \rangle, W_1(F) = \langle x + 3 \rangle, W_0(F) = \langle 1 \rangle.$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \beta = 4, 3, 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, W_4(F) = \langle x^2 + 2x \rangle, W_3(F) = \langle x + 2 \rangle, W_2(F) = \langle 1 \rangle.$$

11 A をユニタリー行列 U で対角化し, $U^{-1}AU = D$ とすると $A = UDU^*$.

(1) D は実行列なので $D^* = D$ より, $A^* = (UDU^*)^* = U^{**} D^* U^* = UDU^* = A$.

(2) $D^* D = E$ より, $A^* A = (UD^* U^*)(UDU^*) = UD^* DU^* = UEU^* = E$.

(3) $D^* = \overline{D} = -D$ より, $A^* = U^* D^* U = U^* (-D) U = -A$.

12 $F_A(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$, ($c_n = (-1)^n |A| \neq 0$) とするとき,

$F_A(A) = A(A^{n-1} + \cdots + c_{n-1} E) + c_n E = O$ (定理 6.7).

$f(x) := -(1/c_n)(x^{n-1} + \cdots + c_{n-1})$ とおけば,

$Af(A) = -(1/c_n)(F_A(A) - c_n E) = E$ より, $A^{-1} = f(A)$.

13 (1) $F_{tA}(x) = |xE^{-t}A| = |{}^t(xE - A)| = |xE - A| = F_A(x)$.

(2) A が正則なので $|A| = \prod_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. $x \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} F_{A^{-1}}(x) &= |xE - A^{-1}| = |xA - E| |A^{-1}| = |A|^{-1} (-x)^n |x^{-1}E - A| \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha_i^{-1} (-x)^n F_A(x^{-1}) = \prod_{i=1}^n (-x \alpha_i^{-1}) \prod_{i=1}^n (x^{-1} - \alpha_i) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i^{-1}). \end{aligned}$$

(3) A が正則のときは $A^{-1}(AB)A = BA$ より, $F_{AB}(x) = F_{BA}(x)$ ([EV8]). 一般には, $C = \begin{bmatrix} xE - AB & A \\ O & xE \end{bmatrix}$,

$P = \begin{bmatrix} E & O \\ B & E \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} xE & A \\ O & xE - BA \end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}CP = D$ となる. $|C| = |D|$, $|C| = |xE - AB| |xE|$,

$|D| = |xE| |xE - BA|$ より $F_{AB}(x) = |xE - AB| = |xE - BA| = F_{BA}(x)$.

- 14 一般に, 実数係数の代数方程式 $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ が虚根 $\alpha \in \mathbb{C}$ ($f(\alpha) = 0$) をもてば,
 $f(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^n + c_1 \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + c_n = \overline{\alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \cdots + c_n} = \overline{f(\alpha)} = \bar{0} = 0$ より, $\bar{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の根で, α と $\bar{\alpha}$ の重複度も同じ.
 (これより, 実数係数の代数方程式は実数係数の, 2 次式 $(x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + |\alpha|^2)$ と 1 次式の積に分解される.)

直交行列 U の固有多項式は実数係数で, 固有値 α の絶対値は 1 ($|\alpha| = 1$) より, α が虚数なら $\bar{\alpha}$ も U の固有値になり, $\alpha\bar{\alpha} = 1$. α が実数なら $\alpha = \pm 1$. (1), (2) はこれより出る. さらに U が奇数次のときは, $|U| = -1$ なら -1 の重複度が奇数, $|U| = 1$ なら 1 の重複度が奇数になる.

- 15 問題 14 より, A は固有値 $|A|$ ($= \pm 1$) をもつ. $|A|$ に対する単位固有実ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とし, $\mathbf{u}_1$ を延長して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ をつくと $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} |A| & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} =: T$ となる (定理 6.2 の証明参照). U, A, U^{-1} は直交行列なので, その積 T も直交行列 (第 5 章問 10). 従って T の第 1 行ベクトルの長さは 1 ($|A| = \pm 1$) より $* = \mathbf{0}$ となり, A_1 も直交行列で, $|A_1| = 1$ となる. このとき, 第 5 章問題 5.8 より $A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ となり, 求める結果をえる.

(別解) $\mathbf{u}_1$ を $|A|$ に対する単位固有実ベクトルとする. A の, $|A|$ 以外の固有値が ± 1 (重根) のときは A は直交行列で対角化され, $1, -1$ に応じて $\theta = 0, \pi$ とすればよい. $|A|$ 以外の固有値が虚数 $\alpha, \bar{\alpha}$ のとき, α に対する単位固有ベクトルを $\mathbf{p}$ とすれば, $A\bar{\mathbf{p}} = \overline{A\mathbf{p}} = \overline{\alpha\mathbf{p}} = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}}$ より $\bar{\mathbf{p}}$ が $\bar{\alpha}$ に対する固有ベクトルになる. $\alpha = a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{p} + \bar{\mathbf{p}})$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})$ とおくと, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は実単位ベクトルで, $A\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3$, $A\mathbf{u}_3 = -b\mathbf{u}_2 + a\mathbf{u}_3$.

$|\alpha| = 1$ より $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$ と表せるので, $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ とおけば $AU = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

- 16 $\mathbf{p}$ を, A の固有値 α に対する固有ベクトル ($A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) とすると, $A^k\mathbf{p} = A^{k-1}\alpha\mathbf{p} = \cdots = \alpha^k\mathbf{p}$. これより,
 (1) $\alpha^k\mathbf{p} = A^k\mathbf{p} = E\mathbf{p} = 1\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^k = 1$.
 (2) $\alpha^2\mathbf{p} = A^2\mathbf{p} = A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) = 0$ より $\alpha = 0, 1$.
 (3) $\alpha^k\mathbf{p} = A^k\mathbf{p} = O\mathbf{p} = 0\mathbf{p}$. $\therefore \alpha^k = 0$. $\therefore \alpha = 0$.

- 17 (1) (iii) $\Rightarrow$ (i) は明らか. (i) $\Rightarrow$ (ii) は問題 16(3) で示した.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : N を正則行列 P で三角化すれば (ii) より, $P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: T$. $T^2, T^3, \dots$ を計算すれば,

T^2 は対角線の 1 つ右の成分が全て 0 になり, T^k は対角線の $k-1$ 個右まで 0 になり, 最終的に $T^n = O$ となる. よって, $N^n = PT^nP^{-1} = O$.

(2) $N \neq O$ より (1) の $T \neq O$. $\therefore \text{rank } N = \text{rank } T > 0$. よって $\dim W_0 = n - \text{rank } N < n$ だが, 0 の重複度は n より対角化不能 (定理 6.4).

- 18 (1) $(E - A)^2 = E - 2A + A^2 = E - A$.

(2) 問題 16(2) より A の固有値は $1, 0$. これらの重複度を r, s ($r + s = n$) とし, A を正則行列 P で三角化すると,

$$P^{-1}AP = T = \begin{bmatrix} T_1 & B \\ O & T_0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} T_1 : r \text{ 次上三角行列で対角成分は全て } 1 \\ T_0 : s \text{ 次上三角行列で対角成分は全て } 0 \end{cases}$$

となる. $T^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = T$ より T もべき等, $\therefore T^s = T$. 問題 17(1)(iii) の解答より $T_0^s = O$ なので,

$$T^s = \begin{bmatrix} T_1^s & B' \\ O & T_0^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^s & B' \\ O & O \end{bmatrix} = T = \begin{bmatrix} T_1 & B \\ O & T_0 \end{bmatrix} \quad \therefore T_0 = O$$

一方, $T_1^2 = T_1 = [t_{ij}]$ の, (対角線の 1 つ右の) $(i, i+1)$ 成分を比較すると $2t_{i,i+1} = t_{i,i+1}$ より $t_{i,i+1} = 0$. これを用いると, (2 つ右の) $(i, i+2)$ 成分も $2t_{i,i+2} = t_{i,i+2}$ より $t_{i,i+2} = 0$. これを繰り返すと $T_1 = E = E_r$ となる.

$Q = \begin{bmatrix} E-B \\ O & E \end{bmatrix}$ とおく. $TQ = \begin{bmatrix} EB \\ OO \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E-B \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EO \\ OO \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E-B \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EO \\ OO \end{bmatrix} = QE'_r$
より, $(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}TQ = E'_r$ と対角化される.

(3) (2) より $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} E'_r = r = \operatorname{rank} E'_r = \operatorname{rank} A$, $r =$ 固有値 1 の重複度.

19 (1) P はエルミート行列なので, あるユニタリ行列 U で対角化され, P はべき等なので固有値は 1, 重複度は r (問題 18(3)) より, $U^{-1}PU = E'_r$ と対角化される.

(2) A はあるユニタリ行列 U により $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \beta_1 E_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k E_{m_k} \end{bmatrix}$ と対角化できる. このとき,

$P_i = U \begin{bmatrix} O & & \\ & E_{m_i} & \\ & & O \end{bmatrix} U^{-1}$ と定めればよい.

20 (1) 定理 6.15 と同様, H の固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とし, H をユニタリ行列 $U = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$ ($H\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i$) で対角化して, $U^{-1}HU = U^*HU = D$ とする. 以下正值の場合について示す. 半正值のときは $>, <$ を $\geq, \leq$ にかえて同様.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $0 < \mathbf{u}_i^* H \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* \alpha_i \mathbf{u}_i = \alpha_i \|\mathbf{u}_i\|^2 = \alpha_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ ならば, 任意の $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を $\mathbf{x} = U\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} = {}^t[y_1 \cdots y_n] \neq \mathbf{0}$) と表すと,

$$\mathbf{x}^* H \mathbf{x} = \mathbf{y}^* U^* H U \mathbf{y} = \mathbf{y}^* D \mathbf{y} = \alpha_1 |y_1|^2 + \cdots + \alpha_n |y_n|^2 > 0.$$

(2) $|H| = \alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$ より正則.

(3) $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対し, $\mathbf{x}^*(A^*A)\mathbf{x} = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 \geq 0$. A が正則なら $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ より $\|A\mathbf{x}\|^2 > 0$. AA^* も同様.

(4) H をユニタリ行列 U で対角化して, $U^*HU = D$ とする. D は対角成分が固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ の対角行列. $\sqrt{D}$ を対角成分が $\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}$ の実対角行列とすると $\sqrt{D}^* \sqrt{D} = \sqrt{D}^2 = D$. このとき, $B := U\sqrt{D}U^*$ とおけば, $B^2 = (U\sqrt{D}U^*)(U\sqrt{D}U^*) = UDU^* = H$.

(5) (2)(3) より $A^*A = H^2$ となる正值エルミート行列 H がある. $U := AH^{-1}$ とおけば, $U^*U = H^{*-1}A^*AH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = E$ より U はユニタリ行列.

同様に, H' を $AA^* := H'^2$, $U' := H'^{-1}A$ で定めると $U'U'^* = E$.

21 (1) H の固有値 α は実数, $\therefore E \pm iH$ の固有値は $1 \pm i\alpha \neq 0$ より $E \pm iH$ は正則.

(2) 一般に, 行列 B, C が可換で C が正則なら, $CBC^{-1} = BCC^{-1} = B$.

$\therefore BC^{-1} = C^{-1}(CBC^{-1}) = C^{-1}B$. つまり B と C^{-1} も可換.

以下, $B = E - iH$, $C = E + iH$ とおく. B, C は可換, (1) より正則で $U = BC^{-1}$. また, $B^* = E + iH^* = C$, $C^* = B$, $U^* = C^{*-1}B^* = B^{-1}C = CB^{-1} = (BC^{-1})^{-1} = U^{-1}$ より U はユニタリ行列である.

(3) H の固有ベクトルを $\mathbf{p}$ ($H\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$) とすると, $(E \pm iH)\mathbf{p} = (1 \pm i\alpha)\mathbf{p}$. 問題 12 の $f(x)$ を用いると $C^{-1}\mathbf{p} = f(C)\mathbf{p} = \frac{1}{1+i\alpha}\mathbf{p}$ より $U\mathbf{p} = BC^{-1}\mathbf{p} = \frac{1-i\alpha}{1+i\alpha}\mathbf{p}$. $(1-i\alpha)/(1+i\alpha) \neq -1$ より U は固有値に -1 をもたず, $E+U$ は正則である.

(4) $E+U = E+BC^{-1} = (C+B)C^{-1} = 2C^{-1}$, $E-U = E-BC^{-1} = (C-B)C^{-1} = 2iHC^{-1}$.

$\therefore -i(E-U)(E+U)^{-1} = -i(2iHC^{-1})(1/2)C = H$.