

フーリエ解析の基礎と応用 問および演習問題の解答

倉田 和浩

2020 年 11 月 12 日改訂

目 次

第 1 章	複素数, オイラーの公式	1
第 2 章	関数項級数の収束	4
第 3 章	フーリエ級数の例	8
第 4 章	L^2 最良近似とベッセル不等式	15
第 5 章	ディリクレ核と各点収束定理	21
第 6 章	ポアソン核とパーセバルの等式	27
第 7 章	有界区間上の熱方程式	31
第 8 章	有界区間上の波動方程式	36
第 9 章	フーリエ変換	41
第 10 章	フーリエ変換の反転公式	46
第 11 章	パーセバルの等式	51
第 12 章	$\mathbb{R}$ 上の熱方程式	58
第 13 章	$\mathbb{R}$ 上の波動方程式	63
第 14 章	ラプラス変換	68
第 16 章	ポアソンの和公式	72
付章 A	演習問題と解答	77
A.1	付章 A の演習問題	77

目 次

iii

A.2 付章 A の問と演習問題の解答	78
付章 B 付章 B の演習問題と解答	82
B.1 付章 B の演習問題	82
B.2 付章 B の演習問題の解答	82
付章 D 付章 D の問の解答	85

第 1 章

複素数, オイラーの公式

問 1.1.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

より, 辺々足したり, 引いたりして主張を得る.

問 1.2. $m, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して, 次の関係からすぐにわかる.

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x) \right),$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} \left(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) \right),$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x) \right).$$

演習 1. (1) 一般に複素数 $w \in \mathbb{C}$ に対して, $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ であることから

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}. \end{aligned}$$

(2) $z = re^{i\theta}$ に対して

$$\begin{aligned} |1-z|^2 &= (1-z)(1-\bar{z}) = (1-re^{i\theta})(1-e^{-i\theta}) \\ &= 1+r^2-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = 1+r^2-2r \cos \theta \end{aligned}$$

より, (1) から従う.

演習 2. 変数変換 $y := \frac{\pi}{l}x$ によって

$$\int_{-l}^l e^{i\frac{n\pi}{l}x} e^{-i\frac{m\pi}{l}x} dx = \frac{l}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iny} e^{-imy} dy$$

となるので, 例題 1.3 より結論を得る.

演習 3. まず

$$\sin((2j-1)x) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(2j-1)x} - e^{-i(2j-1)x} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{-ix} (e^{2ix})^j - e^{ix} (e^{-2ix})^j \right)$$

なので

$$\begin{aligned} \sin x + \sin(3x) + \cdots + \sin((2k-1)x) &= \sum_{j=1}^k \sin((2j-1)x) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^k \left(e^{-ix} (e^{2ix})^j - e^{ix} (e^{-2ix})^j \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ e^{-ix} e^{2ix} \left(\frac{1 - e^{2ikx}}{1 - e^{2ix}} \right) - e^{ix} e^{-2ix} \left(\frac{1 - e^{-2ikx}}{1 - e^{-2ix}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - e^{2ikx}}{e^{-ix} - e^{ix}} - \frac{1 - e^{-2ikx}}{e^{ix} - e^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{2 - 2\cos(2kx)}{(-2i)\sin x} \right) = \frac{1 - \cos(2kx)}{2\sin x} = \frac{\sin^2(kx)}{\sin x} \end{aligned}$$

を得る.

演習 4: 部分積分により

$$\begin{aligned} J_{k,n} &= c_n[x^k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^k e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^k \frac{1}{(-in)} \frac{d}{dx} \left(e^{-inx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-in)} \left\{ \left[x^k e^{-inx} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} x^{k-1} e^{-inx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-in)} \left((\pi^k - (-1)^k \pi^k) (-1)^n - k 2\pi J_{k-1,n} \right) \\ &= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^k}{(-in)} (1 - (-1)^k) + \frac{k}{in} J_{k-1,n} \end{aligned}$$

となる. 特に, $J_{0,n} = 0$ ($n \neq 0$) なので

$$J_{1,n} = c_n[x] = (-1)^n \frac{1}{(-in)} + \frac{1}{in} J_{0,n} = (-1)^n \frac{1}{(-in)}$$

となり,

$$J_{2,n} = c_n[x^2] = \frac{2}{in} J_{1,n} = (-1)^n \frac{2}{n^2}$$

を得る.

演習 5: オイラーの公式より

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \cos(lx) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{imx} + e^{-imx})(e^{inx} + e^{-inx})(e^{ilx} + e^{-ilx}) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(m+n+l)x} + e^{i(n-m+l)x} + e^{i(m-n+l)x} + e^{i(l-n-m)x} \right. \\ & \quad \left. + e^{i(m+n-l)x} + e^{i(n-m-l)x} + e^{i(m-n-l)x} + e^{i(-n-m-l)x} \right) dx \\ &= \frac{2\pi}{8} \left(\delta(m+n+l, 0) + \delta(n-m+l, 0) + \delta(m-n+l, 0) + \delta(l-n-m, 0) \right. \\ & \quad \left. + \delta(m+n-l, 0) + \delta(n-m-l, 0) + \delta(m-n-l, 0) + \delta(-n-m-l, 0) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\delta(l, -m-n) + \delta(l, m+n) + \delta(l, m-n) + \delta(l, n-m) \right) \end{aligned}$$

を得る. 特に

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \cos(2x) \cos(3x) dx &= \frac{\pi}{2} (\delta(3, -3) + \delta(3, 3) + \delta(3, -1) + \delta(3, 1)) = \frac{\pi}{2}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cos(3x) \cos(4x) dx &= \frac{\pi}{2} (\delta(4, -5) + \delta(4, 5) + \delta(4, -1) + \delta(4, 1)) = 0 \end{aligned}$$

を得る.

第 2 章

関数項級数の収束

演習 1. (1) $x = 0, 1$ のとき, $f_n(x) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) なので, $f(0) = f(1) = 0$.
 $0 < x < 1$ のとき, $nx^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なので, やはり $f(x) = 0$. よって,
 $f(x) = 0$ ($x \in [0, 1]$) を得る.

(2)

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(n - (n+1)x)$$

なので, $x = \frac{n}{n+1}$ で $f_n(x)$ は最大値をとることがわかる. よって

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| &= \max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \times \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

を得る. このことより, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $f(x) = 0$ に区間 $[0, 1]$ 上で一様収束しない.

演習 2. (1) $x(1-x) \leq \frac{1}{2}$ ($x \in [0, 1]$) に注意すると

$$f_n(x) = r^n x^n (1-x)^n \leq \left(\frac{r}{2}\right)^n \quad (x \in [0, 1])$$

が成り立つ. よって, $0 < r < 2$ なので

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{r}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る. このことは $\{f_n\}$ が $f(x) = 0$ に区間 $[0, 1]$ 上で一様収束することを示している. 従ってまた

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 r^n x^n (1-x)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

と求めることができる.

(2) $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が区間 $[0, 1]$ 上である関数 $g(x)$ に一様収束するとして矛盾を導

く. $0 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{2}$ のとき, $x(1-x) < \frac{1}{2}$ なので

$$g_n(x) = (2x(1-x))^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. よって, $g(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{2}$) となる, 一方, $x = \frac{1}{2}$ では, $g_n(\frac{1}{2}) = 1 \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) なので $g(\frac{1}{2}) = 1$ となる. 従って, 極限関数 $g(x)$ は区間 $[0, 1]$ 上で不連続となり, 命題 2.2 に矛盾する.

演習 3. (1)

$$|\frac{1}{n^\alpha} \cos(nx)| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R})$$

であって $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ は, $\alpha > 1$ なので収束する. (なぜなら,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} < +\infty$$

となるからである.) よって, ワイエルシュトラスの M 判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cos(nx)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

(2) 1 回項別微分した関数項級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2} \sin(nx))' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} n \cos(nx)$$

であるが,

$$|e^{-n^2} n \cos(nx)| \leq ne^{-n^2} := M_n \quad (n \geq 1, x \in \mathbb{R})$$

である. ここで

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^k}{k!} \quad (k \geq 1, x \geq 0)$$

なので, 特に

$$e^{-x} \leq \frac{k!}{x^k} \quad (k \geq 1, x \geq 1)$$

が成り立つ. よって

$$e^{-n^2} \leq \frac{k!}{n^{2k}} \quad (k \geq 1, n \geq 1)$$

が成り立つことを活用する. 特に, $k = 2$ として

$$M_n = ne^{-n^2} \leq n \frac{2!}{n^4} = \frac{2}{n^3} \quad (n \geq 1)$$

となるので, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ となる. よって, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} n \cos(nx)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束するので, 項別微分可能となり

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} n \cos(nx)$$

を得る. 同様にして, 勝手な $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-n^2} < +\infty$$

なることより, 結局, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx)$ は何回でも項別微分可能となること
がわかる.

演習 4. (1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N r^n \sin(nx) &= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^N \left((re^{ix})^n - (re^{-ix})^n \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ re^{ix} \frac{1 - r^N e^{iNx}}{1 - re^{ix}} - re^{-ix} \frac{1 - r^N e^{-iNx}}{1 - re^{-ix}} \right\} \\ &\rightarrow \frac{1}{2i} \left\{ \frac{re^{ix}}{1 - re^{ix}} - \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{re^{ix}(1 - re^{-ix}) - re^{-ix}(1 - re^{ix})}{|1 - re^{ix}|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{r(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - r \cos x)^2 + r^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \end{aligned}$$

となる.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(nx)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束するので, 項別積分できて

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^t \sin(nx) dx &= \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(nx) \right) dx \\ &= \int_0^t \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2} \log(1 - 2r \cos x + r^2) \right]_{x=0}^{x=t} \\
&= \frac{1}{2} \log(1 - 2r \cos t + r^2) - \frac{1}{2} \log(1 - r)^2 \\
&= \frac{1}{2} \log(1 - 2r \cos t + r^2) - \log(1 - r)
\end{aligned}$$

となる．一方で，左辺は

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (1 - \cos(nt))$$

となる．ここで $\log(1 - r)$ のマクローリン展開より

$$\log(1 - r) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \quad (0 < r < 1)$$

なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nt) = -\frac{1}{2} \log(1 - 2r \cos t + r^2) \quad (0 < r < 1)$$

を得る．

第 3 章

フーリエ級数の例

問 3.1

$$\begin{aligned}c_n[f] &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \\&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx - i \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \\&= \frac{1}{2} a_n[f] - i \frac{1}{2} b_n[f] \quad (n \geq 0)\end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$c_{-n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi}{l} x} dx = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \quad (n \geq 1)$$

を得る.

問 3.2 $f(x)$ が偶関数であるとき, $f(-x) = f(x)$ なので

$$\begin{aligned}c_n[f] &= \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^0 f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx + \int_0^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \right) \\&= \frac{1}{2l} \left(\int_0^l f(x) e^{i \frac{n\pi}{l} x} dx + \int_0^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \right) \\&= \frac{1}{l} \left(\int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \right)\end{aligned}$$

を得る. また, $c_{-n}[f] = c_n[f]$ ($n \geq 1$) もわかる. よって

$$\begin{aligned}S[f](x) &= c_0[f] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n[f] e^{i \frac{n\pi}{l} x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}[f] e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \\&= c_0[f] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n[f] (e^{i \frac{n\pi}{l} x} + e^{-i \frac{n\pi}{l} x})\end{aligned}$$

$$= c_0[f] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n[f] \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

とあり，求める表現を得る．

問 3.3 複素フーリエ係数は

$$c_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である．ここで

$$c_0[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

また， $n \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} c_n[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \left(-\frac{1}{in} e^{-inx} \right)' dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[x^2 \left(-\frac{1}{in} e^{-inx} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{i\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{i\pi n} \left\{ \left[x \left(-\frac{1}{in} e^{-inx} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{i\pi n} \left(-\frac{1}{in} \right) \left(\pi e^{in\pi} + \pi e^{-in\pi} \right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-inx} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \end{aligned}$$

を得る．

演習 1. $f(x)$ は偶関数なので, $a_n[f]$ を計算すればよい. まず

$$a_0[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right) = 0.$$

また, $n \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} a_n[f] &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{\sin(\frac{n}{2}\pi)}{n} \end{aligned}$$

となる. よって n が偶数なら $a_n[f] = 0$ で, n が奇数で $n = 2m - 1 (m \geq 1)$ とするとき $\sin(\frac{2m-1}{2}\pi) = (-1)^{m+1}$ なので

$$S[f](x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)} \cos((2m-1)x)$$

を得る.

演習 2. 奇関数なので $a_n[f] = 0$ であり,

$$b_n[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) + \sin(n-1)x) dx$$

となる. $n = 1$ のとき

$$b_1[f] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0.$$

また, $n \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} b_n[f] &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n+1} + \frac{(-1)^n + 1}{n-1} \right\} \end{aligned}$$

を得る. よって

$$S[f](x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2 - 1} \sin(2mx)$$

を得る.

演習 3. $f(x)$ は奇関数なので

$$b_n[f] = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin(nx) dx$$

を計算すればよい．ここで，部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin(nx) dx &= \int_0^\pi x^2 \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right)' dx \\ &= \left[-\frac{1}{n} x^2 \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos(nx) dx \\ &= -\frac{1}{n} \pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right)' dx \\ &= -\frac{1}{n} \pi^2 (-1)^n - \frac{2}{n^2} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\ &= -\frac{1}{n} \pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

となる．以上より

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin(nx)$$

を得る．

演習 4. (1) $g(x)$ は偶関数なので

$$a_n[g] = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x-a)^2 \cos(nx) dx$$

を計算すればよい．まず， $n=0$ のとき

$$\int_0^\pi (x-a)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x-a)^3 \right]_0^\pi = \frac{1}{3} ((\pi-a)^3 + a^3)$$

となる．また， $n \geq 1$ のとき

$$\int_0^\pi (x-a)^2 \cos(nx) dx = \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx - 2a \int_0^\pi x \cos(nx) dx$$

であって

$$\int_0^\pi x \cos(nx) dx = \left[x \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1)$$

および

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx &= -\frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2} \int_0^\pi x (\cos(nx))' dx = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n\end{aligned}$$

を得るので、結局

$$\begin{aligned}a_n[g] &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{n^2} (-1)^n - 2a \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n 2(\pi - a) + 2a \right) \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

を得る。以上より

$$S[g](x) = \frac{1}{3\pi} ((\pi - a)^3 + a^3) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(\pi - a) + 2a}{n^2} \cos(nx)$$

となる。

(2) 特に、 $a = \pi$ のとき

$$S[g](x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

となる。従って

$$f(x) := \frac{1}{4}(|x| - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{4}|x|^2 - \frac{\pi}{2}|x| + \frac{\pi^2}{6} \quad (|x| \leq \pi)$$

なる周期 2π の関数を $f(x)$ とすれば

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

となることがわかる。

演習 5. (1)

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^4$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix} \right) \\
&= \frac{1}{16} \left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6 \right) \\
&= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

を得る.

(2) 同様に

$$\begin{aligned}
\cos^{2N} \theta &= \left(\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right)^{2N} = \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2N} {}_{2N}C_k e^{ik\theta} (e^{-i\theta})^{2N-k} \\
&= \frac{1}{2^{2N}} \sum_{k=0}^{2N} \frac{(2N)!}{(2N-k)!k!} e^{2i(k-N)\theta}
\end{aligned}$$

となるが^s, $m := k - N$ とおくと, $2N - k = N - m, k = N + m$ なので

$$\begin{aligned}
\cos^{2N} \theta &= \frac{1}{2^{2N}} \sum_{m=-N}^N \frac{(2N)!}{(N-m)!(N+m)!} e^{2im\theta} \\
&= \frac{1}{2^{2N}} \left(\frac{(2N)!}{(N!)^2} + \sum_{m=1}^N \frac{(2N)!}{(N-m)!(N+m)!} (e^{2im\theta} + e^{-2im\theta}) \right) \\
&= \frac{1}{2^{2N}} \left(\frac{(2N)!}{(N!)^2} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{(2N)!}{(N-m)!(N+m)!} \cos(2m\theta) \right)
\end{aligned}$$

を得る.

演習 6. $e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n$ に注意して,

$$\begin{aligned}
c_n[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a|x|} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{(a-in)x} dx + \int_0^{\pi} e^{-(a+in)x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{1}{a-in} e^{(a-in)x} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{(-1)}{a+in} e^{-(a+in)x} \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a-in} (1 - e^{-a\pi} (-1)^n) - \frac{1}{a+in} (e^{-a\pi} (-1)^n - 1) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-a\pi} (-1)^n) \left(\frac{1}{a-in} + \frac{1}{a+in} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-a\pi}(-1)^n) \frac{2a}{a^2 + n^2} = \frac{a}{\pi(a^2 + n^2)} (1 - e^{-a\pi}(-1)^n)$$

となる. よって

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2 + n^2)} (1 - e^{-a\pi}(-1)^n) e^{inx}$$

を得る.

第 4 章

L^2 最良近似とベッセル不等式

問 4.1. (1) コーシー-シュワルツの不等式より

$$(f_n - f, g_n - g)_{L^2(I)} \leq \|f_n - f\|_{L^2(I)} \|g_n - g\|_{L^2(I)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) まず $\|g_n\|_{L^2(I)} \rightarrow \|g\|_{L^2(I)} \quad (n \rightarrow \infty)$ となるので, ある $M > 0$ が存在して $\|g_n\|_{L^2(I)} \leq M \quad (n \geq 1)$ なることに注意する. よって

$$\begin{aligned} & \left| (f_n, g_n)_{L^2(I)} - (f, g)_{L^2(I)} \right| \\ & \leq \left| (f_n - f, g_n)_{L^2(I)} \right| + \left| (f, g_n - g)_{L^2(I)} \right| \\ & \leq \|f_n - f\|_{L^2(I)} \|g_n\|_{L^2(I)} + \|f\|_{L^2(I)} \|g_n - g\|_{L^2(I)} \\ & \leq \|f_n - f\|_{L^2(I)} M + \|f\|_{L^2(I)} \|g_n - g\|_{L^2(I)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を得る.

問 4.2. $t = s + 2\pi$ として, $f(s)$ が周期 2π であることから

$$\int_{\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{a-\pi} f(s+2\pi) ds = \int_{-\pi}^{a-\pi} f(s) ds$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t) dt &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{\pi+a} f(t) dt \\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(t) dt + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \end{aligned}$$

を得る.

問 4.3. 高次導関数のフーリエ係数に関する公式を $k = 2$ の場合に確認してみ

よう. すなわち, f が C^2 級の周期関数で, 区分的 C^3 級とすると, この場合でも部分積分の公式がつかえて

$$\begin{aligned} c_n[f^{(3)}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(3)}(x) e^{-inx} dx \\ &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(2)}(x) e^{-inx} dx = (in) c_n[f^{(2)}] \end{aligned}$$

となる. あとは, ふつうの部分積分の公式より

$$c_n[f^{(2)}] = (in) c_n[f'] = (in)^2 c_n[f]$$

となるので, $c_n[f^{(3)}] = (in)^3 c_n[f]$ を得ることになる. 一般の k の場合でも同様である.

演習 1. $q_0(x)q_1(x), q_0(x)q_3(x), q_1(x)q_2(x), q_2(x)q_3(x)$ は奇関数なので

$$(q_0, q_1)_{L^2(-1,1)} = (q_0, q_3)_{L^2(-1,1)} = (q_1, q_2)_{L^2(-1,1)} = (q_2, q_3)_{L^2(-1,1)} = 0.$$

また

$$(q_1, q_3)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^1 (5x^4 - 3x^2) dx = 2[x^5 - x^3]_{x=0}^1 = 0,$$

$$(q_0, q_2)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) dx = 2[x^3 - x]_{x=0}^1 = 0,$$

$$(q_0, q_2)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) dx = 2[x^3 - x]_{x=0}^1 = 0$$

となる. 以上より $\{q_k\}_{k=0}^3$ が区間 $[-1, 1]$ 上で直交関係を満たすことが確かめられた.

演習 2. (1)

$$(\phi_n, \phi_m)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e^{i2\pi(n-m)x} dx = \delta(n, m)$$

となる.

(2)

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |f(x) - \sum_{n=-N}^N d_n \phi_n(x)|^2 dx \\
&= \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^N \overline{d_n} (f, \phi_n)_{L^2(0,1)} - \sum_{n=-N}^N d_n \overline{(f, \phi_n)_{L^2(0,1)}} + \sum_{n=-N}^N |d_n|^2 \\
&= \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \sum_{n=-N}^N |d_n - (f, \phi_n)_{L^2(0,1)}|^2 - \sum_{n=-N}^N |(f, \phi_n)_{L^2(0,1)}|^2
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x) - \sum_{n=-N}^N d_n \phi_n(x)|^2 dx &\geq \int_0^1 |f(x) - \sum_{n=-N}^N (f, \phi_n)_{L^2(0,1)} \phi_n(x)|^2 dx \\
&= \int_0^1 |f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n[f] \phi_n(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

演習 3. フーリエ級数の L^2 最良近似性より,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{a_0[f]}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\
A_1 &= a_1[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = -\frac{\pi}{4}, \\
A_2 &= a_2[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0
\end{aligned}$$

を得る。

演習 4.

$$\begin{aligned}
c_n[fg] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k[f]e^{ikx} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m[g]e^{imx} \right) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k[f]b_m[g] \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{imx} e^{-inx} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k[f] b_m[g] \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+m-n)x} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_k[f] b_m[g] \delta(m, n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k[f] b_{n-k}[g]
\end{aligned}$$

となることがわかる.

注意. $f(x)$ が連続で区分的に C^1 級の関数であれば $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k[f] e^{ikx}$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上で一様収束して

$$f(x) = S[f](x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k[f] e^{ikx}$$

が成立することから, $f(x), g(x)$ が連続で区分的に C^1 級の関数であれば, 上記の計算は正当化されることになる.

演習 5. $f(x)$ は連続で区分的 C^1 級なので, 部分積分の公式が使えることに注意して

$$\begin{aligned}
b_n[f] &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\pi-1}{2} \right) \frac{\cos(nx)}{n} dx + \int_1^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{\pi-1}{2} \right) \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^1 - \frac{1}{2n^2} \left[\sin(nx) \right]_1^{\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{n^2} \sin n
\end{aligned}$$

を得る. よって

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin(nx)$$

を得る. 特に, 基本定理 3.1 から, $x = 1$ として

$$\frac{1}{2}(\pi-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

を得る.

演習 6. (1) $f(x)$ は偶関数なので

$$\begin{aligned}
 a_n[f] &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (e^x + e^{-x}) \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{(1+in)x} + e^{(1-in)x} + e^{(in-1)x} + e^{-(1+in)x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1+in} (e^{(1+in)\pi} - 1) + \frac{1}{1-in} (e^{(1-in)\pi} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{in-1} (e^{(in-1)\pi} - 1) - \frac{1}{1+in} (e^{-(1+in)\pi} - 1) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(e^\pi (-1)^n \left(\frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in} \right) + e^{-\pi} (-1)^n \left(\frac{1}{in-1} - \frac{1}{1+in} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{1+in} - \frac{1}{1-in} - \frac{1}{in-1} + \frac{1}{1+in} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^n 2}{1+n^2} (e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \sinh \pi
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\frac{a_0[f]}{2} = \frac{1}{\pi} \sinh \pi$$

なので

$$S[f](x) = \frac{1}{\pi} \sinh \pi + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx)$$

を得る.

(2) $f(x)$ は連続かつ区分的に C^1 級の周期関数なので, フーリエ級数の各点収束定理より

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{\pi} \sinh \pi + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx)$$

が成り立つ. 特に, $x = \pi$ として

$$\cosh \pi = \frac{1}{\pi} \sinh \pi + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(n\pi)$$

となる. ここで $\cos(n\pi) = (-1)^n$ なので

$$\frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

となる. よって

$$\pi \coth \pi = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

を得る.

第 5 章

ディリクレ核と各点収束定理

演習 1. 例題 5.1 のフーリエ級数において, $x = \pi$ を代入すれば

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

となる. これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

を得る.

演習 2. (1) $n \neq 0$ に対して $c_n[p_2] = \frac{2(-1)^n}{n^2}$ なので, 第 1 章の演習 4 の漸化式より

$$\begin{aligned} c_n[p_3] &= \frac{\pi^2(-1)^n}{(-in)} + \frac{3}{in} c_n[p_2] = \frac{1}{i} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi + \frac{6(-1)^n}{n^3} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{i} \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3} \right) \end{aligned}$$

を得る. 同様に, $n \neq 0$ に対して

$$c_n = \frac{4}{in} c_n[p_3] = -\frac{4}{n} \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3} \right)$$

を得る. また

$$c_0[p_3] = 0, \quad c_0[p_4] = \frac{\pi^4}{5}$$

を得る.

(2) 従って

$$\begin{aligned} x^3 &= \sum_{n \neq 0} c_n[p_3] e^{inx} \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} \pi^2}{n} e^{inx} - \frac{(-1)^{-n-1} \pi^2}{n} e^{-inx} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6(-1)^n}{n^3} e^{inx} - \frac{6(-1)^{-n}}{n^3} e^{-inx} \right) \Big\} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2(-1)^{n-1}}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3} \right) \sin(nx) \quad (-\pi < x < \pi)
\end{aligned}$$

を得る。また、

$$\begin{aligned}
x^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{4\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{24(-1)^n}{n^4} \right) e^{inx} \\
&= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2(-1)^n}{n^2} (2 \cos(nx)) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24(-1)^n}{n^4} (2 \cos(nx)) \\
&= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right) \cos(nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)
\end{aligned}$$

を得る。

注. ちなみに、 x^4 のフーリエ級数展開で $x=0$ を代入すると

$$0 - \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

となる。ここで $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ であったことをもちいると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7}{720} \pi^4$$

を得ることに注意しておこう。

演習 3. (1)

$$\begin{aligned}
c_n[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(\alpha-n)x} + e^{-i(\alpha+n)x} \right) dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{i(\alpha-n)} \left[e^{i(\alpha-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{i(\alpha+n)} \left[e^{-i(\alpha+n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{i(\alpha-n)} \left(e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{i(\alpha+n)} \left((e^{-i(\alpha+n)\pi} - e^{i(\alpha+n)\pi}) \right) \Big\} \\
& = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{i(\alpha-n)} (2i \sin(\alpha-n)\pi - \frac{1}{i(\alpha+n)} (-2i) \sin(\alpha+n)\pi) \right\} \\
& = \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^n}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n} \right) = \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
S[f](x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} e^{inx} \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} e^{inx} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha\pi)(-1)^{-n}}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} e^{-inx} \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx)
\end{aligned}$$

を得る。

演習 4. まず, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{2}{\pi} y \leq \sin y \leq y$$

なることを用いる。それより

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_N(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2N+1)y)}{\sin y} \right| dy \\
&\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin((2N+1)y)}{y} \right| dy
\end{aligned}$$

と評価できる。ここで,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{2N} \int_{\frac{r\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(r+1)\pi}{2(2N+1)}} \left| \frac{\sin((2N+1)y)}{y} \right| dy \\
&\geq \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{2N} \int_{\frac{r\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(r+1)\pi}{2(2N+1)}} \frac{|\sin((2N+1)y)|}{\left(\frac{(r+1)\pi}{2(2N+1)} \right)} dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{4(2N+1)}{\pi^2} \sum_{r=0}^{2N+1} \frac{1}{r+1} \int_{\frac{r\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(r+1)\pi}{2(2N+1)}} |\sin((2N+1)y)| dy$$

となる．ここで，変数変換 $z = (2N+1)y$ により

$$\begin{aligned} & (2N+1) \int_{\frac{r\pi}{2(2N+1)}}^{\frac{(r+1)\pi}{2(2N+1)}} |\sin((2N+1)y)| dy \\ &= \int_{\frac{r\pi}{2}}^{\frac{(r+1)\pi}{2}} |\sin z| dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x + \frac{r\pi}{2})| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{aligned}$$

であることに注意しよう．ここで，

$$|\sin(x + \frac{r\pi}{2})| = |\sin x \cos(\frac{r\pi}{2}) + \cos x \sin(\frac{r\pi}{2})| = \begin{cases} |\sin x| & (r \text{ が偶数}) \\ |\cos x| & (r \text{ が奇数}) \end{cases}$$

であることを用いた．以上より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx &\geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{r=0}^{2N} \frac{1}{r+1} \geq \frac{4}{\pi^2} \int_1^{2N+2} \frac{1}{x} dx \\ &\geq \frac{4}{\pi^2} \log(2N+2) \end{aligned}$$

を得る．

演習 5. (1) $w := e^{ix}$ として，

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=-k}^k w^n \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{-k} (1 + w + \cdots + w^{2k}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{-k} \left(\frac{1 - w^{2k+1}}{1 - w} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{1 - w} \left(\sum_{k=0}^{N-1} w^{-k} - w \sum_{k=0}^{N-1} w^k \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{1-w} \left(\frac{1-w^{-N}}{1-w^{-1}} - w \frac{1-w^N}{1-w} \right)$$

となるが, $w^{-1} = \bar{w}$ にも注意して

$$-\frac{w}{1-w} = -\frac{1}{w^{-1}-1} = \frac{1}{1-\bar{w}}$$

となるので

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \frac{1}{1-w} \left(\frac{1-\bar{w}^N}{1-\bar{w}} + \frac{1-w^N}{1-w} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{|1-w|^2} (2 - \bar{w}^N - w^N) \\ &= \frac{1}{N} \frac{2 - 2\cos(Nx)}{2 - 2\cos x} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る.

(2) 各 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ で

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \sum_{n=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi$$

に注意して

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = 1$$

となる.

(3)

$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq \left(\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2 \quad (\delta \leq |x| \leq \pi)$$

なので

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N(x) dx &\leq \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{N} \frac{1}{\left(\sin(\frac{\delta}{2})\right)^2} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{N} \frac{2\pi}{(\sin(\frac{\delta}{2}))^2} \rightarrow 0 \ (N \rightarrow \infty)$$

となる.

第 6 章

ポアソン核とパーセバルの等式

演習 1. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta)$ は $\theta \in [-\pi, \pi]$ 上で一様収束するので、項別積分できて

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) \right) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = 0$$

となる.

演習 2. (1) 仮定より $c_n[g] = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるので、パーセバルの等式から

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 0$$

を得る. 主張が成り立たないとする、ある $x_0 \in [-\pi, \pi]$ があって、 $g(x)$ は $x = x_0$ で連続であって、 $g(x_0) \neq 0$ が成り立つことになる. このとき、ある $\delta > 0$ があって $g(x) > 0$ ($x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) または $g(x) < 0$ ($x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) が成り立つことになるので

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} dx > 0$$

となって矛盾する.

(2) $h(x)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上に奇関数拡張し、さらに周期 2π の関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を $\tilde{h}(x)$ と書くと、 $\tilde{h}(x)$ は周期 2π の $\mathbb{R}$ 上で区分的連続な関数となる. また仮定から

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(x) \sin(nx) dx = 0$$

となり、さらに $\tilde{h}(x) \cos(nx)$ が奇関数なので

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(x) \cos(nx) dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

も成り立つ. よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(x) e^{-inx} dx = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つことになるので、(1) より結論が得られる。

演習 3. ワイエルシュトラスの三角多項式近似定理より、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ とある数列 $\{a_n\}$ があって

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}| < \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi}}$$

が成り立つ。よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon}{4\pi} dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

が成り立つ。

演習 4. まず、 $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上で連続なので一様連続でもあることから、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - z| < \delta, x, z \in [-\pi, \pi]$ ならば $|f(x) - f(z)| < \epsilon$ が成り立つ。また $M := \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| < +\infty$ と置く。このとき、 $f(x)$ は周期 2π なので $|f(z)| \leq M$ ($z \in \mathbb{R}$) であることに注意しておく。

このとき、 $F_N(y) \geq 0$ であって、 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) dy = 1$ なることを用いて

$$\begin{aligned} |\sigma_N[f](x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_N(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| F_N(y) dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| F_N(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)| F_N(y) dy \\ &\leq \epsilon + \frac{2M}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_N(y) dy \quad (|x| \leq \pi) \end{aligned}$$

と評価できる。さらに、

$$\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_N(y) dy \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

であったので, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ があって, $N \geq N_0$ に対して

$$\frac{2M}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_N(y) dy \leq \epsilon$$

が成り立つ. 以上より, $N \geq N_0$ に対して

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_N[f](x) - f(x)| \leq 2\epsilon$$

を得る. これで主張が証明された.

演習 5. まず仮定から $c_n[f'] = (in)c_n[f]$ となることを思い出す. また, 区分的に連続である $f'(x)$ に対してパーセバルの等式を適用することで

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n[f']|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c_n[f]|^2$$

となる.

演習 6.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n[f] \overline{c_n[g]}$$

であったが,

$$c_n[f] = \frac{1}{2}(a_n[f] - ib_n[f]) \quad (n \geq 0), \quad c_{-n}[f] = \frac{1}{2}(a_n[f] + ib_n[f]) \quad (n \geq 1)$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n[f] - ib_n[f]) (\overline{a_n[g]} + i\overline{b_n[g]}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n[f] + ib_n[f]) (\overline{a_n[g]} - i\overline{b_n[g]}) \\ &= \frac{1}{4} a_0[f] \overline{a_0[g]} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n[f] \overline{a_n[g]} + b_n[f] \overline{b_n[g]} \right) \end{aligned}$$

となる. これより結論が得られる.

演習 7. (1)

$$\begin{aligned}
 c_n[f] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(\alpha-n)} e^{i(\alpha-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi i(\alpha-n)} (2i) \sin((\alpha-n)x) = \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\alpha\pi)
 \end{aligned}$$

を得る. よって示された.

(2) パーセバルの等式より

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\alpha x}|^2 dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n[f]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(\alpha-n)^2} |\sin(\alpha\pi)|^2
 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって次を得る.

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-n)^2} \quad (-1 < \alpha < 1).$$

特に, $\alpha = -\frac{1}{2}$ として次が得られる.

$$\pi^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2} + n)^2}.$$

第 7 章

有界区間上の熱方程式

問 7.1. まず

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^k}{k!} \quad (x > 0, k \in \mathbb{N})$$

であるので, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$e^{-x} \leq \frac{k!}{x^k} \quad (x > 0)$$

が成り立つ. そこで, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $2k - m \geq 2$ なる $k \in \mathbb{N}$ をとることで, 任意の定数 $C > 0$ に対して

$$n^m e^{-Cn^2} \leq n^m \frac{k!}{(Cn^2)^k} \leq \frac{k!}{C^k n^2} \quad (n \geq 1)$$

となる. よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-Cn^2} \leq \frac{k!}{C^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

を得る.

演習 1. (1) 直接確かめることもできるし, フーリエの方法からもすぐわかることである.

$l = \pi$ および $D = 1$ の場合なので, 一般の初期値 $u(x, 0) = u_0(x)$ に対しては, フーリエの方法によって解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx$$

となる. 今の場合, $u_0(x) = \sin x + \frac{1}{27} \sin(3x)$ が $u_0(x)$ のフーリエ正弦級数そのものであるので,

$$A_1 = 1, A_3 = \frac{1}{27}, A_n = 0 \quad (n \neq 1, 3)$$

となることが計算しなくてもわかることに注意.

(2) $u_0(x) \geq 0$ なることの証明はいろいろありえるが, 例えば

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) \\ &= \sin x(\cos(2x) + 2\cos^2 x) = \sin x(4\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

なることに注意すれば, $\sin x \geq 0 (0 \leq x \leq \pi)$ なので

$$\begin{aligned}u(x) &= \sin x \left(1 + \frac{1}{27}(4\cos^2 x - 1)\right) \\ &= \sin x \left(\frac{26}{27} + \frac{4}{27}\cos^2 x\right) \geq 0\end{aligned}$$

からわかる.

次に $u(x, t) \geq 0$ なることの証明であるが, 1つの説明は比較定理を用いるものである. つまり, $v_0(x) \equiv 0$ を初期値とする解は $v(x, t) \equiv 0$ であるので, $u_0(x) \geq 0 = v_0(x) (0 \leq x \leq \pi)$ から, 比較定理により

$$u(x, t) \geq v(x, t) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi, t \geq 0)$$

が従う.

(別解) 直接

$$\begin{aligned}u(x, t) &= e^{-t} \sin x + \frac{1}{27} e^{-9t} \sin(3x) \\ &\geq e^{-9t} \sin x + \frac{1}{27} e^{-9t} \sin(3x) = e^{-9t} u_0(x) \geq 0\end{aligned}$$

として説明してもよい.

演習 2. $l = \pi$ の場合なので, 一般の初期値 $u(x, 0) = u_0(x)$ に対しては, フーリエの方法によって解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-Dn^2 t} \sin(nx), \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) dx$$

となる. ここで

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi^2 - x^2) \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right)' dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - 3x^2) \cos(nx) dx$$

となるが, $\int_0^\pi \cos(nx) dx = 0$ に注意して

$$A_n = -\frac{6}{n\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx &= \int_0^\pi x^2 \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right)' dx = -\frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) \\ &= -\frac{2}{n} \left\{ \left[x \left(-\frac{1}{n} \right) \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{2\pi}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

となる. よって

$$A_n = -\frac{12}{n^3} (-1)^n = \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1}$$

を得る. 以上より

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^3} (-1)^{n+1} e^{-Dn^2 t} \sin(nx)$$

となる.

演習 3. (1) まず

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

なることに注意しておく. 仮定からある正定数 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ があって

$$\gamma_1 x \leq u_0(x) \leq \gamma_2 x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

なることを示す. なぜなら仮定からある $\delta > 0$ があって

$$u'_0(x) \geq \frac{1}{2} u'_0(0) := \kappa_1 > 0 \quad (0 \leq x \leq \delta)$$

が成り立つ. 一方で, 平均値の定理から, ある $\theta \in (0, 1)$ があって

$$u_0(x) = u_0(0) + u'_0(\theta x)x = u'_0(\theta x)x$$

であるので

$$u_0(x) \geq \kappa_1 x \quad (0 \leq x \leq \delta)$$

が成り立つ。このとき、 $u_0(x) > 0$ ($0 < x < \pi$) なので、 $\frac{u_0(x)}{x}$ は区間 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 上で正なので、その最小値を $\beta_1 > 0$ として

$$\beta_1 \leq \frac{u_0(x)}{x} \quad (\delta \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

が成り立つこともわかる。以上より、 $\gamma_1 := \min(\kappa_1, \beta_1) > 0$ として

$$\gamma_1 x \leq u_0(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

を得る。一方、 $\gamma_2 := \max_{0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}} |u'_0(y)|$ として

$$u_0(x) \leq \gamma_2 x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

が成り立つ。以上より、ある $A_1, A_2 > 0$ があって

$$A_1 \sin x \leq u_0(x) \leq A_2 \sin x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

を得る。 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ においても同様に議論をすることで、ある定数 $A'_1, A'_2 > 0$ があって

$$A'_1 \sin x \leq u_0(x) \leq A'_2 \sin x \quad (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$$

を得る。従って結局、 $\alpha_1 := \min(A_1, A'_1) > 0, \alpha_2 := \max(A_2, A'_2)$ として

$$\alpha_1 \sin x \leq u_0(x) \leq \alpha_2 \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

が成り立つこととなる。

(2) 初期値が $v_1(x) := \alpha_1 \sin x$ の時の解を $v_1(x, t)$ とし、初期値が $v_2(x) := \alpha_2 \sin x$ の時の解を $v_2(x, t)$ とすると

$$v_1(x, t) = \alpha_1 e^{-Dt} \sin x, \quad v_2(x, t) = \alpha_2 e^{-Dt} \sin x$$

となる。また

$$v_1(x) \leq u_0(x) \leq v_2(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

なので, 比較定理より

$$v_1(x, t) \leq u(x, t) \leq v_2(x, t) \quad (0 \leq x \leq \pi, t \geq 0)$$

が成り立つ. よって主張が示された.

演習 4. フーリエの方法によって, 解は

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l u_0(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D(\frac{n\pi}{l})^2 t} \cos(\frac{n\pi}{l} x)$$

と書ける. ここで

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \cos(\frac{n\pi}{l} x) dx$$

である. $u_0(x)$ に対する仮定から

$$C_0 := \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$$

となることもわかっている. 以上より

$$\left| u(x, t) - \frac{1}{l} \int_0^l u_0(x) dx \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| e^{-D(\frac{n\pi}{l})^2 t} \leq e^{-D(\frac{\pi}{l})^2 t} C_0$$

が成り立つことになる.

第 8 章

有界区間上の波動方程式

演習 1. $f(x) := 0, g(x) := \sin^3 x, l := \pi$ として,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(cnt) \sin(nx)$$

であって

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (cn) \sin(nx)$$

となる. ここで $g(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$ なので

$$B_1 = \frac{3}{4c}, \quad B_3 = -\frac{1}{12c}$$

となり, $B_n = 0$ ($n \neq 1, 3$) となる. 以上より

$$u(x, t) = \frac{3}{4c} \sin(ct) \sin x - \frac{1}{12c} \sin(3ct) \sin(3x)$$

となる.

演習 2. (1) $l := 10, c := 1, g(x) := 0$ として

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right),$$

ただし

$$A_n = \frac{1}{5} \int_0^5 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx$$

となる. ここで

$$A_n = \frac{1}{5} \left(\int_4^5 (x-4) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx + \int_5^6 (6-x) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \right)$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\int_4^5 (x-4) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx &= \int_4^5 (x-4) \left(-\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\right)' dx \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \int_4^5 \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\
&= -\frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる. 同様にして

$$\begin{aligned}
\int_5^6 (6-x) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx &= \frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{10}{n\pi}\right) \int_5^6 \cos\left(\frac{n\pi}{10}x\right) dx \\
&= \frac{10}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \left(\sin\left(\frac{3n\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

を得る. よって

$$A_n = \frac{1}{5} \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \left(2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{5}\right)\right)$$

を得る. よって

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{(n\pi)^2} \left(2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{5}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{10}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)$$

となる.

(2) $\tilde{f}(x)$ として, $f(x)$ を 0 に関して奇関数拡張し, さらに周期 20 の関数として拡張したものとするとき, 解は

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t))$$

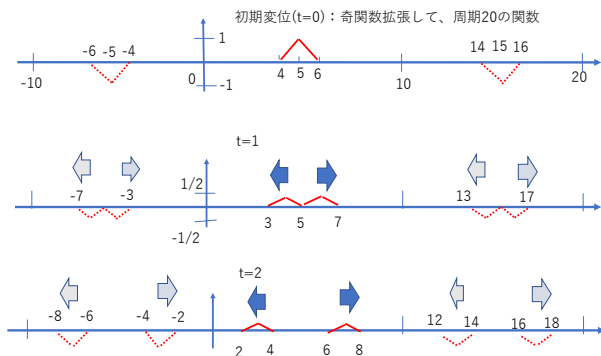
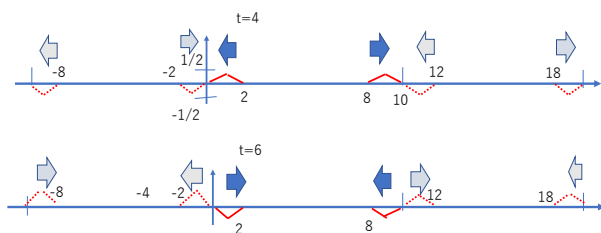
と表現できたので, これをもとに解の様子を理解することができる.

注意. 高さが $1/2$ の波 $\tilde{f}(x)$ が右進行波と左進行波として伝搬していく様子を理解することになるが, このとき区間 $0 \leq x \leq 10$ 以外から波が伝搬してきて, 特に $t=6$ において, 反対の波の形が表れることになることを理解しよう.

演習 3. 解を $T(t)U(x)$ の形で求めてみると

$$T''(t)U(x) = c^2 U''(x)T(t) - aU(x)T(t)$$

となるので, $c^2 T(t)U(x)$ で割ることで, ある定数 μ を用いて

図 8.1 波の伝搬の様子 ($t = 0, 1, 2$)図 8.2 波の伝搬の様子 ($t = 4, 6$)

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} - \frac{a}{c^2} = -\mu$$

が成り立つことになる。よって、 $U(x)$ は

$$-U''(x) = \left(\mu - \frac{a}{c^2}\right)U(x), \quad 0 < x < l, \quad U(0) = U(l) = 0$$

を満たすことになる。これは,

$$\lambda := \mu - \frac{a}{c^2}$$

とおけば, 以前の考察より

$$\lambda = \lambda_n := \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

でなければならないことがわかる。よって

$$\mu = \mu_n := \frac{a}{c^2} + \lambda_n = \frac{a}{c^2} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であって, $U(x) = U_n(x) := \sin(\frac{n\pi}{l}x)$ となる。またこのとき

$$T''(t) = -c^2\mu_n T(t)$$

より

$$\begin{aligned} T(t) &= A_n \cos(c\sqrt{\mu_n}t) + B_n \sin(c\sqrt{\mu_n}t) \\ &= A_n \cos\left(\sqrt{a + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{a + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2} t\right) \end{aligned}$$

を得る。以上より

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\sqrt{a + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2} t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{a + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2} t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \\ B_n \sqrt{a + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2} &= \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

である。

演習 4. (1) 明らか。

(2) $w(x, t) := u(x, t) - v(x)$ は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t), \quad (0 < x \leq \pi, t > 0),$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

$$w(x, 0) = -\sin x, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を満たすことに注意する． よって

$$w(x, t) = -\cos t \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nt) \sin(nx),$$

ただし

$$B_n n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

となる． 以上から

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = \sin x - \cos t \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nt) \sin(nx)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得る．

第 9 章

フーリエ変換

演習 1. (1)

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x e^{-i\xi x} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2i}\right) (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-i\xi x} dx \\&= \left(\frac{1}{2i}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-i(\xi-1)x} - e^{-i(\xi+1)x}\right) dx \\&= \left(\frac{1}{2i}\right) (\hat{f}(\xi-1) - \hat{f}(\xi+1))\end{aligned}$$

を得る.

(2) 同様にして

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x e^{-i\xi x} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2}\right) (e^{ix} + e^{-ix}) e^{-i\xi x} dx \\&= \left(\frac{1}{2}\right) (\hat{f}(\xi-1) + \hat{f}(\xi+1))\end{aligned}$$

を得る.

(3) $k(x) = e^{-|x|}$ に対して

$$\hat{k}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{(1+\xi^2)}$$

であったので, (1) より $f(x) = e^{-|x|} \sin x = k(x) \sin x$ に対して

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \frac{1}{2i} (\hat{k}(\xi-1) - \hat{k}(\xi+1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \left(\frac{1}{1+(\xi-1)^2} - \frac{1}{1+(\xi+1)^2} \right) \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \left(\frac{1}{(\xi^2+2)-2\xi} - \frac{1}{(\xi^2+2)+2\xi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \left(\frac{4\xi}{(\xi^2+2)^2-4\xi^2} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \left(\frac{4\xi}{\xi^4 + 4} \right)$$

となる.

演習 2. $k_a(x) := e^{-a|x|}$ に対して

$$\hat{k}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\xi^2 + a^2} \right)$$

であったので, $g(x) = xe^{-a|x|} = xk_a(x)$ に対して

$$(-i)\hat{g}(\xi) = (-i\widehat{xk_a})(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{k}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{(\xi^2 + a^2)^2} (-2\xi)$$

となる. よって

$$\hat{g}(\xi) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4a\xi}{(\xi^2 + a^2)^2}$$

を得る.

演習 3. (1) $f(z)$ は $z \neq \pm ai$ で正則である. $r > 0$ を十分小さくとして

$$C_r(ai) : |z - ai| = r$$

とすれば, コーシーの積分定理より

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= \int_{C_r(ai)} f(z) dz = \frac{1}{2ai} \int_{C_r(ai)} e^{i\xi z} \left(\frac{1}{z - ai} - \frac{1}{z + ai} \right) dz \\ &= \frac{1}{2ai} \int_{C_r(ai)} e^{i\xi z} \frac{1}{z - ai} dz \end{aligned}$$

となる. ここでコーシーの積分公式より

$$\frac{1}{2ai} \int_{C_r(ai)} e^{i\xi z} \frac{1}{z - ai} dz = \frac{1}{2ai} \times (2\pi i) e^{i\xi(ai)} = \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}$$

となるので

$$\int_{C_R} f(z) dz = \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}$$

を得る.

(2) $C_{2,R}$ のパラメータ表示により

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{2,R}} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\xi(R \cos t + iR \sin t)} R i e^{it} \frac{1}{a^2 + R^2 e^{2it}} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R\xi \sin t} \frac{R}{|a^2 + R^2 e^{2it}|} dt \end{aligned}$$

となるが, $\xi > 0$ および $\sin t \geq 0$ ($0 \leq t \leq \pi$) なので $e^{-R\xi \sin t} \leq 1$ となること, および

$$\left| \frac{1}{a^2 + R^2 e^{2it}} \right| \leq \frac{1}{R^2 - a^2}$$

であることに注意して,

$$\left| \int_{C_{2,R}} f(z) dz \right| \leq \frac{R}{R^2 - a^2} \pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

を得る. また

$$\int_{C_{1,R}} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{i\xi t} \frac{1}{a^2 + t^2} dt$$

なので, $R \rightarrow \infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{a} e^{-a\xi}$$

を得る. よって

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} \right) e^{-a|\xi|} \quad (\xi > 0)$$

を得る. 最後に, $\hat{f}_a(\xi)$ が偶関数となることより

$$\hat{f}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} \right) e^{-a|\xi|} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が成り立つことになる.

演習 4. 最初に $a \neq b$ の場合を求める.

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{x^2 + a^2} - \frac{1}{x^2 + b^2} \right)$$

なので, 演習 3 の結果を用いることで

$$\widehat{g_{a,b}}(\xi) = \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} e^{-a|\xi|} - \frac{1}{b} e^{-b|\xi|} \right)$$

を得る. $a = b$ の場合を考える. $a \neq b$ の場合の結果で $b \rightarrow a$ なる極限をとることで求めることもできるが, ここでは, パラメータ $a > 0$ に関する積分記号下の微分を用いることで求めてみる. 演習 3 より

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} xi}{x^2 + a^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\xi|}$$

であるので, 両辺を $a > 0$ で微分することで

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-2a)e^{-ix} xi}{(x^2 + a^2)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{a^2} e^{-a|\xi|} - \frac{|\xi|}{a} e^{-a|\xi|} \right)$$

となる. よって

$$\widehat{g_{a,a}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} xi}{(x^2 + a^2)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2a^3} \right) (1 + a|\xi|) e^{-a|\xi|}$$

を得る.

演習 5. $x \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} g_a(x) &= (f_a * f_a)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|} e^{-a|y|} dy \\ &= \int_{-\infty}^x e^{-a(x-y)} e^{ay} dy + \int_x^0 e^{-a(y-x)} e^{ay} dy + \int_0^{\infty} e^{-a(y-x)} e^{-ay} dy \\ &= e^{-ax} \int_{-\infty}^x e^{2ay} dy + e^{ax} \int_x^0 dy + e^{ax} \int_0^{\infty} e^{-2ay} dy \\ &= \left(\frac{1}{a} - x \right) e^{ax} = \left(\frac{1}{a} + |x| \right) e^{-a|x|} \quad (x \leq 0) \end{aligned}$$

を得る. $x > 0$ のとき,

$$\begin{aligned} g_a(x) &= \int_{-\infty}^0 e^{-a(x-y)} e^{ay} dy + \int_0^x e^{-a(x-y)} e^{-ay} dy + \int_x^{\infty} e^{-a(y-x)} e^{-ay} dy \\ &= \left(\frac{1}{a} + x \right) e^{-ax} = \left(\frac{1}{a} + |x| \right) e^{-a|x|} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

となる. 以上より

$$g_a(x) = (f_a * f_a)(x) = \left(\frac{1}{a} + |x| \right) e^{-a|x|}$$

を得る. また

$$\hat{g}_a(\xi) = \sqrt{2\pi}(\hat{f}_a(\xi))^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4a^2}{(a^2 + \xi^2)^2}$$

となる.

第 10 章

フーリエ変換の反転公式

問 10.1.

$$\phi_{\epsilon}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}}$$

に対して, 変数変換 $y := \frac{x}{\sqrt{2\epsilon}}$ により

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{\epsilon}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \sqrt{2\epsilon} dy = 1.$$

また, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$\int_{|x| \geq \delta} \phi_{\epsilon}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{2\epsilon}}} e^{-y^2} dy \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

を得る.

演習 1. (1) 普通に計算すればいいが, ここでは次の性質を用いた計算の仕方を紹介しよう.

一般に, 関数 $f(x)$ と定数 $a > 0$ に対して

$$F(x) := f\left(\frac{x}{a}\right)$$

とすると, $t := \frac{x}{a}$ なる変数変換で

$$\hat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-i\xi x} dx = a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi at} dt = a \hat{f}(a\xi)$$

となることに注意しよう. この問題において $f_N(x) = f_1\left(\frac{x}{N}\right)$ なることより

$$\hat{f}_N(\xi) = N \hat{f}_1(N\xi)$$

となるので, $\hat{f}_1(\xi)$ だけ計算しておけばよいことになる.

そこで

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1 - |x|) \cos(\xi x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1 - x) \cos(\xi x) dx
\end{aligned}$$

として計算する．（途中， $\sin(\xi x)$ が奇関数， $\cos(\xi x)$ が偶関数であることを用いた．）よって

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - x) \left(\frac{1}{\xi} \sin(\xi x) \right)' dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \left[(1 - x) \frac{1}{\xi} \sin(\xi x) \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{\xi} \int_0^1 \sin(\xi x) dx \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2 \left(\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\xi} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{(\frac{\xi}{2})} \right)^2
\end{aligned}$$

を得る．（途中， $\xi \neq 0$ として計算してあるが， $\hat{f}_1(\xi)$ が ξ の連続関数であることは計算しなくてもわかっているので $\xi \neq 0$ で計算しておけば， $\xi = 0$ でも $\xi \rightarrow 0$ としてわかることになる．もちろん， $\xi = 0$ の場合に別途計算してもかまわないが．）

以上より

$$\hat{f}_N(\xi) = N \hat{f}_1(N\xi) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\frac{N\xi}{2})}{(\frac{N\xi}{2})} \right)^2 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}N} \left(\frac{\sin(\frac{N\xi}{2})}{\xi} \right)^2$$

を得る．

(2) $f_N \in \mathcal{M}$ であることがわかるので，反転公式が適用できて

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \left(\frac{\sin(\frac{N\xi}{2})}{(\frac{N\xi}{2})} \right)^2 d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2t}{N}x} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \frac{2}{N} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2t}{N}x} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt
\end{aligned}$$

を得る．特に， $x = 0$ として

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$$

となる．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \pi.$$

演習 2. (1) 本文で学んだ例においてパラメータが変更されているだけなので，略する．

(2)

$$\begin{aligned}
\widehat{f_a * f_b}(\xi) &= \sqrt{2\pi} \hat{f}_a(\xi) \hat{f}_b(\xi) = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{b}{2}} e^{-\frac{a}{4}\xi^2} e^{-\frac{b}{4}\xi^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{ab} e^{-\frac{a+b}{4}\xi^2}
\end{aligned}$$

となる．これから $f_a * f_b \in \mathcal{M}$ であることもわかる．一方

$$\widehat{f_{a+b}}(\xi) = \sqrt{\frac{a+b}{2}} e^{-\frac{a+b}{4}\xi^2}$$

であり， $f_{a+b} \in \mathcal{M}$ である．よって

$$\mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{ab}} f_a * f_b \right] (\xi) = e^{-\frac{a+b}{4}\xi^2} = \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{a+b}} f_{a+b} \right] (\xi)$$

が成り立つ．一般に， $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ が

$$\hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi)$$

ならば，反転公式により $f_1(x) = f_2(x)$ となることに注意すれば，上記のことから

$$\sqrt{\frac{2}{ab}}(f_a * f_b)(x) = \sqrt{\frac{2}{a+b}}f_{a+b}(x)$$

が成り立つことになる。従って

$$g(x) = (f_a * f_b)(x) = \sqrt{\frac{ab}{2}} \sqrt{\frac{2}{a+b}} f_{a+b}(x) = \sqrt{\frac{\pi ab}{a+b}} e^{-\frac{x^2}{a+b}}$$

を得る。

注意. 定義に従って $(f_a * f_b)(x)$ を計算することもできるが, 上記のように求めるのが見通しがよい。

演習 3. 反転公式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_a(x+) + f_a(x-)) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^r \hat{f}_a(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^r \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-ar}^{ar} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) e^{i\frac{t}{a}x} dt \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-ar}^{ar} \left(\frac{\sin t}{t} \right) \cos\left(\frac{t}{a}x\right) dt \end{aligned}$$

を得る。よって, $y := \frac{x}{a}$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right) \cos(ty) dt = \begin{cases} \pi & (|y| < 1) \\ \frac{\pi}{2} & (|y| = 1) \\ 0 & (|y| > 1) \end{cases}$$

を得る。

演習 4.

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^0 (-1) e^{-i\xi x} dx + \int_0^1 e^{-i\xi x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\xi} (2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \left(\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) \end{aligned}$$

を得る． よって反転公式より

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(g(x+) + g(x-)) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i} \int_{-r}^r \left(\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) e^{i\xi x} d\xi \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{i} \int_{-r}^r \left(\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) (i \sin(\xi x)) d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) \sin(\xi x) d\xi
 \end{aligned}$$

となる． よって

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right) \sin(\xi x) d\xi &= \frac{1}{4}(g(x+) + g(x-)) \\
 &= \begin{cases} 0 & (|x| > 1, x = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (0 < x < 1) \\ -\frac{\pi}{2} & (-1 < x < 0) \\ \frac{\pi}{4} & (x = \frac{1}{2}) \\ -\frac{\pi}{4} & (x = -\frac{1}{2}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる．

第 11 章

パーセバルの等式

演習 1. (1) $f(x) \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$) なので, $f(0) = 0$ として, $f(x)$ は $x \in [0, 1]$ で連続関数である. よって $f(x)$ は $x \in [0, +\infty)$ で連続である. また $x \geq 1$ において

$$|f(x)| \leq \frac{2}{x^2}$$

であるので,

$$\int_1^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx < +\infty,$$

また

$$\int_1^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \int_1^{\infty} \frac{4}{x^4} dx < +\infty$$

となる. よって, $f \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f \in L^2(\mathbb{R})$ となる.

(2) $f(x)$ は $x \in [0, +\infty)$ で連続であるが, $x \geq 1$ において $x^2 + 1 \leq 2x^2$ なので,

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{2x^2} dx = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

となる. よって $f \notin L^1(\mathbb{R})$. 一方, $x \geq 2$ で $x^2 + 1 \geq \frac{1}{2}x^2$ なることより

$$|f(x)|^2 = \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^2} \leq \frac{x^2}{(\frac{x^2}{2})^2} \leq \frac{4}{x^2}$$

が成り立つので

$$\int_2^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 4 \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

を得る. よって $f \in L^2(\mathbb{R})$ となる.

(3) $f(x)$ は $|x| \leq 2$ において, $x = \pm 1$ 以外では連続である. また, ロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{(-2x)} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{(-2x)} = -\frac{\pi}{2},$$

となる. これより $f(x)$ は $x = 1$ でも連続であるが, $x = -1$ では連続ではない. しかし $x = -1$ でも区分的連続であるので

$$\int_{-2}^2 |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-2}^2 |f(x)|^2 dx < +\infty$$

が成り立つ. 一方で, $|x| \geq 2$ において

$$|x|^2 - 1 \geq \frac{1}{2}|x|^2$$

なので

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{|x|^2 - 1} \leq \frac{2}{x^2} \quad (|x| \geq 2)$$

となるので

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2} |f(x)| &\leq \int_{|x| \geq 2} \frac{2}{|x|^2} dx < +\infty, \\ \int_{|x| \geq 2} |f(x)|^2 &\leq \int_{|x| \geq 2} \frac{4}{|x|^4} dx < +\infty \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より, $f \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $f \in L^2(\mathbb{R})$ を得る.

注意. $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ の判定において, 具体的な値を計算しなくても, 関数 $f(x)$ の連続でない点の近くでの評価や, 遠くでの減衰評価などによって, 比較判定条件を用いる感覚を身につけることが肝要である.

演習 2. (1) 変数変換 $x := (n-1)\pi + y$ によって

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^\pi \left| \frac{\sin((n-1)\pi + y)}{(n-1)\pi + y} \right| dy$$

となるが,

$$|\sin((n-1)\pi + y)| = |\cos((n-1)\pi) \sin y| = |\sin y|$$

および

$$|(n-1)\pi + y| \leq n\pi \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

より

$$\int_0^\pi \left| \frac{\sin((n-1)\pi + y)}{(n-1)\pi + y} \right| dy \geq \int_0^\pi \frac{|\sin y|}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}$$

が成り立つ。よって

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{n\pi}$$

を得る。

(2) (1) より

$$\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となり, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ なることより

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

を得る。

演習 3.

$$\hat{k}_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$$

なので, パーセバルの等式より

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{(a^2 + \xi^2)(b^2 + \xi^2)} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}_a(\xi) \overline{\hat{k}_b(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k_a(x) \overline{k_b(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-b|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)|x|} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-(a+b)x} dx = \frac{2}{a+b} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \xi^2)(b^2 + \xi^2)} d\xi = \frac{1}{\pi ab(a+b)}$$

となる。ちなみに, $a = b$ として次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \xi^2)^2} d\xi = \frac{\pi}{2a^3}.$$

演習 4.

$$\hat{f}_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

であったので、パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_a(\xi) \overline{\hat{f}_b(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \overline{f_b(x)} dx = \int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)} dx = 2 \min(a, b)$$

が成り立つ。よって

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\xi) \sin(b\xi)}{\xi^2} d\xi = 2 \min(a, b).$$

以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\xi) \sin(b\xi)}{\xi^2} d\xi = \pi \min(a, b).$$

を得る。

演習 5.

$$\hat{g}(\xi) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4a\xi}{(\xi^2 + a^2)^2}$$

であった。パーセバルの等式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx.$$

よって

$$\frac{16a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + a^2)^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2a|x|} dx$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2a|x|} dx &= 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2ax} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^2 \left(-\frac{1}{2a} e^{-2ax} \right)' dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\infty} x e^{-2ax} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\infty} x \left(-\frac{1}{2a} e^{-2ax} \right)' dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty e^{-2ax} dx = \frac{1}{2a^3}$$

なので,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi^2}{(\xi^2 + a^2)^4} d\xi = \frac{\pi}{16a^5}$$

を得る.

演習 6. (1) ヒントよりコーシー-シュワルツの不等式を用いて

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (a + b|x|^2) |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a + b|x|^2)} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

と評価できる. ここで, 変数変換 $x = \sqrt{\frac{a}{b}}y$ により

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a + b|x|^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}$$

となる. よって, $t = \sqrt{\frac{a}{b}} > 0$ として

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (a + b|x|^2) |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{a}{b}} |g(x)|^2 + \sqrt{\frac{b}{a}} |x|^2 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi} \left(t \|g\|_{L^2}^2 + \frac{1}{t} \|x|g|\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を得る. $a, b > 0$ は任意でいいので, 任意の $t > 0$ で上記の不等式はなりたつことになる. そこで, $g \neq 0$ のとき

$$t := \frac{\|x|g|\|_{L^2}}{\|g\|_{L^2}} > 0$$

とすることで

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \leq \sqrt{2\pi} \|g\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|x|g|\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

を得る. $g(x) = 0$ の場合は, 証明すべき不等式は自明であるので主張が示された.

(2) $g(\xi) := \hat{f}(\xi)$ として, (1) より

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \sqrt{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。ここで、 $\hat{f}'(\xi) = (i\xi)\hat{f}(\xi)$ とパーセバルの等式より

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \quad \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

であるので、示すべき不等式を得る。

演習 7. (1) 複素数値関数 $u(x)$ に対して証明する。

$$\frac{d}{dx}(|u(x)|^2) = \frac{d}{dx}(u(x)\overline{u(x)}) = u'(x)\overline{u(x)} + u(x)\overline{u'(x)} = 2\operatorname{Re}(u'(x)\overline{u(x)})$$

なので

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2(x)' dx = \left[|u(x)|^2 x \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(|u(x)|^2) x dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(u'(x)\overline{u(x)}) x dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u'(x)| |u(x)| |x| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |xu(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |xu(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を得る。

(2) $u_{x_0, \xi_0}(x) := e^{-ix\xi_0} u(x+x_0)$ とするとき

$$\begin{aligned} \widehat{u_{x_0, \xi_0}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi_0} u(x+x_0) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x+x_0) e^{-i(\xi+\xi_0)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-i(\xi+\xi_0)(y-x_0)} dy = e^{ix_0(\xi+\xi_0)} \hat{u}(\xi+\xi_0) \end{aligned}$$

なので,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_{x_0, \xi_0}(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |u_{x_0, \xi_0}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 \widehat{u_{x_0, \xi_0}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

から

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |u(x+x_0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi+\xi_0)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x-x_0|^2 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi-\xi_0|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

を得る.

演習 8. 条件から

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi x} dx = 0 \quad (|\xi| \geq L)$$

が成り立つ. このことから, $f(x)$ ($-L \leq x \leq L$) を周期 $2L$ で拡張した関数を $\tilde{f}(x)$ としたとき, そのフーリエ係数 $c_n[\tilde{f}]$ に対して, $n_0 > L$ なる $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して

$$c_n[\tilde{f}] = 0 \quad (|n| \geq n_0, n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つこととなる. よって

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} c_n[\tilde{f}] e^{inx} \quad (|x| \leq L)$$

となるので, $\tilde{f}(x)$ は区間 $(-L, L)$ 上で解析的べき級数展開できる. 一方, また仮定から $\tilde{f}(x) = 0$ ($x \in [-L, -R] \cup [R, L]$) であるので, $\tilde{f}(x) = 0$ ($x \in [-L, L]$) とならなければならない. よって, 特に $f(x) = 0$ ($x \in [-L, L]$) となる. 最初の仮定と合わせて, $f(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) となる.

第 12 章

$\mathbb{R}$ 上の熱方程式

問 12.1. (1) まず変数変換 $z := \frac{y}{\sqrt{4Dt}}$ として

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_D(y, t) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1$$

となる.

(2) また, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$\int_{|y| \geq \delta} K_D(y, t) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4Dt}}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0)$$

を得る.

(3) 最後に

$$\frac{\partial K_D}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 K_D}{\partial x^2}(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

なることを確かめよう.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_D}{\partial t}(x, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \left(\frac{x^2}{4Dt^2}\right) \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K_D}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \left(-\frac{x}{2Dt} \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

$$\frac{\partial^2 K_D}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \left(\left(-\frac{1}{2Dt}\right) + \left(\frac{x}{2Dt}\right)^2 \right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

となる. これより示すべき式が成り立つことがわかる.

演習 1. (1) 変数変換 $z := x - y$ により

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos(ay) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} \frac{1}{2} \left(e^{ia(x-z)} + e^{-ia(x-z)} \right) dz \\
&= \frac{1}{2} e^{iax} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} e^{-iaz} dz \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{-iax} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}} e^{iaz} dz \right) \\
&= \frac{1}{2} (e^{iax} + e^{-iax}) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{4\pi t}} \times \frac{\sqrt{4t}}{\sqrt{2}} e^{-a^2 t} \\
&= e^{-a^2 t} \cos(ax)
\end{aligned}$$

を得る.

(2)

$$u(x, 0) = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

なので, (1) より

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4t} \cos(2x)$$

を得る.

演習 2. (1)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} a(y) dy$$

であり, コーシー-シュワルツの不等式より

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |a(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る. ここで, 変数変換 $z := \frac{(x-y)}{\sqrt{2t}}$ により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \sqrt{2t} dz = \sqrt{2t} \sqrt{\pi}$$

なので, $A := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |a(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$ として,

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (2\pi)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} A = \frac{A}{(8\pi t)^{\frac{1}{4}}}$$

となる. よって, $C := \frac{A}{(8\pi)^{\frac{1}{4}}}$ として, 示すべき不等式が得られる.

(2) $W_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ として

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) dy = 1 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

なることに注意する.

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |W_t(x-y)| |a(y)| dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |W_t(x-y)|^{\frac{1}{2}} (|W_t(x-y)|^{\frac{1}{2}} |a(y)|) dy \end{aligned}$$

であり,

$$f(y) := |W_t(x-y)|^{\frac{1}{2}}, \quad g(y) := |W_t(x-y)|^{\frac{1}{2}} |a(y)|$$

として, コーシー-シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |W_t(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |W_t(x-y)| |a(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) |a(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるので

$$|u(x, t)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) |a(y)|^2 dy \right) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

よって, 積分順序の交換をすることにより

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)|^2 dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) |a(y)|^2 dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |a(y)|^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x-y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(y)|^2 dy \end{aligned}$$

を得る.

演習 3.

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} a(x) & (x \geq 0) \\ a(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

とすると, $\tilde{a}$ は $\mathbb{R}$ 上で, 有界かつ連続な関数となる. よって

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \tilde{a}(y) dy$$

とおくと, $\tilde{u}(x, t)$ は $\mathbb{R}$ 上で熱方程式を満たし, 初期条件を $\tilde{u}(x, t) \rightarrow \tilde{a}(x)$ ($t \rightarrow 0$) として満たすことになる. また, $t > 0$ で

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \tilde{a}(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{(x-y)}{2Dt}\right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \tilde{a}(y) dy \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{2Dt}\right) e^{-\frac{|y|^2}{4Dt}} \tilde{a}(y) dy = 0$$

を得る. ここで, 被積分関数が奇関数であることを用いた. よって, $\tilde{u}(x, t)$ を $x \geq 0$ に制限した関数が求める初期値・境界値問題の解であることがわかる. ここで

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \tilde{a}(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x+y|^2}{4Dt}} a(y) dy$$

に注意して, 求める解の表現として

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} + e^{-\frac{|x+y|^2}{4Dt}} \right) a(y) dy$$

を得る.

演習 4. (1) $v(x, t) := u(x, t)e^{hx+kt}$ なので $u(x, t) = e^{-hx-kt}v(x, t)$. よって

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-hx-kt} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - kv(x, t) \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-hx-kt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - hv(x, t) \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-hx-kt} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2h \frac{\partial v}{\partial x} + h^2 v(x, t) \right).$$

これを方程式に代入して,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - kv(x, t) = D\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial v}{\partial x} + h^2v(x, t)\right) + b\left(\frac{\partial v}{\partial x} - hv(x, t)\right) + cv(x, t)$$

となる. よって $\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ となるには

$$h = \frac{b}{2D}, \quad -k = Dh^2 - bh + c$$

となるべきである. よって

$$h = \frac{b}{2D}, \quad k = \frac{b^2}{4D} - c$$

となるべきである.

(2) よって

$$u(x, t) = e^{(c - \frac{b^2}{4D})t} e^{-\frac{b}{2D}x} v(x, t)$$

と書ける. また

$$v(x, 0) = u(x, 0)e^{hx} = g(x)e^{\frac{b}{2D}x}$$

であるので,

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} g(y) e^{\frac{b}{2D}y} dy$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{(c - \frac{b^2}{4D})t} e^{-\frac{b}{2D}x} v(x, t) \\ &= e^{ct} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} e^{\frac{b}{2D}(y-x)} e^{-\frac{b^2 t}{4D}} g(y) dy \\ &= e^{ct} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y+bt)^2}{4Dt}} g(y) dy \end{aligned}$$

となる.

(3) 変数変換 $z := \frac{(x-y+bt)}{\sqrt{4Dt}}$ として

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y+bt)^2}{4Dt}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1$$

に注意する. よって $|g(y)| \leq M$ として

$$|u(x, t)| \leq Me^{ct}$$

が成り立つこととなる.

第 13 章

$\mathbb{R}$ 上の波動方程式

演習 1. (1) ダランベールの公式より

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+ct)^2} + \frac{1}{1+(x-ct)^2}\right).$$

(2) $(\tan^{-1}(y))' = \frac{1}{1+y^2}$ なので

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2c}(\tan^{-1}(x+ct) - \tan^{-1}(x-ct)).$$

演習 2.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(-x) & (x < 0) \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

と置くと、仮定より $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で、それぞれ C^2 級、 C^1 級となることに注意しよう。従って

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(y) dy$$

と置くと、 $\tilde{u}(x, t)$ は、 $\mathbb{R}$ 上で波動方程式を満たし、初期条件

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{g}(x)$$

を満たす解となる。ここで、 $\tilde{u}(x, t)$ を $x \geq 0$ に制限した関数を $u(x, t)$ と置くと $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)$ が奇関数であることから

$$u(0, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(ct) + \tilde{f}(-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \tilde{g}(y) dy = 0 \quad (t > 0)$$

となる。また $x > 0$ において

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x)) = f(x),$$

であり, また

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}(c\tilde{f}'(x+ct) - c\tilde{f}'(x-ct)) + \frac{1}{2c}(c\tilde{g}(x+ct) + c\tilde{g}(x-ct))$$

なので, $x > 0$ で

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{2}(c\tilde{f}'(x) - c\tilde{f}'(x)) + \frac{1}{2}(\tilde{g}(x) + \tilde{g}(x)) = g(x)$$

を満たす. よって, $u(x, t)$ が半直線上での問題の初期値・境界値問題の解であることがわかる.

演習 3.

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y, s) dy \right) ds$$

である. ここで, $h(y, s) = \cos(y - \sigma s)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \cos(y - \sigma s) dy &= \left[\sin(y - \sigma s) \right]_{y=x-c(t-s)}^{y=x+c(t-s)} \\ &= \sin(x + ct - (c + \sigma)s) - \sin(x - ct + (c - \sigma)s) \end{aligned}$$

なので

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\sin(x + ct - (c + \sigma)s) - \sin(x - ct + (c - \sigma)s) \right) ds$$

となる. よって, $\sigma \neq c$ の場合には

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \left[\frac{\cos(x + ct - (c + \sigma)s)}{c + \sigma} + \frac{\cos(x - ct + (c - \sigma)s)}{c - \sigma} \right]_{s=0}^{s=t} \\ &= \frac{1}{2c} \left(\frac{2c}{c^2 - \sigma^2} \cos(x - \sigma t) - \frac{1}{c; \sigma} \cos(x + ct) - \frac{1}{c - \sigma} \cos(x - ct) \right) \end{aligned}$$

となる.

一方, $\sigma = c$ ならば

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\sin(x + ct - 2cs) - \sin(x - ct) \right) ds \\ &= \frac{1}{2c} \left(\left[\frac{\cos(x + ct - 2cs)}{2c} \right]_{s=0}^{s=t} - \sin(x - ct)t \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{2c} (\cos(x-ct) - \cos(x+ct)) - t \sin(x-ct) \right)$$

を得る.

演習 4. ダランベールの公式より

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

である. $|x| \geq R+ct$ に対して

$$|x-ct| \geq |x| - ct \geq R, \quad |x+ct| \geq |x| + ct \geq R$$

であるので, $f(x-ct) = 0, f(x+ct) = 0$ となる. また, $|x| \geq R+ct$ かつ $x \geq 0$ ならば, $x \geq R+ct$ となるので, $x-ct \geq R$ が成り立つ. よって,

$$R \leq x-ct \leq y \leq x+ct \quad (x-ct \leq y \leq x+ct)$$

となるので, $g(y) = 0$ ($x-ct \leq y \leq x+ct$) となる. つまり

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy = 0.$$

以上より, $|x| \geq R+ct, x \geq 0$ では

$$u(x, t) = 0$$

となることになる. 一方, $|x| \geq R+ct$ かつ $x < 0$ では, $-x \geq R+ct$. つまり, $x+ct \leq -R$ となる. よって

$$x-ct \leq y \leq x+ct \leq -R \quad (x-ct \leq y \leq x+ct)$$

となり, やはり $g(y) = 0$ ($x-ct \leq y \leq x+ct$) となる. よって, $|x| \geq R+ct, x < 0$ でも

$$u(x, t) = 0$$

となる. 以上の考察より, $|x| \geq R+ct$ では, $u(x, t) = 0$ が成り立つこととなる.

演習 5. (1) $f(x)$ に関する仮定より, $f(x) = 0$ ($|x| \geq R$) である. よって, $u(x, s) = \frac{1}{2}(f(x-s) + f(x+s))$ であるので, $x \in \mathbb{R}$ を固定するとき, $|x-s| \geq R$ かつ $|x+s| \geq R$ ならば $u(x, s) = 0$ となる. つまり, $|s| \geq R + |x|$ で $u(x, s) = 0$ となる. このことは, 題意を示している.

(2) (1) により, $v(x, t)$ の定義にある s の積分区間は有界区間上での積分であるので, 積分と微分の交換が使えて

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) u(x, s) ds,$$

また, 積分と微分の交換, $u(x, s)$ が波動方程式を満たすこと, さらに部分積分の公式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) u(x, s) ds \end{aligned}$$

を得る. また,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right)$$

であったことを思い出すと,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)$$

を得る.

(3) 有界連続な $u_0(s)$ に対して,

$$z(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-s)^2}{4t}} u_0(s) ds \rightarrow u_0(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0)$$

と置くと, $t \rightarrow 0$ において

$$z(\xi, t) \rightarrow u_0(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が成り立つことは既知である. 今, $u_0(s) := u(x, s)$ として, $v(x, t) = z(0, t)$

であることに注意すれば

$$v(x, t) = z(0, t) \rightarrow u_0(0) = u(x, 0) = f(x) \quad (t \rightarrow 0)$$

が成り立つことになる．つまり，題意が成り立つこととなる．

第 14 章

ラプラス変換

演習 1. まず,

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

と部分分数に分解する. 計算により

$$A = \frac{1}{a-b}, B = -\frac{1}{a-b}$$

となるので,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right)(t) &= \frac{1}{a-b} \left(L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)(t) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)(t) \right) \\ &= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}). \end{aligned}$$

演習 2.

$$\begin{aligned} &L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)(t) \\ &= \frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)} \times \frac{2}{(s^2+4)}\right)(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2(t-\tau)) \sin(2\tau) d\tau \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

なので,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \cos(2(t-\tau)) \sin(2\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(2\tau + (2t-2\tau)) + \sin(2\tau - (2t-2\tau))) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}t \sin(2t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(4\tau - 2t) d\tau \\
&= \frac{1}{2}t \sin(2t) + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} \cos(4\tau - 2t) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2}t \sin(2t)
\end{aligned}$$

となる。以上から,

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)(t) = \frac{1}{4}t \sin(2t)$$

となる。ちなみに, 次の別法もある。 $F(s) = L(f(t))(s)$ のとき,

$$L(tf(t))(s) = -F'(s)$$

という公式を使うと, $F(s) = L(\sin(2t))(s) = \frac{2}{s^2+4}$ より,

$$L(t \sin(2t))(s) = -F'(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

となる。これから

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)(t) = \frac{1}{4}t \sin(2t)$$

を得ることもできる。

演習 3. $Y(s) = L(y(t))(s), R(s) = L(r(t))(s)$ とすると,

$$\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) - 5(s Y(s) - y(0)) + 6 Y(s) = R(s).$$

$y(0) = 0, y'(0) = 1$ を代入して,

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - 1 = R(s).$$

よって

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{R(s) + 1}{s^2 - 5s + 6} = \frac{R(s) + 1}{(s-2)(s-3)} \\
&= \frac{1}{(s-2)(s-3)} + \frac{R(s)}{(s-2)(s-3)} \\
&= \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2} + \left(\frac{R(s)}{s-3} - \frac{R(s)}{s-2} \right)
\end{aligned}$$

となる。これより,

$$y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \int_0^t e^{3(t-\tau)} r(\tau) d\tau - \int_0^t e^{2(t-\tau)} r(\tau) d\tau$$

を得る.

演習 4. $X(s) = L(x(t))(s), Y(s) = L(y(t))(s)$ とおくと,

$$sX(s) = 3X(s) - Y(s), \quad sY(s) - 1 = X(s) + Y(s)$$

が成り立つ。これより

$$\begin{pmatrix} s-3 & 1 \\ 1 & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。これより,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s-3)(1-s)-1} \begin{pmatrix} 1-s & -1 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-2)^2} \begin{pmatrix} -1 \\ s-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$x(t) = L^{-1}\left(-\frac{1}{(s-2)^2}\right)(t) = -te^{2t},$$

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-2)^2}\right)(t) \\ &= -L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)(t) + L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t) = e^{2t} - te^{2t} \end{aligned}$$

となる。

演習 5.

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + s \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

となるので

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + s} \hat{f}(\xi)$$

を得る。ここで

$$\frac{1}{\xi^2 + s} = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} \right) e^{-\widehat{\sqrt{s}|x|}}(\xi)$$

なので

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} \right) e^{-\widehat{\sqrt{s}|x|}} \hat{f}(\xi).$$

よって

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{s}|x-y|} f(y) dy$$

を得る.

演習 6. (1) $v(x, 0) = -1$ ($x > 0$) を $x < 0$ に奇関数拡張することで

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) (-1) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(- \int_{-\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz + \int_{\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

従って

$$u(x, t) = 1 + v(x, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)$$

となる.

(2)

$$U(x, s) = Ae^{-\sqrt{s}x} + Be^{\sqrt{s}x}$$

となるが, 有界な解なので $B = 0$. よって

$$U(x, s) = U(0, s)e^{-\sqrt{s}x} = \frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}$$

を得る. よって

$$u(x, t) = L^{-1} \left(\frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \right) (t).$$

(3) (1) と (2) より得られる.

第 16 章

ポアソンの和公式

演習 1.

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{(\frac{\xi}{2})} \right)^2$$

であったので,

$$h(x) := \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})} \right)^2$$

と置けば, 反転公式より

$$\hat{h}(\xi) = g(\xi)$$

が成り立つこととなる. この $h(x)$ はポアソンの和公式の仮定を満たすことがわかるので, ポアソンの和公式を $h(x)$ に適用して

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x + 2\pi j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

となるが, $\hat{h}(n) = g(n)$ なので, 右辺は $n = 0$ の項だけ残って, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ となる. よって

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x + 2\pi j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

を得る. 特に $x := 2\pi\alpha$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(2\pi\alpha + 2\pi j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin^2(\pi\alpha + \pi j)}{\pi^2(\alpha + j)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\pi^2(\alpha + j)^2} \right) \end{aligned}$$

となる. 以上より

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha}$$

を得る.

注意. 特に, $\alpha = \frac{1}{2}$ にとることで, 次の公式を得ることになる.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(j + \frac{1}{2})^2} = \pi^2.$$

演習 2. 本文で学んだ次の公式:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x+2n\pi|^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in [0, 2\pi])$$

において, $x = 0$ とし, $t := \pi t', t' > 0$ と置くことで, 任意の $t' > 0$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t' n^2} = \frac{1}{\sqrt{t'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t'}}$$

を得る. よって, 示された.

演習 3.

$$\hat{k}_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

であったので,

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \widehat{k_a * k_a}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{k}_a(\xi)^2 \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{a^2}{(a^2 + \xi^2)^2} \end{aligned}$$

となる. よって, ポアソンの和公式を適用できて

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(2\pi j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + n^2)^2}$$

となる. 一方

$$g(x) = (k_a * k_a)(x) = \left(\frac{1}{a} + |x|\right) e^{-a|x|}$$

であったことを思い出すと

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + n^2)^2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a} + |2\pi j|\right) e^{-2a\pi|j|}$$

を得る。ここで、右辺をさらに簡潔な形で求めてみよう。

$$A := \sum_{j=1}^{\infty} 2\pi j e^{-2a\pi j}, \quad B := a \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2a\pi j}$$

と置くことで

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a} + |2\pi j| \right) e^{-2a\pi|j|} = a + 2B + 2A$$

とかける。まず

$$\begin{aligned} a + 2B &= a + 2ae^{-2\pi a} \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}} = a \left(\frac{e^{2\pi a} + 1}{e^{2\pi a} - 1} \right) \\ &= a \left(\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \right) = \frac{a}{\tanh(\pi a)} \end{aligned}$$

を得る。また

$$\sum_{j=1}^{\infty} j r^j = \frac{r}{(1-r)^2} \quad (0 < r < 1)$$

なので、 $r := e^{-2\pi a}$ として

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-2\pi a j} = 2\pi \frac{e^{-2\pi a}}{(1 - e^{-2\pi a})^2} \\ &= \frac{2\pi}{(e^{\pi a} - e^{-\pi a})^2} = \frac{\pi}{\sinh^2(\pi a)} \end{aligned}$$

を得る。以上より

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a} + |2\pi j| \right) e^{-2a\pi|j|} = \frac{a}{\tanh(\pi a)} + \frac{\pi}{\sinh^2(\pi a)}.$$

従って、

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{a}{\tanh(\pi a)} + \frac{\pi}{\sinh^2(\pi a)}$$

を得る。これを整理して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi}{2a^2} \left[\frac{a}{\tanh(\pi a)} + \frac{\pi}{\sinh^2(\pi a)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{a \tanh(\pi a)} + \frac{\pi^2}{a^2 \sinh^2(\pi a)} \right]$$

を得ることができる.

演習 4. フーリエの方法により, まず $u(x, t) = T(t)U(x)$ と置くと, ある定数 λ に対して

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} = -\lambda$$

となる. 周期境界条件を考慮して, $U(x)$ は次の固有値問題:

$$-U''(x) = \lambda U(x) \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$U(0) = U(2\pi), \quad U'(0) = U'(2\pi)$$

の固有関数となるべきことがわかる. 固有値 λ は $\lambda \geq 0$ でなければならないことが, $U(x)$ をかけて積分して部分積分して

$$\int_0^{2\pi} (U'(x))^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} U(x)^2 dx$$

を満たすことからわかる. 途中, 境界での値は周期境界条件から消えることに注意しよう.

$\lambda = 0$ に対しては, $U(x) = 1$ が固有関数となる. よって $\lambda = 0$ は固有値の 1 つとなる. $\lambda > 0$ とすると

$$U(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

となるが, 境界条件 $U(0) = U(2\pi)$ より

$$A = A \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B \sin(\sqrt{\lambda}2\pi).$$

境界条件 $U'(0) = U'(2\pi)$ より

$$B = -A \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) + B \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)$$

となる. よって $(A, B) \neq (0, 0)$ であるためには

$$(1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi))^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0$$

でなければならない. すなわち, $\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1$. よって $\sqrt{\lambda}2\pi = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$). つまり, $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) を得る. このとき,

$$U(x) = A \cos(nx) + B \sin(nx)$$

(A, B は任意) が固有値 $\lambda = n^2$ の固有関数となることもわかる. $\cos(nx), \sin(nx)$ の代わりに, e^{inx}, e^{-inx} を固有関数としてもよい. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対する固有関数を e^{inx} と考えることで

$$u(x, t) = T(t)U(x) = e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

なる解を得る. 重ね合わせの原理によって

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

も熱方程式と周期境界条件を満たすことになる. ここで, 係数 $\{c_n\}$ は

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

となるべきなので, $\{c_n\}$ は $u_0(x)$ の複素フーリエ係数とすべきであり,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(y) e^{-iny} dy$$

となる. よって, 求める解 $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_0(y) e^{-iny} dy \right) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

となる. また,

$$K_t(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}$$

と置くと

$$u(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} K_t(x-y) u_0(y) dy$$

と書くこともできる.

付章 A

演習問題と解答

A.1 付章 A の演習問題

演習 1. N を 2 以上の自然数とする. このとき, $1 \leq k, l \leq N-1$ なる任意の k, l に対して次が成り立つことを示せ.

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right) = \delta(k, l).$$

演習 2. $\mathbf{f}[0] = 0$ なる周期 N の数列 $\{\mathbf{f}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ に対して

$$\hat{\mathbf{f}}[j] := \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \sin\left(\frac{\pi k j}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

とおくとき, 次の反転公式が成り立つことを示せ.

$$\mathbf{f}[m] = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\mathbf{f}}[j] \sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, N-1).$$

演習 3. 次の $N \times N$ 正方行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

行列 A の固有値 $\{\lambda_l\}_{l=0}^{N-1}$ は次で与えられることを示せ.

$$\lambda_l = -4 \sin^2 \left(\frac{\pi l}{2N} \right) \quad (l = 0, 1, \dots, N-1).$$

A.2 付章 A の問と演習問題の解答

問 A.1 任意の $\mathbf{b} \in P_N$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N^{-1}\mathbf{b})[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathcal{F}_N^{-1}\mathbf{b})[n] W_N^{-mn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{b}[k] W_N^{kn} \right) W_N^{-mn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} W_N^{-mn} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(N \delta(k, m) \right) = \mathbf{b}[m] \end{aligned}$$

を得る. よって $\mathbf{b} = \mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N^{-1}\mathbf{b})$ を得る.

演習 1 まず, 次に注意する.

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \cos\left(\frac{\pi j(l-k)}{N}\right) - \cos\left(\frac{\pi j(l+k)}{N}\right) \right\}.$$

最初に, $N-1 \geq k = l \geq 1$ の場合は,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2\pi j l}{N}\right) \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi j l}{N}\right) \end{aligned}$$

となるが, $W_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ に対して, $W_N^N = 1$ より

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi j l}{N}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (W_N^{jl} + W_N^{-jl})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - W_N^{Nl}}{1 - W_N^l} + \frac{1 - W_N^{-Nl}}{1 - W_N^{-l}} \right) = 0$$

となる。よって示された。

次に、 $N-1 \geq l, k \geq 1$ で $l \neq k$ とする。 $l > k$ として一般性を失わない。
このとき、第 1 章の例題での公式を $x := \frac{\pi}{N}(l-k)$ として適用して

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi j(l-k)}{N}\right) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2}) \times \frac{\pi(l-k)}{N}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi(l-k)}{2N}\right)} - \frac{1}{2}$$

を得る。同様にして、

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi j(l+k)}{N}\right) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2}) \times \frac{\pi(l+k)}{N}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi(l+k)}{2N}\right)} - \frac{1}{2}$$

となるので、

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2}) \times \frac{\pi(l-k)}{N}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi(l-k)}{2N}\right)} - \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2}) \times \frac{\pi(l+k)}{N}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi(l+k)}{2N}\right)} \right\}$$

となる。ここで

$$\sin\left((N + \frac{1}{2}) \times \frac{\pi(l-k)}{N}\right) = (-1)^{l-k} \sin\left(\frac{\pi(l-k)}{2N}\right)$$

なので

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j l}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi j k}{N}\right) = \frac{1}{4} \left((-1)^{l-k} - (-1)^{l+k} \right) = 0$$

を得る。よって示された。

演習 2 定義より $\hat{\mathbf{f}}[0] = 0$ である。また、 $m \geq 1$ の場合に示せばよいことに注意する。そこで、 $m \geq 1$ とし、 $\hat{\mathbf{f}}[j]$ の定義式に $\sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right)$ をかけて、

$j = 0, 1, \dots, N-1$ として和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\mathbf{f}}[j] \sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi k j}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m j}{N}\right) \right\} \\ &= \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{f}[k] \delta(m, k) = \frac{N}{2} f[m] \end{aligned}$$

を得る.

演習 3 この固有値問題は $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ を偶拡張し, すなわち

$$u_{-1} = u_0, u_{-2} = u_1, u_{-3} = u_2, \dots, u_{-N} = u_{N-1}$$

とし, さらに周期 $2N$ の数列 $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ として拡張して考えて,

$$u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k = \lambda u_k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

が自明な解 $u_k = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) 以外の解を持つような定数 λ を求める問題と同値であることに注意しよう. $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ をこの周期 N の数列の代表元として

$$A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$$

なるゼロベクトルでない解を求める問題と同じである. そこで, 改めて $\mathbf{u}[k] := u_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) において, 周期 $2N$ の離散フーリエ変換

$$\hat{\mathbf{u}}[k] = \sum_{j=0}^{2N-1} \mathbf{u}[j] W_{2N}^{-jk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1)$$

を用いて

$$\mathbf{u}[l] = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \hat{\mathbf{u}}[m] W_{2N}^{mk} \quad (l = 0, 1, \dots, 2N-1)$$

と表すと, 解くべき方程式

$$\mathbf{u}[k+1] + \mathbf{u}[k-1] - 2\mathbf{u}[k] = \lambda \mathbf{u}[k] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

に代入して,

$$(W_{2N}^l + W_{2N}^{-l} - 2)\hat{\mathbf{u}}[l] = \lambda \hat{\mathbf{u}}[l]$$

を得る. ここで, $\{\hat{\mathbf{u}}[m]\}_{m=0}^{2N-1}$ は自由にとれるわけではなく, 常に $\hat{\mathbf{u}}[N] = 0$ であり, さらに $\{\hat{\mathbf{u}}[m]\}_{m=N+1}^{2N-1}$ は $\{\hat{\mathbf{u}}[m]\}_{m=1}^{N-1}$ から次のように決まることを確かめることができる.

$$\hat{\mathbf{u}}[N+1] = W_{2N}^{-(N-1)}\hat{\mathbf{u}}[N-1], \quad \hat{\mathbf{u}}[N+2] = W_{2N}^{-(N-2)}\hat{\mathbf{u}}[N-2], \quad \dots,$$

$$\dots, \hat{\mathbf{u}}[2N-2] = W_{2N}^{-2}\hat{\mathbf{u}}[2], \quad \hat{\mathbf{u}}[2N-1] = W_{2N}^{-1}\hat{\mathbf{u}}[1]$$

つまり, $\{\hat{\mathbf{u}}[m]\}_{m=0}^{N-1}$ が独立なベクトルとなる. そこで, 各 $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$ に対して, 固有ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_l$ を

$$\hat{\mathbf{u}}_l[m] = \begin{cases} 1 & (m = l) \\ 0 & (m \neq l, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}) \end{cases}$$

と置くことで, 付随する固有値

$$\lambda_l := (W_{2N}^l + W_{2N}^{-l} - 2 = -4 \sin^2 \left(\frac{\pi l}{2N} \right) \quad (l = 0, 1, \dots, N-1)$$

を得る.

付章 B

付章 B の演習問題と解答

B.1 付章 B の演習問題

演習 1. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0, a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) になるとき, 任意の $x \in [-\pi, \pi]$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ は各点収束することを示せ. また, 任意の $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ は各点収束することを示せ.

演習 2. (1) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が収束するとき,

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$$

は $x \in [0, 1]$ 上で一様収束することを示せ. 特に, $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ 上で連続関数となるので, 次が成り立つことになる.

$$\lim_{x < 1, x \rightarrow 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

これをアーベルの定理という.

(2) 第 2 章演習 2 (2) にアーベルの定理を適用することで, $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ に対して次を示せ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kt) = -\log \left(2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right).$$

B.2 付章 B の演習問題の解答

演習 1.

$$B_n(x) := \sum_{k=1}^n \sin(kx), \quad C_n(x) := \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

と置くとき, 第 1 章の例題の不等式より, $x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$ に対して

$$|B_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} < +\infty, \quad |C_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} < +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる. よって第 2 章の系より結論が得られることになる. また, $\sum_{k=1}^{\infty} a_n \sin(kx)$ については, $x = 0$ の時は $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ は明らかに 0 に収束するので証明されたことになる.

演習 2. (1) 仮定より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって, 任意の $n > m \geq n_0$ に対して次が成り立つ.

$$\left| \sum_{j=m}^n a_j \right| < \epsilon.$$

このとき, $n > m \geq n_0$ で

$$\left| \sum_{j=m}^n a_j x^j \right| < \epsilon \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを示せばよい. そこで, $m \geq n_0$ なる $m \in \mathbb{N}$ を任意に固定して

$$S_k := \sum_{j=m}^k a_j \quad (k \geq m)$$

と置くと, $|S_l| < \epsilon$ ($l \geq m$) が成り立つことになる. このとき

$$a_m = S_m, a_{m+1} = S_{m+1} - S_m, \dots, a_n = S_n - S_{n-1}$$

なることから, 任意の $n > m \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^n a_j x^j &= S_m x^m + (S_{m+1} - S_m) x^{m+1} + (S_{m+2} - S_{m+1}) x^{m+2} \\ &\quad + \dots + (S_{n-1} - S_{n-2}) x^{n-1} + (S_n - S_{n-1}) x^n \\ &= S_m (x^m - x^{m+1}) + S_{m+1} (x^{m+1} - x^{m+2}) \\ &\quad + \dots + S_{n-1} (x^{n-1} - x^n) + S_n x^n \end{aligned}$$

と変形できることに注意する. ここで, $x^j - x^{j+1} \geq 0$ ($0 \leq x \leq 1$) なので

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=m}^n a_j x^j \right| \\
& \leq |S_m|(x^m - x^{m+1}) + |S_{m+1}|(x^{m+1} - x^{m+2}) \\
& \quad + \cdots + |S_{n-1}|(x^{n-1} - x^n) + |S_n|x^n \\
& \leq \epsilon \left\{ (x^m - x^{m+1}) + (x^{m+1} - x^{m+2}) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + x^n \right\} \\
& = \epsilon x^n \leq \epsilon \quad (0 \leq x \leq 1)
\end{aligned}$$

を得る。以上より、主張が示されたことになる。

(2) まず演習 1 より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kt)$$

は $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ において収束する。よって、第 2 章の演習 2 とアーベルの定理から次を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kt) = -\frac{1}{2} \log(2-2\cos t) = -\frac{1}{2} \log\left(2^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = -\log\left(2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

付章 D

付章 D の問の解答

問 D.1. $x \neq 0$ で

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

であるが, $g(x) := \sin x$ に対して, ある $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$g(x) = \sin x = x - \frac{g'''(\theta x)}{3!} x^3 = x + \cos(\theta x) \frac{x^3}{6}$$

なので

$$|x - \sin x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

従って

$$\left| \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \frac{1}{|x \sin x|} \leq \frac{\pi}{12} |x| \leq \frac{\pi^2}{24} \quad (0 < |x| \leq \frac{\pi}{2})$$

を得る. ここで, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ ($0 < x \leq \frac{\pi}{2}$) なることを用いた.

問 D.2. まず仮定から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_N(x)| dx \leq \epsilon$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{irx} dx \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f_N(x)) e^{irx} dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{irx} dx \right| \\ &\leq \epsilon + \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{irx} dx \right| \end{aligned}$$

となる. また仮定より, ある $r_0 > 0$ が存在して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{irx} dx \right| \leq \epsilon \quad (|r| \geq r_0)$$

が成り立つ. よって, $|r| \geq r_0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{irx} dx \right| \leq 2\epsilon$$

となり, $\lim_{|r| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{irx} dx = 0$ が示された.