「多変数の微積分とベクトル解析」 神保秀一, 久保英夫著 問と演習問題の解答

本文中の各章の問および演習問題の解答例を述べる. 他の解法や証明法も試みることを奨めたい.

第 1 章の問と演習問題の解答

(問 1.1 の解答) 面積 S は 次の通り.

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)} = \frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$$

(問 1.2 の解答) $V = (1/6)|(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$. （問題 1.12, 問 1.3 も参照のこと）

(問 1.3 の解答) 具体的に成分表示して計算する. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ として, サラスの公式を適用する.

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

また，E の体積を V とすると命題 1.9 より

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right| = 9$$

(問 1.4 の解答) $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T A^T \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, A^T\boldsymbol{v})$.

(問 1.5 の解答) 定義から自明.

[演習問題の解答]

(問題 1.1 の解答) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{42}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{17}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -24$ となるので, $\cos\theta = -4\sqrt{6}/\sqrt{119}$, $\sin\theta = \sqrt{23}/\sqrt{119}$.

(問題 1.2 の解答) $P(2t+1, 3t, 4t-1)$, $Q(3s, 2s-1, s+2)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ と表せ, $\overrightarrow{PQ}$ と L_2 が直交することから $8t - 7s + 1 = 0$ が得られ, $\overrightarrow{PQ}$ と L_1 が直交することから $29t - 16s - 7 = 0$ が得られ $t = 13/15$, $s = 17/15$. これより

$P = (41/15, 39/15, 37/15)$, $Q = (51/15, 19/15, 47/15)$.

(問題 1.3 の解答) 直接計算で確かめられる．

(問題 1.4 の解答) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に注意すればよい．

(問題 1.5 の解答) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ にたいして $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_3 + c_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ を仮定する．各 $j = 1, 2, 3$ にたいして，上式と $\boldsymbol{e}_j$ との内積をとると $c_j = 0$ が得られるので， $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3$ は線形独立である．

(問題 1.6 の解答) $|\boldsymbol{c}(t)|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})t + |\boldsymbol{b}|^2$ なので，$|\boldsymbol{c}(t)|$ は $t = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}|^{-2}$ のとき最小となる．この場合を計算して $t = -3/14$. また，このとき $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}|^{-2}\boldsymbol{a}$ となるので, $\boldsymbol{c}(t)$ は $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ 方向へ射影したベクトルである．

(問題 1.7 の解答) 求める平面と球面との接点を $P = (p, q, r)$ とする．$\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ と直交するので, $p + q + r = 1$, $-2p + r = 1$ を得る。これらと $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ を連立して，$P = (0, 0, 1)$ または $P = (-2/7, 6/7, 3/7)$ を得る．よって，$\overrightarrow{OP}$ は求める平面の単位法線ベクトルであり, 平面は P を含むので求める平面は $z = 1$ および $2x - 6y - 3z + 7 = 0$ である．

(問題 1.8 の解答) 求める直線と H の交点を Q とすると $Q = (t - s, s, t - s)$ と表せる．$\overrightarrow{PQ}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するので, $2t - 2s - 3 = 0$, $-2t + 3s - 3 = 0$ を得る．これらを解いて $Q = (3/2, 6, 3/2)$ を得る．よって，求める直線は $\{(3, 6, 0) + t(-3/2, 0, 3/2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ であり，P から H までの最短距離は $|\overrightarrow{PQ}| = 3\sqrt{2}/2$ である．

(問題 1.9 の解答) 条件より，$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面 H と原点中心の単位球面との交わりの円周上を動く．よって，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$ が最大となるのは，$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{b}$ の H への射影と同じ向きにあるときである．即ち，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})|\boldsymbol{a}|^{-2}\boldsymbol{a}$ とすると，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}|^{-1}$ のとき，最大値 $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})|\boldsymbol{c}|^{-1}$ をとる．これを計算すると，最大値は $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|^{-1}$ と表せる．

(問題 1.10 の解答) $\boldsymbol{u}$ が満たす条件から $\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ を得る．仮定より $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は逆行列を持つので，$\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{0}$，即ち，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を得る．

(問題 1.11 の解答) Q の頂点を $(0, 0)$, (p, q), (r, s) とすると，$f(p, q) = (p \quad q)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $f(r, s) = (r \quad s)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ となるので，$\begin{pmatrix} f(p,q) \\ f(r,s) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ を得る．よって, $\mathrm{Area}(f(Q)) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} f(p,q) \\ f(r,s) \end{pmatrix}\right| = |ad-bc|\mathrm{Area}(Q)$.

(問題 1.12 の解答) まず，$\mathrm{Vol}(Q) = (1/6)|\det(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3)|$ を示す．$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が作る三角形の面積は $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|$ で与えられる．Q の高さは $\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ の方向に射影したベクトルの長さなので，$|(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)\, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 |\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|^{-2}|$ なので, $\mathrm{Vol}(Q) = (1/6)|(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)| = (1/6)|\det(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3)|$ を得る．一方, $f(Q) = \{tA^T\boldsymbol{a}_1 + sA^T\boldsymbol{a}_2 + rA^T\boldsymbol{a}_3 | t \geqq 0, s \geqq 0, r \geqq 0, s+t+r \leqq 1\}$ なので，$\mathrm{Vol}(f(Q)) = (1/6)|\det A^T \det(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3)|$ となり，示すべき式が得られる．

(問題 1.13 の解答) 求める面積は 4 点 $(0,0,\gamma)$, $(0,\eta,\beta\eta+\gamma)$, $(\xi,0,\alpha\xi+\gamma)$, $(\xi,\eta,\alpha\xi+\beta\eta+\gamma)$ で作られる平行四辺形の面積であるから，$|(0,\eta,\beta\eta)^T \times (\xi,0,\alpha\xi)^T| = |(\alpha\xi\eta, \beta\xi\eta, -\xi\eta)| = \xi\eta\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$.

第 2 章の問と演習問題の解答

(問 2.1 の解答) $A^\circ = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0, 1 < x_2^2 + x_3^2 < 2\}$, $\overline{A} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \geqq 0, 1 \leqq x_2^2 + x_3^2 \leqq 2\}$.

(問 2.2 の解答) 任意に $x \in B(z,s)$ をとり，$0 < \epsilon < s - |x-z|$ となる ϵ を選ぶ．すると任意の $y \in B(x,\epsilon)$ に対して三角不等式により $|y-z| < s$ が従うので，$B(x,\epsilon) \subset B(z,s)$ となり題意が成立する．

(問 2.3 の解答) 任意の $x \in A \cup D$ を取る．$x \in A$ または $x \in D$ となる．前者の場合は A が開集合だから, ある $\delta > 0$ があって $B(x,\delta) \subset A$ となる．よって, $B(x,\delta) \subset A \cup D$. 後者の場合は, D は開集合であるから, ある $\eta > 0$ があって $B(x,\eta) \subset D$ となり $B(x,\eta) \subset A \cup D$ となる．いずれにしても, x は $A \cup D$ の内点となる．任意の $x \in A \cap D$ を取る．$x \in A$ かつ $x \in D$ となる．A, D が開集合だから, ある $\delta > 0$, $\eta > 0$ があって $B(x,\delta) \subset A$ かつ, ある $\eta > 0$ があって $B(x,\eta) \subset D$ となる．よって $\rho = \min(\delta,\eta) > 0$ にたいし $B(x,\rho) \subset A \cap D$ となる．よって, x は $A \cap D$ の内点となる．

(問 2.4 の解答) $f(x) = x^2$ は一様連続でない．理由: $x = t + t^{-1}, y = t$ $(t > 0)$ とおくと $|x-y| = 1/t \to 0$ $(t \to \infty)$ であるが, $f(x) - f(y) = (t+t^{-1})^2 - t^2 = 2 + 1/t^2 \geqq 2$ であるため．

$g(x) = \sin x$ は一様連続. 理由: $|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| \leqq |x - y|$ により, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon$ とおくと, $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

$h(x) = \sin(x^2)$ は一様連続でない. 理由：$m \in \mathbb{N}$ に対して $x = (2m\pi + (\pi/2))^{1/2}$, $y = (2m\pi)^{1/2}$ とおくと, $|h(x) - h(y)| = 1$ であり

$$|x - y| = (2m\pi + (\pi/2))^{1/2} - (2m\pi)^{1/2}$$

$$= \frac{\pi/2}{(2m\pi + (\pi/2))^{1/2} + (2m\pi)^{1/2})} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

(問 2.5 の解答) 平均値の定理より $x, y \in I$ に対して $f(x) - f(y) = f'((1-\theta)x + \theta\, y)\,(x - y)$ が成立するので, 両辺の絶対値をとり $|f'(\xi)| \leqq M$ を用いれば良い.

(問 2.6 の解答) $t = x_1^2 + x_2^2$ が E で取る範囲は $[0, 2]$ で f は t の関数として $f(t) = t(1 - t)$ と書けるから $\max(f, E) = 1/4$, $\min(f, E) = 1$, $\mathrm{var}(f, E) = 5/4$.

(問 2.7 の解答) まず $\lim_{t\to 0}(\sin t)/t = 1$ より，ある $\delta > 0$ があって $(t/2) \leqq \sin t < 2t$ $(0 \leqq t < \delta)$. これより $|x| < \delta$ ならば $|\sin|x|\,| \leqq 2|x|$ となり結論 $f(x) = O(|x|)$ を得る.

$\lim_{t\to 0}(e^t - 1)/t = 1$ より，ある $\delta > 0$ が存在して $(t/2) \leqq e^t - 1 \leqq 2t$ $(0 \leqq t < \delta)$. $g(x) = (\exp(2|x|) - 1) - (\exp(|x|) - 1)$ より

$$-|x| = (2|x|)/2 - 2|x| \leqq g(x) \leqq 4|x| - |x|/2 = (7/2)|x| \quad (|x| < \delta)$$

これより $|g(x)| \leqq (7/2)|x|$ となる.

$t = \log|x|$ とおくと $|x| \to \infty$ のとき $t \to \infty$ となることに注意すると $(\log|x|)/|x| = t/e^t \to 0$ が言えて最後の結論が示される.

(問 2.8 の解答) $\nabla f = 2m(x_1^2 + x_2^2)^{m-1}(x_1, x_2)$, $\nabla g = (2/(x_1^2 + x_2^2))(x_1, x_2)$

(問 2.9 の解答) 曲面 M_1, M_2 上のそれぞれの接点を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ とすると, それぞれの接平面の方程式は

$$x_3 - \xi_3 = -2\xi_1(x_1 - \xi_1) - 2\xi_2(x_2 - \xi_2),$$

$$x_3 - \eta_3 = (-2\eta_1 - 2)(x_1 - \eta_1) - 2\eta_2(x_2 - \eta_2)$$

となる. この 2 つが一致する条件を考えると

$$-2\xi_1 = -2\eta_1 - 2, \quad -2\xi_2 = -2\eta_2,$$

$$\xi_3 + 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 = \eta_3 + (-2\eta_1 - 2)(-\eta_1) + 2\eta_2^2$$

$\xi \in M_1, \eta \in M_2$ より $\xi_3 = -\xi_1^2 - \xi_2^2 + 1, \eta_3 = -\eta_1^2 - 2\eta_1 - \eta_2^2 + 2$ を連立させて解くと $\xi = (1, 2, -4)$ または $\xi = (1, -2, -4)$ となりこれより平面は

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \quad \text{or} \quad 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$$

[演習問題の解答]

(問題 2.1 の解答) 省略.

(問題 2.2 の解答) (1) 条件 $P \in$ 右辺, を同値な条件に置き換えて示す．$P \in \overline{A^c}$ $\Leftrightarrow$ 『任意の $\epsilon > 0$ にたいし $B(P, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$』 $\Leftrightarrow$ 『任意の $\epsilon > 0$ にたいし $B(P, \epsilon) \not\subset A$』．この条件は,『ある $\delta > 0$ があって $B(P, \delta) \subset A$ 』の否定条件となる．すなわち $P \notin A^\circ$ となり $P \in (A^\circ)^c$ と同値になる．これは $(A^\circ)^c = \overline{(A^c)}$ を意味する．(2) $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c = \overline{A} \cap \overline{(A^c)}$. この式で A を A^c に置き換えて結論を得る．(3) $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$ は自明である．よって逆の包含を調べる．任意の $z \in A^\circ$ を取る．このとき, ある $\delta > 0$ が存在して $B(z, \delta) \subset A$ となる．今 $B(z, \delta/2)$ を考えると任意の $\xi \in B(z, \delta/2)$ について $B(\xi, \delta/3) \subset B(z, 5\delta/6) \subset A$ となり, $B(z, \delta/2) \subset A^\circ$ よって $z \in (A^\circ)^\circ$．(4) A^c に (1) と (3) を適用すれば良い.

(問題 2.3 の解答) $\nabla f(x) = 4(1 - |x|^2)x$

(問題 2.4 の解答) 曲面 M の定義関数 $F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 - 1$ にたいし $\nabla F(x) = (2x_1, 4x_2, -1)$ より $(1, 1, 2)$ における法線ベクトルは $(2, 4, -1)$ となり接平面の方程式は $2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 1) - (x_3 - 2) = 0$ から $2x_1 + 4x_2 - x_3 - 4 = 0$ となる.

(問題 2.5 の解答) $x, y \in \mathbb{R}^n$ をとる．任意の $z \in A$ にたいして,

$$|x - z| \leqq |x - y| + |y - z|$$

が成り立つ．z に関して下限を取り $\mathrm{dist}(x, A) \leqq |x - y| + \mathrm{dist}(y, A)$ となり,

$$\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A) \leqq |x - y|$$

x と y の役割を変えた式 $\mathrm{dist}(y, A) - \mathrm{dist}(x, A) \leqq |y - x|$ も成立する．これ

によって $\mathrm{dist}(x, A)$ はリプシッツ連続となり連続となる.

(問題 2.6 の解答) $x,\, y \in \mathbb{R}^2$ にたいして

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f((1-t)x + ty)\right) dt$$

$$= \int_0^1 ((y-x), (\nabla f)((1-t)x + ty))dt$$

シュワルツの不等式より，$|f(x) - f(y)| \leqq \int_0^1 |x-y||(\nabla f)((1-t)x+ty)|dt$ を得る．よって，仮定を用いると，$|f(x) - f(y)| \leqq L|x-y|$ が導かれる.

(問題 2.7 の解答) 具体的に計算して $1, x_1, x_2, x_3,\ x_1^2 - x_2^2, x_2^2 - x_3^2,\ x_1x_2,$ $x_1x_3,\ x_2x_3,\ x_1^3 - 3x_1x_2^2,\ x_1^3 - 3x_1x_3^2,\ x_2^3 - 3x_2x_1,\ x_2^3 - 3x_2x_3^2,\ x_3^3 - x_3x_1^2,$ $x_3^3 - x_3x_2^2,\ x_1x_2x_3$ およびこれらの線形結合すべてとなる．16 次元の空間をなす.

(問題 2.8 の解答) $F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{\alpha} + \frac{x_2^2}{\beta} + \frac{x_3^2}{\gamma} - 1$ とおくと，$\nabla F(x_1, x_2, x_3) = 2(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}, \frac{x_3}{\gamma})$ である．よって，S 上の点 (z_1, z_2, z_3) における接平面の方程式は，$(\nabla F(z_1, z_2, z_3), (x_1 - z_1, x_2 - z_2, x_3 - z_3)) = 0$ を計算して，$(z_1x_1/\alpha) + (z_2x_2/\beta) + (z_3x_3/\gamma) = 1$ である.

(問題 2.9 の解答) M_1, M_2, M_3 上の接点を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ とおく．それぞれの点における接平面の方程式は

$$2\xi_1(x_1 - \xi_1) + 2\xi_2(x_2 - \xi_2) + (-1)(x_3 - \xi_3) = 0,$$

$$(2\eta_1 + 2)(x_1 - \eta_1) + 2\eta_2(x_2 - \eta_2) + (-1)(x_3 - \eta_3) = 0.$$

$$2\zeta_1(x_1 - \zeta_1) + (2\zeta_2 - 4)(x_2 - \zeta_2) + (x_3 - \zeta_3) = 0$$

この 3 つが一致する条件を考える． 法線ベクトルが互いに定数倍となることから $(2\xi_1, 2\xi_2, -1) = \alpha(2\eta_1 + 2, 2\eta_2, -1) = \beta(2\zeta_1, 2\zeta_2 - 4, 1)$ だから $\alpha = 1, \beta = -1$ となる．これを代入して平面の一致条件として

$$-2\xi_1^2 - 2\xi_2^2 + \xi_3 = -2\eta_1^2 - 2\eta_1 - 2\eta_2^2 + \eta_3 = 2\zeta_1^2 + 2\zeta_2^2 - 4\zeta_2 + \zeta_3$$

を得る．そこで

$$\xi_3 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 3,\ \eta_3 = \eta_1^2 + 2\eta_1 + \eta_2^2,\ \zeta_3 = -\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 4\zeta_2 - 15$$

を代入して，この連立方程式を解くと，$\xi = (2, -1, 8)$, $\xi = (2, 3, 16)$ を得る.

よって，求める方程式は $4x_1-2x_2-x_3=2$, $4x_1+6x_2-x_3=10$ である．

(問題 2.10 の解答) まず, 十分大きな R を取ると $x_1^2+x_2^2 \geqq R^2$ のとき, $|f(x)|<e^{-1}$ とできることに注意する．次に $\partial_{x_1}f(x)=2x_1(1-(x_1^2-x_2^2))e^{-x_1^2-x_2^2}$, $\partial_{x_2}f(x)=-2x_2(1+(x_1^2-x_2^2))e^{-x_1^2-x_2^2}$ より, 停留点は $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ のみである．$x_1=x_2$ および $x_1=-x_2$ を境に $f(x)$ の符号が変化することに注意すると，$(0,0)$ では極値を取らないことがわかる．また，これらの直線に関する $f(x)$ の対称性から $\{(x_1,x_2)|-x_1<x_2<x_1\}$ での挙動を調べれば十分である． $f(x)$ のヘッセ行列 $H(x)$ について，$H(1,0)=\begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$ なので，$(1,0)$ において $f(x)$ は極大値 e^{-1} を取る．よって，$f(x)$ は $(0,1)$ において極小値 $-e^{-1}$, $(-1,0)$ において極大値 e^{-1}, $(0,-1)$ において極小値 $-e^{-1}$ を取ることがわかる．$f(x)$ が最大値，最小値を取るとすれば，$x_1^2+x_2^2 \leqq R^2$ に含まれる点で極大または極小をとるときに限るので，求める最大値は e^{-1}, 最小値は $-e^{-1}$ である．

(問題 2.11 の解答) k を実数パラメータとして $f(x)=k$ は平面を表す．その法線ベクトルは (α,β,γ) である．さて問題を言い換えるとこの平面と球面 $S: g(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ が交わるような k の最大値と最小値を求める問題となる．$|k|$ が大きいとき $f(x)=k$ と S は交わらない．よって，最大値または最小値を取るケースにおいてはこの平面が S に接していることになる．そのときの接点での S の法線ベクトルは平面の法線ベクトルにもなっていることに注意する．まず接点 $p=(p_1,p_2,p_3)$ における法線ベクトルは $\nabla g(p)=2(p_1,p_2,p_3)$ であるからこれは $s(\alpha,\beta,\gamma)$ となる．よって $p=(p_1,p_2,p_3)=(s/2)(\alpha,\beta,\gamma)$. 一方, p は S 上の点であるから

$$(s^2/4)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=1$$

この方程式を解くと $s=\pm 2/\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ であり, これに対応する接点を求めて $\pm 1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha,\beta,\gamma)$ を得る．それぞれにおいて決まる k を求めて最大値 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, 最小値 $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ を得る．

(問題 2.12 の解答) $x=(2/\sqrt{21},-6/\sqrt{21},1/\sqrt{21})$ において最大値 $\sqrt{21}$ を取る．

(問題 2.13 の解答) 実数 a を任意に固定する．$v(t)=u(a-t,t)$ とおくと，

条件から $v'(t) = 0 \ \ (t \in \mathbb{R})$, $v(0) = 0$ が成り立つ．従って, 全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して $v(t) = 0$ を得るので, 直線 $x_1 + x_2 = a$ 上で $u(x_1, x_2) = 0$. ここで，a は任意だったので u は恒等的に 0 である．

(問題 2.14 の解答) f は C^∞ 級なので $(0,0)$ でのテイラーの定理を適用する．$f(0,0) = 0$, $f_{x_1}(0,0) = 1$, $f_{x_2}(0,0) = 1$, $f_{x_1x_1}(0,0) = 2$, $f_{x_1x_2}(0,0) = 0$, $f_{x_2x_2}(0,0) = -2$ より

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3)$$

よって，$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1^2 - x_2^2$ と定めると良い.

(問題 2.15 の解答) マクローリン展開 $e^x = \sum_{\ell=0}^{\infty}(x^\ell/\ell!)$ により $t \geqq 0$ のとき $e^t \geqq t^\ell/\ell! \ \ (\ell \in \mathbb{N})$ である．これを $\ell = m+1$ として利用する．

$$\frac{\exp(-|x|^2)}{|x|^{(-m)}} = \frac{|x|^m}{\exp(|x|^2)} \leqq \frac{|x|^m}{|x|^{2\ell}/\ell!} = \ell!|x|^{m-2\ell} \to 0 \quad (x \to \infty).$$

(問題 2.16 の解答) まず G° が凸集合であることを示す．任意に $a, b \in G^\circ$ と $t \in [0,1]$ をとり固定する．このとき $B(a,\delta) \subset G$ かつ $B(b,\delta) \subset G$ となるような $\delta > 0$ がある．そこで，$c = (1-t)a + tb$ と定め $B(c,\delta) \subset G$ を導く．任意に $z \in B(c,\delta)$ をとると，$a + (z-c) \in B(a,\delta)$ かつ $b + (z-c) \in B(b,\delta)$ なので，G が凸集合であることから，$z = (1-t)(a+(z-c)) + t(b+(z-c)) \in G$ であることがわかる．結論が示された．次に $\overline{G}$ が凸集合であることを示す．任意に $a, b \in \overline{G}$ と $t \in [0,1]$ をとり固定する．$c = (1-t)a + tb$ と定め，任意の $\epsilon > 0$ にたいして $B(c,\epsilon) \cap G \neq \emptyset$ を導く．$a, b \in \overline{G}$ より，$x \in B(a,\epsilon) \cap G$ および $y \in B(b,\epsilon) \cap G$ をみたす x, y が存在する．ここで $z = (1-t)x + ty$ とおくと G が凸集合であることから，$z \in G$ であり，$|z-c| \leqq (1-t)|x-a| + t|y-b| < \epsilon$ から $z \in B(c,\epsilon)$ であることもわかる．結論が示された．

(問題 2.17 の解答) $d = \mathrm{dist}(z, M)$ とおく． まず $|z-p| = d$ となる $p \in M$ が存在することを示す．下限の定義から任意の $\epsilon > 0$ にたいして $d \leqq |z-x| < d + \epsilon$ となる $x \in M$ が存在する．よって任意の自然数 m にたいして $d \leqq |z - x(m)| < d + (1/m)$ となる $x(m) \in M$ が存在する．任意の自然数 m にたいして $|x(m)| \leqq |z - x(m)| + |z| < d + 1 + |z|$ が成り立つので $\{x(m)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の有界列である．ゆえにボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より $\{x(m)\}$ は収束する部分列 $\{x(m(j))\}$ をもつ．その極限

を p とすれば，$p \in \overline{M}$ であり M は閉集合なので $p \in M$ でもある．さらに $d \leqq |z-x(m(j))| < d+(1/m(j))$ において $j \to \infty$ とすれば $|z-p| = d$ を得る．次に一意性を示す．$|z-p| = |z-q| = d$ をみたす $p, q \in M$ が存在したとする．このとき，M は凸集合なので，任意の $t \in [0,1]$ にたいして $(1-t)p+tq \in M$ である．よって，$d \leqq |z-((1-t)p+tq)| \leqq (1-t)|z-p|+t|z-q| = d$ が成り立つので $|z-p+t(p-q)| = d$ を得る．両辺 2 乗して，整理すれば，任意の $t \in (0,1]$ にたいして $2((z-p),(p-q))+t|p-q|^2 = 0$ が導かれ t の任意性から $p = q$ を得る．

さらに $f(x) = ((z-p),(x-p))-d^2/2$ $(a_i = z_i-p_i, b = ((z-p),p)-d^2/2)$ とおくと，$f(z) > 0$ かつ任意の $y \in M$ にたいして $f(y) < 0$ が成り立つ．実際，$f(z) = |z-p|^2 - d^2/2 = d^2/2 > 0$ である．また，任意に $y \in M$ をとり，$0 < \epsilon < 1$ にたいして $y_\epsilon = (1-\epsilon)p+\epsilon y$ とおくと M は凸集合なので $y_\epsilon \in M$．よって d の定義より，任意の $0 < \epsilon < 1$ にたいして $d \leqq |z-y_\epsilon| = |z-p+\epsilon(p-y)|$ が成り立つ．両辺 2 乗して，整理すれば，$0 \leqq (2(z-p),(p-y))+\epsilon|p-y|^2$ が導かれる．よって $f(y) = ((z-p),(y-p))-d^2/2 \leqq (\epsilon|p-y|^2-d^2)/2$．ここで，$\epsilon > 0$ を $\epsilon|p-y|^2 < d^2$ となるように十分小さくとれば $f(y) < 0$ となる．

(問題 2.18 の解答) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の有界関数なので，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ にたいして $|f(x,y)| \leqq M$ をみたす実数 M が存在する．また，$\mathbb{R}$ 上の関数 $g(t) = t - f(\phi(t),\psi(t))$ を考えると, 仮定により $g(t)$ は連続である．ここで，$t > M$ ならば $g(t) > 0$ となり，$t < -M$ ならば $g(t) < 0$ となることに注意すると，中間値の定理より $g(t_0) = 0$ となる実数 t_0 が存在する．$t_0 = f(\phi(t_0),\psi(t_0))$ より，$(\phi(t_0),\psi(t_0),t_0) \in E \cap F$ が成り立つので E と F は共有点をもつ．

(問題 2.19 の解答) ∂D を定める関数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n^2}-1$ について，$\nabla F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 2(\frac{x_1}{a_1^2},\frac{x_2}{a_2^2},\cdots,\frac{x_n}{a_n^2})$ なので，$\nu(p) = (\frac{p_1}{a_1^2},\frac{p_2}{a_2^2},\cdots,\frac{p_n}{a_n^2})/\sqrt{\frac{p_1^2}{a_1^4}+\frac{p_2^2}{a_2^4}+\cdots+\frac{p_n^2}{a_n^4}}$ である．

(問題 2.20 の解答)

$$f(x) = f(t_0) + \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(t_0+\theta(t-t_0))d\theta$$

$$= f(t_0) + \int_0^1 f'(t_0 + \theta(t - t_0))d\theta\,(t - t_0)$$

となり $m = 1$ の時の剰余項は確かに $R_1(t_0, t)$ になる．一般の $m \in \mathbb{N}$ のときの剰余項が

$$R_m(t_0, t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{m-1}\frac{d^m f}{dx^m}(t_0 + \theta(t - t_0)d\theta\,(t - t_0)^m$$

とするとき, これを部分積分によって式変形して

$$R_m(t_0, t) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (-\frac{1}{m}(1-\theta)^m)'\frac{d^m f}{dx^m}(t_0 + \theta(t - t_0))d\theta\,(t - t_0)^m$$

$$= \left[\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (-\frac{1}{m}(1-\theta)^m)\frac{d^m f}{dx^m}(t_0 + \theta(t - t_0))d\theta\,(t - t_0)^m\right]_{\theta=0}^{\theta=1}$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (-\frac{1}{m}(1-\theta)^m)\frac{d^{m+1} f}{dx^{m+1}}(t_0 + \theta(t - t_0))\,(t - t_0)d\theta\,(t - t_0)^m$$

$$= \frac{1}{m!}\frac{d^m f}{dx^m}(t_0)\,(t - t_0)^m$$

$$+\frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\theta)^m\frac{d^{m+1} f}{dx^{m+1}}(t_0 + \theta(t - t_0))\,d\theta\,(t - t_0)^{m+1}$$

よって $m + 1$ のときにも成立する．これにより帰納法が完成して結論が示された．

(問題 2.21 の解答) まず，f が C^2 級なので $H(x)$ は D で連続であることに注意する． 任意に $x \in D$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ をとり固定する． D は開集合なので $\epsilon > 0$ を十分小さくとれば，$y := x + \epsilon\boldsymbol{u} \in D$ となるようにできる． $g(t) = (y - x, (\nabla f)((1-t)x + ty))$ $(t \in (0, 1))$ と定めると $g'(t) = (H((1-t)x + ty)(y - x), y - x) = \epsilon^2(H((1-t)x + ty)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ である．よって，$g(t)$ が単調増加関数であることを示せば，$(H((1-t)x + ty)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$ となり $t \to +0$ として証明が終わる．そのために，任意の $a, b \in D$ にたいして，$(b - a, \nabla f(a)) \leqq (b - a, \nabla f(b))$ が成り立つことを示す．$f(x)$ は凸関数なので，任意の $t \in (0, 1)$ にたいして，$f((1-t)a + tb) \leqq (1-t)f(a) + tf(b)$ が成り立つので

$$\frac{f(a + t(b - a)) - f(a)}{t} \leqq -\frac{f(b + (1-t)(a - b)) - f(b)}{1 - t}$$

を得る． ここで $t \to +0$ とすると，$\langle b-a, \nabla f(a)\rangle \leqq -f(a)+f(b)$ が導かれ $t \to 1-0$ とすると，$f(b)-f(a) \leqq -\langle a-b, \nabla f(b)\rangle$ が導かれる．よって，$\langle b-a, \nabla f(a)\rangle \leqq \langle b-a, \nabla f(b)\rangle$ が成り立つ． ここで $0<t<s<1$ にたいして $a=(1-t)x+ty$, $b=(1-s)x+sy$ とおくと，$(s-t)(y-x, \nabla f((1-t)x+ty)) \leqq (s-t)(y-x, \nabla f((1-s)x+sy))$ が導かれ，$s-t>0$ より $g(t)<g(s)$ を得て，$g(t)$ が単調増加関数であることがわかる．以上により題意は示された．

$\boxed{\text{補足}}$ この問題の逆の主張の逆も成り立つ．任意に x, $y \in D$, $t \in [0,1]$ をとり，固定する．$z=(1-t)x+ty \in D$ とおく．テイラーの定理より，

$$f(x)=f(z)+(\nabla f(z), x-z)+\frac{1}{2}(H((1-t_1)z+t_1x)(x-z), x-z),$$
$$f(y)=f(z)+(\nabla f(z), y-z)+\frac{1}{2}(H((1-t_2)z+t_2y)(y-z), y-z)$$

が成り立つような t_1, $t_2 \in (0,1)$ が存在する．ここで，任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ と $w \in D$ にたいして $(H(w)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$ となるので，

$$f(x) \geqq f(z)+(\nabla f(z), x-z), \quad f(y) \geqq f(z)+(\nabla f(z), y-z)$$

が従う．第一式に $1-t$ を掛け，第二式に t を掛けて，辺々加えると，

$$(1-t)f(x)+tf(y) \geqq f(z)+(\nabla f(z), (1-t)(x-z)+t(y-z))=f(z)$$

が導かれるので $f(x)$ は凸関数である．

(問題 2.22 の解答) $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して $f((1-t)x+ty) \leqq (1-t)f(x)+tf(y)$ を示す．任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $x_A \in A$, $y_A \in A$ があって

$$\mathrm{dist}(x,A) \leqq |x-x_A| < \mathrm{dist}(x,A)+\epsilon, \ \mathrm{dist}(y,A) \leqq |y-y_A| < \mathrm{dist}(y,A)+\epsilon$$

A の凸性から $(1-t)x_A+ty_A \in A$ であるから

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}((1-t)x+ty, A) \leqq |(1-t)x+ty-((1-t)x_A+ty_A)| \\
&\leqq (1-t)|x-x_A|+t|y-y_A| \leqq (1-t)(\mathrm{dist}(x,A)+\epsilon)+t(\mathrm{dist}(y,A)+\epsilon) \\
&=(1-t)f(x)+tf(y)+\epsilon
\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意であるから $\epsilon \downarrow 0$ として結論を得る.

(問題 2.23 の解答) まず, x_1 方向の偏微分を考える. h, k を実数として

$$f(x_1+h, x_2, \cdots, x_n) = f(x) + R_1(x,h)h,$$

$$R_1(x,h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + h\theta, x_2, \cdots, x_n)d\theta,$$

$$\phi(t+k) = \phi(t) + k\int_0^1 \phi'(t+ks)ds$$

が成り立つ. よって,

$$(\phi\circ f)(x_1+h, x_2, \cdots, x_n) - (\phi\circ f)(x) = \phi(f(x) + R_1(x,h)h) - \phi(f(x))$$

$$= R_1(x,h)h\int_0^1 \phi'(f(x) + R_1(x,h)hs)ds$$

が成り立つ. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ϕ' は連続であり, 積分区間は有限なので,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\phi\circ f)(x_1+h, x_2, \cdots, x_n) - (\phi\circ f)(x)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\int_0^1 \phi'(f(x))ds$$

と計算できるので, $\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi'(f(x))$ である. 同様にして $\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\phi'(f(x))$ と計算でき, その結果は連続関数なので, $(\phi\circ f)(x)$ は C^1 級である.

(問題 2.24 の解答) $x, y \in \mathbb{R}^n$ を任意の異なる 2 つの点であるとする. 今 $t > 1$ として $z = x + t(y-x)$ とおくと y は x, z の内分点であり $y = (1-(1/t))x + (1/t)z$ となるので f が凸関数であることを用いると

$$f(y) \leqq (1-(1/t))f(x) + (1/t)f(z)$$

となる z は t に依存することに注意する. f は有界関数なのである M が存在して $|f(\xi)| \leqq M$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$, すなわち t によらず $|f(z)| \leqq M$ となる. 不等式で $t \to \infty$ として不等式 $f(y) \leqq f(x)$ を得る. x, y は任意であったから f は定数関数となる.

(問題 2.25 の解) (1) $\overline{A} \subset \overline{A\cup D}$ および $\overline{D} \subset \overline{A\cup D}$ は自明であるので, 辺々

の和集合を考えて $\overline{A}\cup\overline{D}\subset\overline{A\cup D}$ を得る．逆の包含関係を示す．$z\notin\overline{A}\cup\overline{D}$ を仮定する．$z\notin\overline{A}$ かつ $z\notin\overline{D}$ であるからある $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ が存在して $B(z,\delta_1)\cap A=\emptyset$, $B(z,\delta_2)\cap D=\emptyset$ が成立する．よって $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ とおくと $\delta>0$ かつ $B(z,\delta)\cap(A\cup D)=\emptyset$ となり, $z\notin\overline{A\cup D}$ が従うので $(\overline{A}\cup\overline{D})^c\subset(\overline{A\cup D})^c$．よって，示された．(2) $\overline{A\cap D}\subset\overline{A}$, $\overline{A\cap D}\subset\overline{D}$ は自明であるから辺々の交わりをとって結論を得る．(3) $x\in A^\circ\cup D^\circ$ とすると，$x\in A^\circ$または $x\in D^\circ$．$x\in A^\circ$ のとき，$B(x,\delta)\subset A$ となる $\delta>0$ がある．このとき, $B(x,\delta)\subset A\cup D$ が成り立つので, $x\in(A\cup D)^\circ$．同様にして, $x\in D^\circ$ のときも $x\in(A\cup D)^\circ$ を得る．(4) $x\in(A\cap D)^\circ\Leftrightarrow B(x,\delta)\subset A\cap D$ となる $\delta>0$ がある $\Leftrightarrow B(x,\delta)\subset A$ かつ $B(x,\delta)\subset D$ となる $\delta>0$ がある $\Leftrightarrow$ $x\in A^\circ\cap D^\circ$.

問題 2.26 A が開集合であるとする．よって $A=A^\circ$ である．$\partial A\cap A^\circ=\emptyset$ は常に成立するので $A\cap\partial A=\emptyset$ となる． 逆に $A\cap\partial A=\emptyset$ とすると, $A\cap(\overline{A}\setminus A^\circ)=\emptyset$ であるから $\overline{A}\supset A$ を用いて $A\subset A^\circ$ となる． よって $A=A^\circ$ となる．

また，D が閉集合，つまり $\overline{D}=D$ であると仮定すると，$\partial D=\overline{D}\setminus D^\circ$ $=D\setminus D^\circ\subset D$ となる．逆に $\overline{D}\setminus D^\circ\subset D$ ならば, 両辺と D° との和をとって $\overline{D}\subset D$ となり $D=\overline{D}$ となる．

第 3 章の問と演習問題の解答

(問 3.1 の解答) T の要素を N 個として, 有界集合であるので, それを含む矩形集合 $K=[a,b]\times[c,d]$ を取る．その分割として

$$
\begin{aligned}
K(i,j)=&\left[a+(b-a)(\frac{i-1}{n}),a+(b-a)\frac{i}{n}\right]\\
&\times\left[c+(d-c)(\frac{j-1}{n}),c+(d-c)\frac{j}{n}\right]\quad(1\leqq i,j\leqq n)
\end{aligned}
$$

を取ってリーマン和を議論する．T の特性関数 $\chi_T(x,y)$ に対してリーマンの過剰和 $S^*(\chi_T,\mathit{\Delta})$ について $|\mathit{\Delta}|=\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}/n\to 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
0\leqq S^*(\chi_D,\mathit{\Delta})&=\sum_{1\leqq i,j\leqq n}\sup\{\chi_T(x,y)\mid(x,y)\in K(i,j)\}\mu(K(i,j))\\
&\leqq 4N(b-a)(d-c)/n^2\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

となり比較原理によりリーマン和は極限値 0 をもつので，$\mu(T)=0$.

(問 3.2 の解答)

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-3\leqq y\leqq 1-2x-x^2,\ -2\leqq x\leqq 1\}$$

と書き直して

$$S=\int_{-2}^{1}((1-2x-x^2)-(x^2-3))dx=9$$

(問 3.3 の解答) それぞれの特性関数について $\chi_E(x)\leqq\chi_F(x)$ なのでそれぞれの積分を定めるリーマン和を比較して極限を取れば良い.

(問 3.4 の解答) 置換積分の公式を適用する. $\xi=x-2y$, $\eta=x+2y$ の変換をすれば,

$$\det J=\det\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/4 & 1/4\end{pmatrix}=\frac{1}{4},\ x^2+y^2=\frac{5}{16}\xi^2+\frac{3}{8}\xi\eta+\frac{5}{16}\eta^2$$

積分する集合は矩形集合 $-1\leqq\xi\leqq 1$, $-1\leqq\eta\leqq 1$ になる.

$$A=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\frac{5}{16}\xi^2+\frac{3}{8}\xi\eta+\frac{5}{16}\eta^2)\frac{1}{4}\,d\xi d\eta=\frac{1}{64}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(5\xi^2+6\xi\eta+5\eta^2)d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{64}\int_{-1}^{1}[\frac{5}{3}\xi^3+3\xi^2\eta+5\eta^2\xi]_{\xi=-1}^{\xi=1}d\eta=\frac{1}{64}\int_{-1}^{1}(\frac{10}{3}+10\eta^2)d\eta=\frac{5}{24}$$

(問 3.5 の解答) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{1-(x-1)^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-(x-1)^2}\}$ の縦線形集合に表現して計算する.

$$A=\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}x\,dydx=\int_{0}^{2}2x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

$x=1+\sin\theta$ によって置換積分して $dx/d\theta=\cos\theta$ により次を得る.

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2(1+\sin\theta)\cos\theta\cos\theta\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2(\cos^2\theta+\sin\theta\cos^2\theta)d\theta=\pi$$

(問 3.6 の解答) $(1,2,3)$ の順列 (置換) は全部で 6 通りであるが, そのうちの任意の 1 つを σ とし

$$J(\sigma)=\{(x_1,x_2,x_3)\in I \mid x_{\sigma(1)}\leqq x_{\sigma(2)}\leqq x_{\sigma(3)}\}$$

とおくと, 対称性によりその体積は J のそれと一致する. σ のすべての選び方で $J(\sigma)$ の体積を合計すると I の体積に一致し $\mu^{(3)}(J)=\mu^{(3)}(I)/3!=1/6$.

(問 3.7 の解答) $\partial z/\partial x=\alpha$, $\partial z/\partial y=\beta$ を用いて公式に代入して次を得る.

$$S=\iint_{0\leqq y\leqq 1-x^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}dydx$$
$$=\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$$

(問 3.8) 計算省略.

[演習問題の解答]

(問題 3.1 の解答)

(1) $$I=\int_0^1\int_0^2(x_1+x_2)dx_2dx_1=\int_0^1\left([x_1x_2+(x_2^2/2)]_{x_2=0}^{x_2=2}\right)dx_1$$
$$=\int_0^1(2x_1+2)dx_1=[x_1^2+2x_1]_{x_1=0}^{x_1=1}=3$$

(2) $$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x_3\,dx_1dx_2dx_3=\int_0^1 x_3dx_3=[x_3^2/2]_0^1=1/2$$

(問題 3.2 の解答) 逐次積分によって計算する.

(1) $$I=\int_0^3(\int_0^{2-(2x_1/3)}(2x_1-x_2)dx_2)dx_1$$
$$=\int_0^3\left([2x_1x_2-(x_2^2/2)]_{x_2=0}^{x_2=2-(2x_1/3)}\right)dx_1$$
$$=\int_0^3(4x_1-(4x_1^2/3)-(2/9)(x_1-3)^2)dx_1=4$$

(2) $$I=\int_0^2\left(\iint_{x_1+x_2\leqq 4-2x_3,x_1\geqq 0,x_2\geqq 0}(x_1x_2x_3)dx_1dx_2\right)dx_3$$
$$=\int_0^2(\int_0^{4-2x_3}(\int_0^{4-2x_3-x_1}x_1x_2x_3\,dx_2)dx_1)dx_3$$

$$= \int_0^2 (\int_0^{4-2x_3} (x_1x_3/2)(4-2x_3-x_1)^2\, dx_1 dx_3$$

$$= \int_0^2 \frac{x_3}{2} (\int_0^{4-2x_3} x_1(x_1+2x_3-4)^2 dx_1) dx_3 =$$

$$\int_0^2 \frac{x_3}{2} \{ \left[\frac{x_1}{3}(x_1+2x_3-4)^3 \right]_{x_1=0}^{x_1=4-2x_3} - \int_0^{4-2x_3} \frac{1}{3}(x_1+2x_3-4)^3 dx_1 \} dx_3$$

$$= \int_0^2 \frac{x_3}{2} [\frac{-1}{12}(x_1+2x_3-4)^4]_{x_1=0}^{x_1=4-2x_3} dx_3 = \frac{1}{24}\int_0^2 x_3(2x_3-4)^4 dx_3 = \frac{64}{45}$$

(問題 3.3 の解答) 逐次積分の公式を用いて次の計算をする.

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x_3} \int_0^{1-x_3-x_2} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_3} \left[\frac{x_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} x_2^\beta x_3^\gamma \right]_{x_1=0}^{x_1=1-x_3-x_2} dx_2 dx_3 =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_3} \frac{(1-x_2-x_3)^{\alpha+1}}{\alpha+1} x_2^\beta x_3^\gamma dx_2 dx_3 \ \ ((1-x_3)z = x_2 \text{ による置換積分})$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(1-x_3)^{\alpha+1}(1-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1} (1-x_3)^\beta z^\beta x_3^\gamma (1-x_3) dz \right) dx_3$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha+1} z^\beta dz \int_0^1 (1-x_3)^{\alpha+\beta+2} x_3^\gamma dx_3$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \boldsymbol{B}(\alpha+2, \beta+1) \boldsymbol{B}(\gamma+1, \alpha+\beta+3) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+4)}$$

(問題 3.4 の解答) (1) 置換積分を行う. $y_1 = x_1 + 3x_2$, $y_2 = 3x_1 - x_2$ としてヤコビ行列を求める. $x_1 = (y_1 + 3y_2)/10$, $x_2 = (3y_1 - y_2)/10$ により

$$J(y) = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & -1/10 \end{pmatrix}, \quad \det J(y) = -\frac{1}{10}$$

$E = [-3, 3] \times [-2, 2]$ として積分を書き直して

$$I = \iint_E \exp(\frac{y_1 + 3y_2}{10}) |(\frac{-1}{10})| dy_1 dy_2$$

$$= \frac{1}{10} \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \exp(\frac{y_1}{10}) \exp(\frac{3y_2}{10}) dy_1 dy_2$$

$$= \frac{10}{3}(\exp(\frac{3}{10}) - \exp(\frac{-3}{10}))(\exp(\frac{3}{5}) - \exp(-\frac{3}{5}))$$

(2) 縦線形集合上の逐次積分の公式を適用する.

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{x_1^2} x_2 dx_2 dx_1 = \int_{-2}^{2}[x_2^2/2]_{x_2=0}^{x_1^2} dx_1 = \int_{-2}^{2} x_1^4/2 dx_1 = \frac{32}{5}$$

(問題 3.5 の解答) 置換積分 $y_1 = -2x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_3 = x_2 - 2x_3$ を行う.

$$\det J(y) = \det(\frac{\partial x}{\partial y}) = (\det\frac{\partial y}{\partial x})^{-1} = (\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix})^{-1} = -\frac{1}{4}$$

より D の体積は 2 である. また

$$x_1 = -\frac{3y_1}{4} - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}$$

なので,

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1 - \frac{3y_1}{4} - \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{4}) \mid -\frac{1}{4}|dy_1 dy_2 dy_3 = 2$$

(問題 3.6 の解答) (1) T の $x_3 = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ における断面は楕円 $x^2/t^2 + y^2/(2t^2) \leqq 1$ である. その面積は $\sqrt{2}\pi t^2$ なので T の体積は $\int_0^1 \sqrt{2}\pi t^2 dt = \sqrt{2}\pi/3$ である. (2) T の $x_3 = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ での断面は

$$\Sigma(t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1,\ x_1^2 \leqq 1 - t^2,\ x_2^2 \leqq 1 - t^2\}$$

であり. $t = 1/\sqrt{2}$ を境にこの図形の形が変わることに注意して,

$$\mathrm{Area}(\Sigma(t)) = \begin{cases} 4(1-t^2) & (1/\sqrt{2} \leqq t \leqq 1) \\ 4t\sqrt{1-t^2} + 4 \times (1/2)\theta(t) & (0 \leqq t \leqq 1/\sqrt{2}) \end{cases}$$

ここで $\theta = \theta(t) = (\pi/2) - 2\mathrm{Arcsin}(t)$ である. よって体積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(T) = \int_0^{1/\sqrt{2}} (4t\sqrt{1-t^2} + 2\theta)dt + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 4(1-t^2)dt.$$

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} 4(1-t^2)dt = 4[t - \frac{t^3}{3}]_{1/\sqrt{2}}^{1} = 4(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}) = \frac{8}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{3},$$

$$\int_{0}^{1/\sqrt{2}} 4t\sqrt{1-t^2}dt = [(-4/3)(1-t^2)^{3/2}]_0^{1/\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} 2\theta\, dt = 2\int_{\pi/2}^{0} \theta(dt/d\theta)\, d\theta = 2\int_{\pi/2}^{0} \theta(-\frac{1}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \theta\ \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})d\theta = [\theta\, 2\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})]_0^{\pi/2}$$
$$- \int_0^{\pi/2} 2\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})d\theta = 4 - 2\sqrt{2}.$$

これらを合計して $\mathrm{Vol}(T) = 2(8-4\sqrt{2})$.

(問題 3.7 の解答) 切断面の方法で計算して $\mu^{(3)}(T) = 32/15$.

(問題 3.8 の解答) D_1 の n 次元測度が $a^n/n!$ であることを数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき成立する．ある n にたいして成立するとして

$$\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geqq 0\,(1 \leqq i \leqq n+1), x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} \leqq a\}$$

の $(n+1)$ 次元測度が $a^{n+1}/(n+1)!$ であることを示す．この図形の $x_{n+1} = t$ ($0 \leqq t \leqq a$) における断面は

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqq 0\,(1 \leqq i \leqq n), x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq a - t\}$$

なので，帰納法の仮定より，求める $(n+1)$ 次元測度は $\int_0^a (a-t)^n/n! dt = a^{n+1}/(n+1)!$ となり示された.

D_2 の n 次元測度が $a^n/n!$ であることを数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らか．ある n にたいして成り立つとして，$\{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n+1} \leqq a\}$ の $(n+1)$ 次元測度が $a^{n+1}/(n+1)!$ であることを示す．この図形の $x_{n+1} = t$ $(0 \leqq t \leqq a)$ における断面は $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq t\}$ なので，帰納法の仮定より，求める $(n+1)$ 次元測度は $\int_0^a t^n/n! dt = a^{n+1}/(n+1)!$ となり示された.

(問題 3.9 の解答)

$$\frac{dx_1}{d\theta} = (1+\frac{1}{n})(\sin(n+1)\theta - \sin\theta),\ \frac{dx_2}{d\theta} = (1+\frac{1}{n})(\cos\theta - \cos(n+1)\theta)$$

より C の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx_1}{d\theta})^2+(\frac{dx_2}{d\theta})^2}\,d\theta=\sqrt{2}(1+\frac{1}{n})\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos n\theta}\,d\theta$$
$$=2(1+\frac{1}{n})\int_0^{2\pi}|\sin(n\theta/2)|\,d\theta=8(1+\frac{1}{n})$$

(問題 3.10 の解答) M は $z=e^t$ を z 軸の周りに回転してできる曲面なので p106 の計算例により

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_0^2 e^t\sqrt{1+e^{2t}}dt\\&=2\pi\int_1^{e^2}\sqrt{1+\tau^2}d\tau=\pi[\tau(1+\tau^2)^{1/2}+\log(\tau+\sqrt{1+\tau^2})]_1^{e^2}\\&=\pi(e^2\sqrt{1+e^4}+\log(e^2+\sqrt{1+e^4})-\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2}))\end{aligned}$$

上の計算で $e^t=\tau$ によって置換積分を行った.

(問題 3.11 の解答) 定理 3.16 を用いる. $\partial z/\partial x=x$, $\partial z/\partial y=y$ より

$$\begin{aligned}S&=\iint_{B(2)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_{B(2)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}\,dr\\&=2\pi[(1/3)(1+r^2)^{3/2}]_0^2=(2\pi/3)(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

(問題 3.12 の解答) 定理 3.16 を用いる. $z=(1-(x^2/4)-(y^2/4))^{1/2}$ より

$$\partial z/\partial x=(-x/4)(1-(x^2/4)-(y^2/4))^{-1/2},$$
$$\partial z/\partial y=(-y/4)(1-(x^2/4)-(y^2/4))^{-1/2}.$$

よって，求める S は

$$\iint_{B(\sqrt{3})}\left(1+\frac{x^2/16}{1-(x^2/4)-(y^2/4)}+\frac{y^2/16}{1-(x^2/4)-(y^2/4)}\right)^{1/2}dxdy$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1-(3r^2/16)}{1-(r^2/4)}\right)^{1/2}r\,dr=\pi\int_0^3\left(\frac{1-(3\tau/16)}{1-(\tau/4)}\right)^{1/2}d\tau$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^3\left(\frac{16-3\tau}{4-\tau}\right)^{1/2}d\tau$$

$$= \pi \left(4 - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \right)$$

(問題 3.13 の解答) $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ は有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の C^1 級関数なので, ある $L > 0$ が存在して

$$|\phi_1(t) - \phi_1(s)| \leqq L|t-s|, \quad |\phi_2(t) - \phi_2(s)| \leqq L|t-s| \quad (\alpha \leqq t, s \leqq \beta)$$

となる. 区間 $[\alpha, \beta]$ を n 等分して分点を $t_k^{(n)} = \alpha + (\beta - \alpha)(k/n)$ とおく. 各 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対して C 上の点で $P(k) = (\phi_1(t^{(n)}(k)), \phi_2(t^{(n)}(k)))$ を中心として半径 $\sqrt{2}L(\beta - \alpha)/n$ の円板 $D^{(n)}(k)$ を取ると ϕ_1, ϕ_2 の性質より

$$C \subset D^{(n)}(0) \cup D^{(n)}(1) \cup D^{(n)}(2) \cup D^{(n)}(3) \cup \cdots \cup D^{(n)}(n)$$

であり $\mu(D^{(n)}(k)) = 2\pi L^2(\beta - \alpha)^2/n^2$ であるので

$$0 \leqq \mu(C) \leqq 2\pi L^2(\beta-\alpha)^2/n^2 \times n = 2\pi L^2(\beta-\alpha)^2/n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(問題 3.14 の解答) 考える集合 D は 3 次元単位球体を平面 $H : x_1+x_2+x_3 = 1$ によって切断して小さい方の部分に相当するので

$$\begin{aligned} \mu^{(3)}(D) &= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \pi(1-t^2)dt = \pi[t - (t^3/3)]_{1/\sqrt{3}}^{1} \\ &= \pi(1 - (1/3) - (1/\sqrt{3}) + (1/9\sqrt{3})) = \pi(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}) \end{aligned}$$

(問題 3.15 の解答) D の $x_n = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ における断面は

$$\Sigma(t) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ \mid \ |x'| \leqq t\}$$

これは $\mathbb{R}^{n-1}$ 内にある半径 t の球である. その $(n-1)$ 次元測度は $\pi^{(n-1)/2}t^{n-1}/\Gamma((n-1)/2+1)$ であるから, これを $[0,1]$ 上で t について積分して, D の n 次元測度は $\pi^{(n-1)/2}/n\Gamma((n+1)/2)$.

(問題 3.16 の解答) 合成関数の微分の公式より示される.

(問題 3.17 の解答) 極座標 $x_1 = \sin\theta\cos\phi$, $x_2 = \sin\theta\sin\phi$,$x_3 = \cos\theta$ を用いて球面を表す. 但し $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \phi < 2\pi$ である. これによって

$$\varphi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(\theta,\phi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}, \quad |\gamma(\theta,\phi)| = \sin\theta$$

となるので面積要素がわかり $dS = \sin\theta d\theta d\phi$ となる.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha_1(\sin\theta\cos\phi)^2 + \alpha_2(\sin\theta\sin\phi)^2 + \alpha_3\cos^2\theta)\sin\theta\, d\phi d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \end{aligned}$$

(問題 3.18 の解答) 問題 3.16 において $\Psi\circ\Phi$ が恒等写像の場合に相当する.
(問題 3.19 の解答) 変数変換 $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $x_3 = z$ によって置換積分を行う.

$$G = \{(r,z)\in\mathbb{R}^2 \mid (r-3)^2/4 + z^2 \leqq 1\}$$

とおき, ヤコビアンを求めて $dx_1dx_2dx_3 = r\,dr\,dz\,d\theta$ となる.

$$\begin{aligned} \mu^{(3)}(D) &= \iiint_{G\times[0,2\pi]} 1\times r\,dr\,dz\,d\theta = 2\pi\iint_G r\,drdz \\ &= 2\pi\int_1^5 \int_{-\sqrt{1-(1/4)(r-3)^2}}^{\sqrt{1-(1/4)(r-3)^2}} r\,dz\,dr = 2\pi\int_1^5 2r\sqrt{1-(1/4)(r-3)^2}\,dr \\ &= 4\pi\int_{-1}^{1}(2s+3)\sqrt{1-s^2}\,2\,ds = 12\pi^2 \ \ ((r-3)/2 = s \text{ による置換積分}) \end{aligned}$$

(問題 3.20 の解答) M をパラメータで表現する. $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$, $r-3=\cos\theta$, $x_3 = \sin\theta$ として表現する. これより

$$\varphi_1(\theta,\phi) = (3+\cos\theta)\cos\phi,\ \varphi_2(\theta,\phi) = (3+\cos\theta)\sin\phi,\ \varphi_3(\theta,\phi) = \sin\theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -(3+\cos\theta)\sin\phi \\ (3+\cos\theta)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(\theta,\phi)=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\times\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}=\begin{pmatrix}-\cos\theta(3+\cos\theta)\cos\phi\\ -\cos\theta(3+\cos\theta)\sin\phi\\ -\sin\theta(3+\cos\theta)\end{pmatrix}.$$

$|\gamma(\theta,\phi)|=3+\cos\theta$ を用いて命題 3.18 に当てはめて次を得る.

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(3+\cos\theta)d\theta d\phi=12\pi^2$$

(問題 3.21 の解答) 変数変換 $(x_1/a)^\alpha=y_1$, $(x_2/b)^\beta=y_2$, $(x_3/c)^\gamma=y_3$ を用いて I を書き換えると

$$\iiint_E (ay_1^{(1/\alpha)})^k(by_2^{(1/\beta)})^\ell(cy_3^{(1/\gamma)})^m\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}y_1^{\frac{1}{\alpha}-1}y_2^{\frac{1}{\beta}-1}y_3^{\frac{1}{\gamma}-1}dy_1dy_2dy_3$$

$$=\frac{a^{k+1}b^{\ell+1}c^{m+1}}{\alpha\beta\gamma}\iiint_E y_1^{\frac{k+1}{\alpha}-1}y_2^{\frac{\ell+1}{\beta}-1}y_3^{\frac{m+1}{\gamma}-1}dy_1dy_2dy_3$$

ここで $E=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3\mid y_1\geqq 0,y_2\geqq 0,y_3\geqq 0,y_1+y_2+y_3\leqq 1\}$ である. 問題 3.3 の結果を用いて次を得る.

$$I=\frac{a^{k+1}b^{\ell+1}c^{m+1}}{\alpha\beta\gamma}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{\alpha})\Gamma(\frac{\ell+1}{\beta})\Gamma(\frac{m+1}{\gamma})}{\Gamma(\frac{k+1}{\alpha}+\frac{\ell+1}{\beta}+\frac{m+1}{\gamma}+1)}$$

第 4 章の問と演習問題の解答

(問 4.1 の解答) ベクトル場 $X=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ (j 成分が 1 で他が 0) としてガウス・グリーンの定理を適用すれば良い.

(問 4.2 の解答) 関数

$$\Phi(x)=\int_0^1\sum_{j=1}^n\chi_j(z+t(x-z))\,(x_j-z_j)dt$$

を定めると, これがスカラーポテンシャルであること, 即ち $\partial\Phi(x)/\partial x_i=\chi_i(x)$ を直接計算で示すことができる.

(問 4.3 の解答) χ に対するベクトルポテンシャル A が存在すると仮定する. 式 $\operatorname{rot}A=\chi$ の両辺と χ と内積を考えて $(\operatorname{rot}A,\chi)=|\chi|^2$ を D で積分する. 命題 4.5 を適用する.

$$\iiint_D |\chi|^2 dx = \iiint_D (\mathrm{rot}\, A, \chi) dx = \iint_{\partial D} (\nu \times A, \chi) dS + \iiint_D (A, \mathrm{rot}\, \chi) dx$$

さて計算により $\mathrm{rot}\, \chi = 0$ $(x \in D)$ を示せる．また

$$(\nu \times A, \chi) = (\chi \times \nu, A) = 0 \quad (x \in \partial D)$$

もわかる．よって $\iiint_D |\chi|^2 dx$ が 0 になり $|\chi|^2 = 1/|x|^4$ に矛盾．

[演習問題の解答]

(問題 4.1 の解答) C は $\phi(t) = (\cos(3t), \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と表現されるので $\phi'(t) = (-3\sin(3t), \cos t)$ となり

$$X(\phi(t)) = \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} - \cos(3t), \frac{1+\cos(6t)}{2} + \sin t \right)$$

であるので

$$\int_C X \cdot d\boldsymbol{\tau} = \int_0^{2\pi} (X(\phi(t)), \phi'(t)) dt$$

を計算してゼロとなる．その際に $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0$$

を用いた．

(問題 4.2 の解答) 右辺の被積分関数を

$$(\nabla\varphi, \mathrm{rot} X) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial X_1}{\partial x_2}) + (\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_3})$$
$$+ (\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial X_3}{\partial x_1})$$

のように書き下し，ガウス・グリーンの定理とシュワルツの定理を用いると

$$\iiint_D (\nabla\varphi, \mathrm{rot} X) dx = \iint_{\partial D} \Bigg(\nu_2(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}X_3 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}X_1) + \nu_3(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}X_2)$$
$$+ \nu_1(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}X_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_3) \Bigg) dS = \iint_{\partial D} (\nu, X \times \nabla\varphi) dS$$

を得る.

(問題 4.3 の解答) C のパラメータ表示を $x=\phi(t)$ $(t\in[a,b])$ とする. ただし, $\phi(a)=\phi(b)$ を仮定する. このとき,

$$\int_C \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{\tau}=\int_a^b((\nabla\Phi)(\phi(t)),\frac{d\phi}{dt})dt=\int_a^b\frac{d}{dt}(\Phi(\phi(t)))dt$$
$$=[\Phi(\phi(t))]_{t=a}^{t=b}=\Phi(\phi(b))-\Phi(\phi(a))=0$$

(問題 4.4 の解答) ベクトル場 ζX に対してストークスの定理 (定理 4.11) を適用する.

$$\iint_M(\mathrm{rot}(\zeta\, X),\nu)dS=\int_C(\zeta\, X)\cdot d\boldsymbol{\tau}$$

ここで, 計算により得られる等式 $\mathrm{rot}(\zeta\, X)=\zeta\mathrm{rot}(X)+\nabla\zeta\times X$ を左辺に用いることで結論を得る.

(問題 4.5 の解答) 示すべき式の左辺はガウス・グリーンの定理より

$$\iiint_D\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_3})+\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}-\frac{\partial X_3}{\partial x_1})+\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x_2})\right)dx$$

と変形できるので, シュワルツの定理よりこの値は 0.

(問題 4.6 の解答) 行列 $U(s)$ の列ベクトル表示を $U(s)=(U_1(s),U_2(s),\cdots,U_n(s))$ とする. 行列式の多重線形性を用いる.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\{\mathrm{det}U(s)-\mathrm{det}U(0)\}\\
=&\frac{1}{s}\left(\det(U_1(s),U_2(s),\cdots,U_n(s))-\det(U_1(0),U_2(0),\cdots,U_n(0))\right)\\
=&\det\left(\frac{U_1(s)-U_1(0)}{s},U_2(s),\cdots,U_n(s)\right)\\
&+\det\left(U_1(0),\frac{U_2(s)-U_2(0)}{s},U_3(s),\cdots,U_n(s)\right)\\
&+\cdots+\det\left(U_1(0),U_2(0),\cdots,U_{n-1}(0),\frac{U_n(s)-U_n(0)}{s}\right)\\
\to&\sum_{j=1}^n\det(U_1(0),\cdots,U_{j-1}(0),U_j'(0),U_{j+1}(0),\cdots,U_n(0))\quad(s\to 0)
\end{aligned}$$

となり, $U(0)=I$ を用いて $(d/ds)(\mathrm{det}U(s))_{|s=0}=\sum_{j=1}^n U_{jj}'(0)$ を得る. 但

し，$U_{jj}(s)$ は $U_j(s)$ の第 j 成分である．

(問題 4.7 の解答) $x \in \mathbb{R}^2$ を任意に取り $R > 0$ を $B(x,R) \supset \mathrm{supp}(\varphi)$ となるように大きく取る．ここで $\epsilon \in (0,R)$ をとり $D(\epsilon) = \overline{B(x,R)} \setminus B(x,\epsilon)$ において, ガウス・グリーン定理に続く定理（命題 4.4）を関数 $\psi(y) = \log \frac{1}{|x-y|}$ にたいして適用する．

$$\iint_{D(\epsilon)} \left(\log \frac{1}{|x-y|}\right) \Delta_y \varphi(y) dy - \iint_{D(\epsilon)} \Delta_y \left(\log \frac{1}{|x-y|}\right) \varphi(y) dy$$

$$= \int_{\partial D(\epsilon)} \left(\left(\log \frac{1}{|x-y|}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_y} - \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x-y|}\right) \varphi(y)\right) dS$$

ここで, $\Delta_y \varphi(y) = \partial^2\varphi/\partial y_1^2 + \partial^2\varphi/\partial y_2^2$, $\partial\varphi/\partial\nu = \nu_1(y)\partial\varphi/\partial y_1 + \nu_2(y)\partial\varphi/\partial y_2$ である．$\epsilon \to 0$ として極限を取ることで結論を得る．この議論は命題 4.6 の証明とほぼ同じである．

(問題 4.8 の解答)　仮定より

$$0 = \int_D u \Delta u \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_D |\nabla u|^2 dx$$

となり, さらに $u(x) = 0$ $(x \in \partial D)$ を用いることで $\nabla u(x) \equiv \mathbf{0}$ が従い, u は定数関数となり境界でゼロだから結論を得る．

第 5 章の演習問題の解答

(問題 5.1 の解答) A.7 節の結果を利用する．

$$Q(x) = 4\pi \begin{cases} -(\sigma G/3)(s_2^3 - s_1^3)/|x| & (|x| > s_2) \\ (\sigma G/6)(|x|^2 + (2s_1^3/|x|) - 3s_2^2) & (s_1 \leqq |x| \leqq s_2) \\ (-\sigma G/2)(s_2^2 - s_1^2) & (|x| < s_1) \end{cases}$$

(問題 5.2 の解答) オイラー方程式を用いて以下の計算をする．

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_\Omega |u(t,x)|^2 dx = 2 \iiint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial t}, u(t,x)) dx$$

$$= 2 \iiint_\Omega (-(u \cdot \nabla) u - \nabla p, u) dx$$

この積分値がゼロになることを計算によって確認する．ガウス・グリーンの定

理を用いてこれを変形する.

$$\iiint_\Omega ((u\cdot\nabla)u,u)dx = \iiint_\Omega \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_i dx = \sum_{i,j=1}^3 \iiint_\Omega \frac{1}{2}u_j\frac{\partial(u_i^2)}{\partial x_j}dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^3 \iint_{\partial\Omega}\frac{1}{2}u_j\nu_j(u_i)^2dS - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3\iiint_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(u_i)^2dx$$
$$= \iint_{\partial\Omega}\frac{1}{2}(u(t,x),\nu(x))|u|^2dx - \frac{1}{2}\iiint_\Omega(\operatorname{div} u(t,x))|u|^2dx.$$

$\operatorname{div} u(t,x)=0$ $(x\in\Omega)$, $(u(t,x),\nu)=0$ $(x\in\partial\Omega)$ によってこの積分値は 0 となる. 一方, 次の積分

$$\iiint_\Omega (u(t,x),\nabla p(t,x))dx = \iint_{\partial\Omega}(u(t,x),\nu)p(t,x)dS - \iiint_\Omega \operatorname{div} u(t,x)p dx$$

も同じ理由で 0 となる. 以上を合わせて $\iiint_\Omega |u(t,x)|^2dx$ は t に依存しないことがわかる.

(問題 5.3 の解答) 関係式 $v(t,x)=\exp(\alpha t+(b,x))u(t,x)$ によって方程式を v の式に書き換える. $\partial u/\partial t$, ∇u を v を用いて表す.

$$\nabla u = \exp(-\alpha t-(b,x))\,(-bv+\nabla v),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \exp(-\alpha t-(b,x))\,(-\alpha v+\frac{\partial v}{\partial t}),$$
$$\Delta u = \exp(-\alpha t-(b,x))\,(|b|^2v-2(b,\nabla v)+\Delta v).$$

これを u の方程式に代入すると

$$-\alpha v+\frac{\partial v}{\partial t} = |b|^2v-2(b,\nabla v)+\Delta v-(-bv+\nabla v,a).$$

よって $-\alpha=|b|^2+(a,b)$, $-2b-a=0$ すなわち $\alpha=|a|^2/4$, $b=(-a/2)$ とすれば v の方程式は $\partial v/\partial t=\Delta v$ となる. よって基本解を用いて

$$v(t,x)=\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right)v(0,y)dy.$$

よって, 変数を元に戻して

$$u(t,x)=\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}-\frac{|a|^2t}{4}+\frac{1}{2}(a,x-y)\right)\varphi(y)dy.$$