

「エレクトロニクス入門」柴田直著（数理工学社）問題解答

2021年6月11日

<問題 1.1>

論理積はスイッチの直列接続, 論理和は並列接続で表現できるので, これらを複合して一つの負荷抵抗につなぐことで $\overline{A \cdot B + C}$ が構成できる. これを反転することで $D = A \cdot B + C$ が得られる. 回路図を図 1.P1 (後ろに掲載) に示す.

<問題 1.2>

NMOS 側がオンの時は PMOS 側がオフ, 逆に NMOS 側がオフの時は PMOS 側がオンとなるようにするには, NMOS 側と PMOS 側で直列と並列を入れ替えればよい. 回路図を図 1.P2 (後ろに掲載) に示す.

<問題 1.3>

NMOS 側と PMOS 側で直列と並列の関係を入れ替えると, 図 1.P3 (後ろに掲載) の回路が得られる.

<問題 3.1>

電子の数は, 電子がとることのできる状態の数 \times 占有率 ($f(E)$) で与えられる. 不純物レベルの状態数は N_D に等しいが, これに比べて伝導体の電子の状態数はずっと大きな値を持つ. このことを考えると矛盾はない. 伝導体の電子の実効状態密度は $N_C = 2.8 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$ であり, 典型的な N_D の値 $10^{14} \sim 10^{16} \text{cm}^{-3}$ に比べると十分に大きい (参考文献 3, P.58 を参照).

<問題 3.2>

式(3.2)~(3.5)を用いると直ちに求まる. N 型 Si では, $n_{n0} = 10^{18} / \text{cm}^2, p_{n0} = 10^2 / \text{cm}^2$. P 型 Si では, $p_{p0} = 10^{15} / \text{cm}^2, n_{p0} = 10^5 / \text{cm}^2$ である.

<問題 3.3>

(3.9)式より, ϕ_D は約 0.78V となる.

<問題 3.4>

図 3.13 に描かれている導線の金属材料と N 型, P 型シリコンの間にも, そのフェルミレベルの差による電位差が生じており, これらが PN 接合間の内蔵電位を相殺するため導線の端子間の電位差は正確にゼロとなっている. 従って, 抵抗に電流は流れない (詳しい内容を

知りたい読者は、参考文献3の第6章と、問題4及びその解答を参照のこと。内蔵電位の存在を実験的に検証する方法については、是非自由な発想で考え出してほしい。ヒントを言うと、図3.13では導線で引き出したためその導線間の電位差はゼロになったが、もし熱平衡状態にあるN型とP型を直接対向させてやれば、その間には電位差があるため電界が生じるはずである。この電界を検出すればよいのである。さあ、どうするか？

<問題 3.5>

図3.12で $E(x)$ を求めたのとまったく同様のやり方で求められる。図3.21(c)でSiとSiO₂の界面に原点 $x=0$ をとり、 $E(x)$ を右向きに正とすると、ガウスの法則の積分形を適用して、 $-E(x) = (-q)N_A(W-x)/K_s\epsilon_0$ を得る。これから電界は $E(x) = qN_A(W-x)/K_s\epsilon_0$ として求まる。これを図示すると図3.P1(後ろに掲載)に示した直角三角形となり、その面積が(3.26)式の電位差 ϕ_s である。

<問題 4.1>

実際に電圧増幅器を使用する際には、図4.9に示した様に入力信号源 v_s には出力インピーダンス Z_S があり、出力側には負荷インピーダンス Z_L がつながる。入力側では Z_S と直列に入る Z_{in} によって v_s は減衰し、増幅器への入力電圧は $v_{in} = \{Z_{in}/(Z_S+Z_{in})\}v_s$ と小さくなってしまう。また出力側でも同様に減衰が生じ、 $v_{out} = \{Z_L/(Z_L+Z_{out})\}K_v v_{in}$ となり出力が小さくなる。特に信号源のインピーダンス Z_S が大きい場合や、負荷インピーダンス Z_L が小さい場合には、十分な増幅効果が得られない。もし $Z_{in} \gg Z_S$ であれば、入力側での電圧降下が無視できて $v_{in} = v_s$ となる。また $Z_{out} \ll Z_L$ であれば Z_L の値によらず出力側での電圧降下も無視できて $v_{out} = K_v v_{in}$ となる。こうして増幅器本来の性能が得られる。つまり、 $Z_{in} = \infty$ 、 $Z_{out} = 0$ の条件が求められるのである。

一方、理想的な電流増幅器については、 $Z_{in} = 0$ 、 $Z_{out} = \infty$ の条件が求められる。 $Z_{in} \ll Z_S$ であれば、信号源の電流を有効に増幅器に取り込むことができる。また $Z_{out} \gg Z_L$ であれば、増幅された電流信号を有効に増幅器から取り出すことができる。こうして電流増幅器本来の性能が得られる。

<問題 4.2>

信号源の出力抵抗を R_s 、増幅器の入力抵抗を R_{in} とすると、 $v_{in} = v_s \times R_{in} / (R_{in} + R_s)$ となって増幅器への入力信号が小さくなってしまう。 $R_s = 0$ なら R_{in} の値によらず $v_{in} = v_s$ とすることができる。

<問題 4.3>

入力インピーダンスを求めるには、出力を開放した状態でソース端子に v_{test} をつなぎ、流れ込む電流 i_{test} を求めて比をとれば良い。図4.17(b)より、 $v_{out} = R \times i_{test}$ となるので、式(4.17)

で $v_{out} = R \times i_{test}$, $v_{in} = v_{test}$ とすれば簡単に求まる。 Z_{out} については、図 4.17(b)において $v_{in} = 0$ とすると $v_{gs} = 0$ となって電流源の電流=0 となる。従って、 v_{out} から見た抵抗は R と r_d の並列抵抗となる。

<問題 5.1>

抵抗の場合と同様に、回路方程式を立てることで容易に結果が得られる。先ず並列コンデンサの場合を以下に示す。電源 v から三つのコンデンサ C_1 , C_2 , C_3 に流れ込む電流をそれぞれ i_1 , i_2 , i_3 とすると、端子電圧は同じ v なので

$$v = \frac{1}{C_1} \int^t i_1 dt = \frac{1}{C_2} \int^t i_2 dt = \frac{1}{C_3} \int^t i_3 dt$$

ここで合成容量を C_0 とすると

$$v = \frac{1}{C_0} \int^t idt = \frac{1}{C_0} \int^t (i_1 + i_2 + i_3) dt = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_0} v$$

となる。従って

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3$$

が導かれる。

直列コンデンサの場合は、三つのコンデンサに流れる電流は皆同じなので、

$$v = \frac{1}{C_1} \int^t idt + \frac{1}{C_2} \int^t idt + \frac{1}{C_3} \int^t idt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int^t idt = \frac{1}{C_0} \int^t idt$$

より求まる。コイルに関しても同様の計算を行うことで求まる。

<問題 5.2>

規定通りに係数を計算すると以下の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

<問題 5.3>

図 5.P1 (後ろに掲載) のループ電流 I_1, I_2, I_3 に対してループ方程式を立てると

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

となる。これを解いて、 $I_1=3/5$ (A), $I_2=-4/5$ (A), $I_3=-7/5$ (A) を得る。

また、ノード電圧 V_x, V_y に対してノード方程式を立てると

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。これを解くと、 $V_x=7/5$ (V), $V_y=6/5$ (V) を得る。両者の解が一致することは明らかである。

<問題 5.4>

鳳—テブナンの定理を用いると

$$v_s = \frac{R_2 v_0}{R_1 + R_2}$$

$$R_s = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

となる。これより

$$i_3 = \frac{R_2 v_0}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

が得られる。またノートンの定理を用いると電流源の値は

$$i_s = \frac{v_0}{R_1}$$

となり、 i_3 として同じ値が得られる。ループ方程式・ノード方程式を立てて解いても同じ結果が得られる。

<問題 6.1>

充電の際の $t > 0$ における回路の電圧源を電流源に変換すると、図 6.P1（後ろに掲載）のようになる。これに対して充電の際の $t > 0$ でのノード方程式を立てる。コンデンサに流れ込む電流が Cdv_C/dt となることから

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = \frac{V_0}{R}$$

が得られる。初期条件は $v_C(0+) = 0$ である。また放電の際は上式の右辺が 0 となり、初期条件は $v_C(0+) = V_0$ である。(6.17) 及び (6.18) と同じ解が導かれる。

<問題 6.2>

コンデンサにおいて v_C を $i_C(t)$ から求める式は、

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

であるが、積分の下限を $-\infty$ にとって

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$$

この積分の第一項は、スイッチング以前にコンデンサの電極に蓄えられた電荷の総量を意味し、第二項はスイッチング後に充電あるいは放電する電荷の総量を示す。

これらの積分を実行すると、式 (6.17)、式 (6.18) と同じ結果が得られる。

<問題 6.3>

(6.41)式は

$$I = \frac{V_0}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$

と変形でき、電源は $\sin \omega t$ なので定常解は

$$i(t) = \text{Im} \left[\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right] = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

となる.

<問題 6.4>

(6.68) 式より

$$L[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega}$$

である. $\sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2j$, $\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ より結果が得られる.

<問題 6.5>

部分積分を繰り返し行うことで以下のように求まる.

$$L[t^n] = \frac{n}{s} L[t^{n-1}] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} L[t^{n-2}] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \frac{1}{s} L[u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

<問題 6.6>

$$I(s) = \frac{1/s}{s + 2 + 1/s} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

逆変換して,

$$i(t) = te^{-t}$$

となる. スイッチオフのときは,

$$i(t) = -te^{-t}$$

となる.

<問題 6.7>

$$I(s) = \frac{1/s}{s + 4 + 8/s} = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{1}{(s + 2)^2 + 2^2}$$

逆変換して,

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t$$

となる。スイッチオフのときは,

$$i(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \sin 2t$$

となる。

<問題 6.8>

この場合の部分分数分解は、次の形にする。

$$\frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

両辺に $(s+1)^3$ をかけて

$$\frac{1}{s+2} = A + B(s+1) + C(s+1)^2 + \frac{D(s+1)^3}{s+2}$$

この式で $s=-1$ として $A=1$ が求まる。次にこの式の両辺を s で微分して、 $s=-1$ とおくことで $B=-1$ が求まる。さらにもう一度 s で微分して $s=-1$ とすることで、 $C=1$ が求まる。 D は従来通りのやり方で求まり、 $D=-1$ となる。

<問題 6.9>

スイッチオ時の、 $t>0$ におけるラプラス変換を用いたインピーダンス表現の回路図を図 6.P2 (後ろに掲載) に示す。

これより、求める連立方程式は

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL_1 + (sC_2)^{-1} & -sL_1 & -(sC_2)^{-1} \\ -sL_1 & R_2 + sL_1 + (sC_1)^{-1} & -R_2 \\ -(sC_2)^{-1} & -R_2 & R_2 + sL_2 + (sC_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1/s \\ V_2/s \\ -V_2/s \end{bmatrix}$$

となる。

スイッチオンの後十分時間が経過したときの回路図を図 6.P3 (後ろに掲載) に示す。定常状態では直流電流しか流れていないので、コイルは導線によるショート、コンデンサは開放となっている (6.1.1 項の (6.8) 式の後に書いてある説明を参照のこと)。この図より、このとき流れている直流電流 I_X 及び A 点の電圧 V_A は、次のように求まる。

$$I_X = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}, \quad V_A = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 + R_2}$$

これより，コイルに流れている電流は I_X ，コンデンサ C_1 及び C_2 の両端の電位差は V_A であることが分かる．

ここでスイッチオフした時点をも $t=0$ とすると

$$i_{L1}(0+) = i_{L2}(0+) = I_X$$

$$v_{C1}(0+) = v_{C2}(0+) = V_A$$

このことより， $t > 0$ におけるラプラス変換を用いたインピーダンス表現の回路図は図 6.P4（後ろに掲載）のようになり，これより求める連立方程式は

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL_1 + (sC_2)^{-1} & -sL_1 & -(sC_2)^{-1} \\ -sL_1 & R_2 + sL_1 + (sC_1)^{-1} & -R_2 \\ -(sC_2)^{-1} & -R_2 & R_2 + sL_2 + (sC_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 I_X - V_A/s \\ -L_1 I_X - V_A/s \\ L_2 I_X + V_A/s \end{bmatrix}$$

として得られる．スイッチオンするときの式との違いは，右辺の電圧源の項だけである．

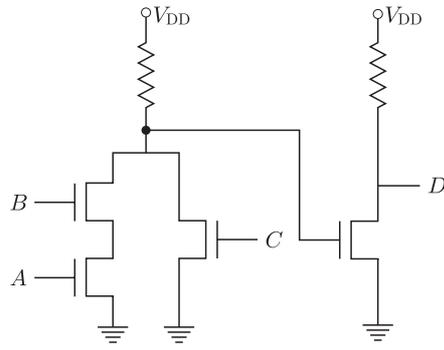


図 1.P1

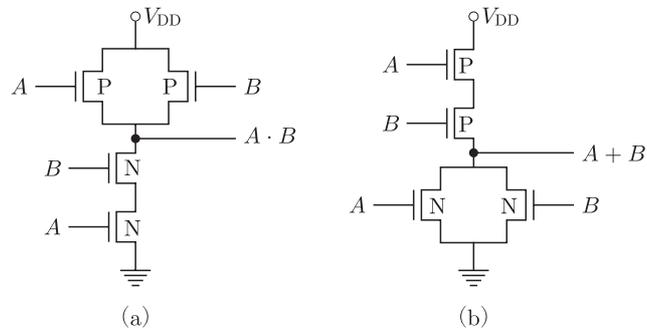


図 1.P2 (a) CMOS の NAND 回路. (b) CMOS の NOR 回路.

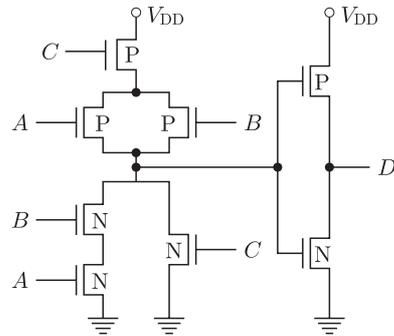


図 1.P3

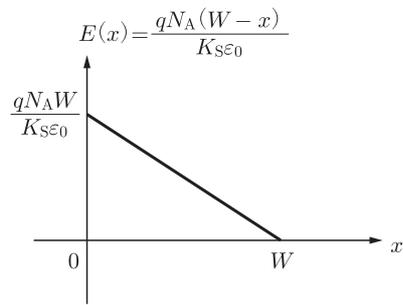


图 3.P1

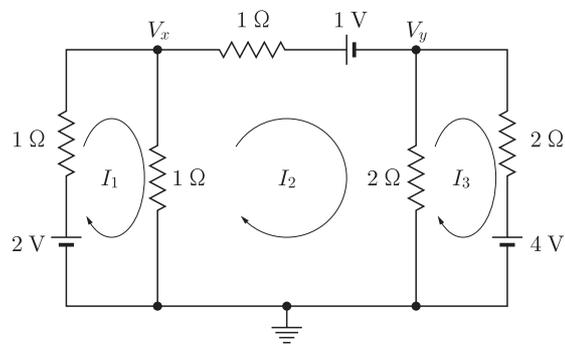


图 5.P1

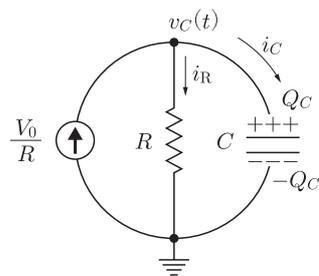


图 6.P1

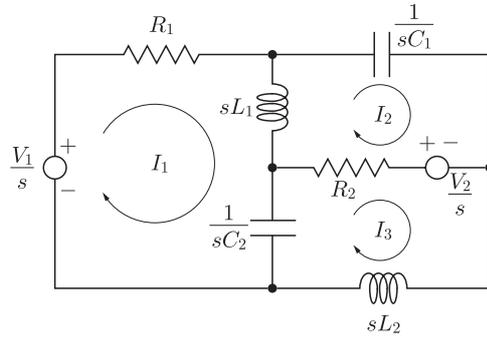


图 6.P2

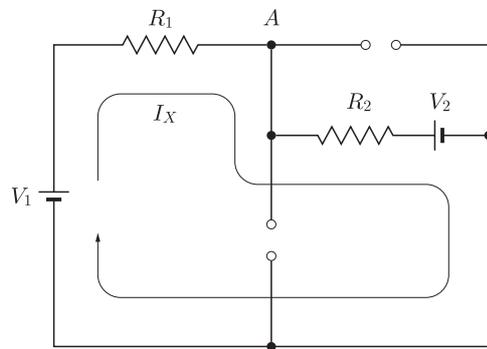


图 6.P3

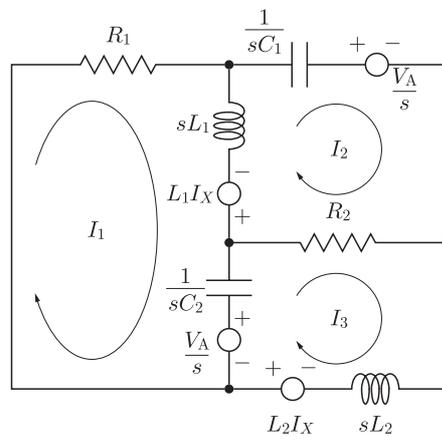


图 6.P4