３章 C 発展問題の解答

32　直線 $ax+by+c=0$ に垂直で原点を通る直線の方程式は $bx-ay=0$ である（問 3.6 参照）．この２直線の交点が求める点である．実際に，連立方程式を解いて交点を求めると $\left(\dfrac{-ac}{a^2+b^2}, \dfrac{-bc}{a^2+b^2}\right)$ を得る．

33　（１）$\mathrm{A}(t-2,0), \mathrm{B}(t+6,0)$ とすると，

$S=$（台形 ABRQ の面積）－（三角形 APQ の面積）－（三角形 PBR の面積）

より，$S=4t^2+4t+52=4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+51$．

（２）（１）の結果より $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値は５１．このとき $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{19}{4}\right)$．

34　（１）放物線 $y=f(x)=a(x-b)^2$ と直線 $y=-4x+4$ を x 軸方向に $-b$ だけ平行移動すると放物線 $y=ax^2 \cdots$①と直線 $y=-4x-4b+4 \cdots$②となる．
①に②を代入してできる２次方程式 $ax^2+4x+4b-4=0$ の判別式を D とおくと，①と②が接していればよいので，$D=16(1-ab+a)=0$ より $b=1+\dfrac{1}{a}$．

（２）$a>0$ より $b=1+\dfrac{1}{a}>1$ に注意すると $M(a)=f(0)=ab^2=a+\dfrac{1}{a}+2$．

また，$(1<)b$・2 すなわち a・1 のときは $m(a)=0$．$b>2$ すなわち $(0<)a<1$ のときは $m(a)=f(2)=a+\dfrac{1}{a}-2$．（３）$a>0$ より $a+\dfrac{1}{a}$・$2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$（等号は $a=1$ のとき）だから，$M(a)=a+\dfrac{1}{a}+2$・4 より $a=1$ のとき最小値４．

$\boxed{35}$　（１）直角双曲線の方程式を $y=\dfrac{1}{x}\cdots$①，点 $\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ での接線 l の方程式を $y=a\left(x-c\right)+\dfrac{1}{c}\cdots$②とおく．　①に②を代入し，分母を払ってできる 2 次方程式 $ax^2+\left(\dfrac{1}{c}-ac\right)x-1=0$ の判別式を D とおくと，①と②が接しているので

$D=\left(\dfrac{1}{c}-ac\right)^2+4a=\left(\dfrac{1}{c}+ac\right)^2=0$ より $a=-\dfrac{1}{c^2}$ を得る．よって直線 l の方程式は

$y=-\dfrac{1}{c^2}x+\dfrac{2}{c}$．（２）（１）より（求める三角形の面積）＝ $\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot\dfrac{2}{c}=2$．

$\boxed{36}$（１）放物線の方程式 $y=2\sqrt{x}$ を同値な方程式 $x=\dfrac{1}{4}y^2\ \ \left(y\ \cdot\ 0\right)\cdots$①にかきなおし，点 $\left(c,\ 2\sqrt{c}\right)$ での接線 l の方程式を $x=a\left(y-2\sqrt{c}\right)+c\cdots$②とおく．

①に②を代入してできる 2 次方程式 $\dfrac{1}{4}y^2-ay+2\sqrt{c}a-c=0$ の判別式を D とおくと，①と②が接しているので

$D=a^2-2\sqrt{c}a+c=\left(a-\sqrt{c}\right)^2=0$ より $a=\sqrt{c}$ を得る．よって直線 l の方程式は

$x=\sqrt{c}y-c$　すなわち，$y=\dfrac{1}{\sqrt{c}}x+\sqrt{c}$．（２）直線 l' は直線 l に垂直だから，直線 l' の傾きは $-\sqrt{c}$（一般に，直線 $y=ax+b\ \left(a\neq 0\right)$ と直線 $y=px+q\ \left(p\neq 0\right)$ が垂直であれば，$p=\dfrac{-1}{a}$．§3.1 問題Ｂの例題 3.1(2) 参照)．したがって，

直線 l' の方程式は $y=-\sqrt{c}\left(x-c\right)+2\sqrt{c}$ より，$y=-\sqrt{c}\,x+\left(2+c\right)\sqrt{c}$．

（３）次の 2 つが成り立つ.

（ア）直線 FQ の傾き $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ と直線 l' の傾き $-\sqrt{c}$ との積は -1 なので垂直.

（イ）線分 FQ の中点 $\left(1+c,\ \sqrt{c}\right)$ は,（２）で求めた直線 l' の方程式をみたすので直線 l' にある.

（ア）と（イ）より, 直線 l' は線分 FQ を垂直に 2 等分しているので, 点 F と点 Q は直線 l' に関して対称である.

$\boxed{37}$ $g(x)=x$ とおくと, $g^2(x)=g\left(g(x)\right)=g(x)=x$, 同様にして,

$g^3(x)=g\left(g^2(x)\right)=x$, ・・・. 一般に, $g^n(x)=x$（$n=1,2,\cdots$）が成り立つ.

$f^3(x)=g(x)=x$ だから, $f^{25}(x)=f\left(g^8(x)\right)=f(x)=\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+1}$.