

3章 C 発展問題の解答

32 直線 $ax+by+c=0$ に垂直で原点を通る直線の方程式は $bx-ay=0$ である (問 3.6 参照). この 2 直線の交点が求める点である. 実際に, 連立方程式を解いて交点を求めると $\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$ を得る.

33 (1) $A(t-2, 0), B(t+6, 0)$ とすると,

$S = (\text{台形 ABRQ の面積}) - (\text{三角形 APQ の面積}) - (\text{三角形 PBR の面積})$

より, $S = 4t^2 + 4t + 52 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 51$.

(2) (1) の結果より $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値は 51. このとき $Q\left(-\frac{5}{2}, \frac{19}{4}\right)$.

34 (1) 放物線 $y = f(x) = a(x-b)^2$ と直線 $y = -4x + 4$ を x 軸方向に $-b$ だけ

平行移動すると放物線 $y = ax^2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = -4x - 4b + 4 \cdots \textcircled{2}$ となる.

①に②を代入してできる 2 次方程式 $ax^2 + 4x + 4b - 4 = 0$ の判別式を D とおくと,

①と②が接していればよいので, $D = 16(1 - ab + a) = 0$ より $b = 1 + \frac{1}{a}$.

(2) $a > 0$ より $b = 1 + \frac{1}{a} > 1$ に注意すると $M(a) = f(0) = ab^2 = a + \frac{1}{a} + 2$.

また, $(1 <) b \leq 2$ すなわち $a \geq 1$ のときは $m(a) = 0$. $b > 2$ すなわち $(0 <) a < 1$ の

ときは $m(a) = f(2) = a + \frac{1}{a} - 2$. (3) $a > 0$ より $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$ (等号は

$a = 1$ のとき) だから, $M(a) = a + \frac{1}{a} + 2 \geq 4$ より $a = 1$ のとき最小値 4.

35 (1) 直角双曲線の方程式を $y = \frac{1}{x} \cdots \textcircled{1}$, 点 $\left(c, \frac{1}{c}\right)$ での接線 l の方程式を

$y = a(x - c) + \frac{1}{c} \cdots \textcircled{2}$ とおく. $\textcircled{1}$ に $\textcircled{2}$ を代入し, 分母を払ってできる 2 次方程式

式 $ax^2 + \left(\frac{1}{c} - ac\right)x - 1 = 0$ の判別式を D とおくと, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接しているので

$D = \left(\frac{1}{c} - ac\right)^2 + 4a = \left(\frac{1}{c} + ac\right)^2 = 0$ より $a = -\frac{1}{c^2}$ を得る. よって直線 l の方程式は

$y = -\frac{1}{c^2}x + \frac{2}{c}$. (2) (1) より (求める三角形の面積) $= \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot \frac{2}{c} = 2$.

36 (1) 放物線の方程式 $y = 2\sqrt{x}$ を同値な方程式 $x = \frac{1}{4}y^2$ ($y \geq 0$) $\cdots \textcircled{1}$ にかき

なおし, 点 $(c, 2\sqrt{c})$ での接線 l の方程式を $x = a(y - 2\sqrt{c}) + c \cdots \textcircled{2}$ とおく.

$\textcircled{1}$ に $\textcircled{2}$ を代入してできる 2 次方程式 $\frac{1}{4}y^2 - ay + 2\sqrt{ca} - c = 0$ の判別式を D とお

くと, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接しているので

$D = a^2 - 2\sqrt{ca} + c = (a - \sqrt{c})^2 = 0$ より $a = \sqrt{c}$ を得る. よって直線 l の方程式は

$x = \sqrt{c}y - c$ すなわち, $y = \frac{1}{\sqrt{c}}x + \sqrt{c}$. (2) 直線 l' は直線 l に垂直だから, 直

線 l' の傾きは $-\sqrt{c}$ (一般に, 直線 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) と直線 $y = px + q$ ($p \neq 0$) が

垂直であれば, $p = -\frac{1}{a}$. § 3.1 問題 B の例題 3.1(2) 参照). したがって,

直線 l' の方程式は $y = -\sqrt{c}(x - c) + 2\sqrt{c}$ より, $y = -\sqrt{c}x + (2 + c)\sqrt{c}$.

(3) 次の2つが成り立つ.

(ア) 直線 FQ の傾き $\frac{1}{\sqrt{c}}$ と直線 l' の傾き $-\sqrt{c}$ との積は -1 なので垂直.

(イ) 線分 FQ の中点 $(1+c, \sqrt{c})$ は, (2) で求めた直線 l' の方程式をみたすので直線 l' にある.

(ア) と (イ) より, 直線 l' は線分 FQ を垂直に 2 等分しているので, 点 F と点 Q は直線 l' に関して対称である.

37 $g(x)=x$ とおくと, $g^2(x)=g(g(x))=g(x)=x$, 同様にして,

$g^3(x)=g(g^2(x))=x$, $\dots$. 一般に, $g^n(x)=x$ ($n=1,2,\dots$) が成り立つ.

$$f^3(x)=g(x)=x \text{ だから, } f^{25}(x)=f(g^8(x))=f(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+1}.$$