

基礎数学問題集 [第 2 版] 第 4 章 C 問題解答例

数理工学社

2021 年 11 月 4 日

47. $X = 3^x + 3^{-x}$ とおくと、相加平均と相乗平均の関係より $X = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$. ただし、等号は $3^x = 3^{-x}$ すなわち $x = 0$ のときに成立. $y = -(X - 2)^2 + 10$ より、 $X = 2$ のとき、すなわち $x = 0$ のとき、 y は最大値 10 をとる.
48. $X = \log_2 x$ とおくと、 $y = (2 - X)(X - 1) = -\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. ゆえに $X = \frac{3}{2}$ のとき、すなわち $x = 2\sqrt{2}$ のとき、最大値 $y = \frac{1}{4}$ をとる.
49. $X = 2^x$, $Y = 2^y$ とおくと、 X, Y はともに正であり、連立方程式は $X - Y = 2^3$, $XY = 2^7$ と表される. Y を消去して、 $X(X - 2^3) = 2^7$ すなわち、 $(X - 16)(X + 8) = 0$. $X > 0$ より $X = 16$, このとき $Y = 8$. ゆえに $(x, y) = (4, 3)$.
50. 第 2 式より、 $xy = 2^4$. 第 1 式 $x + y = 10$ と連立させて y を消去すると、 $x(10 - x) = 2^4$. したがって、 $x = 2, 8$. ゆえに $(x, y) = (2, 8), (8, 2)$.
51. 背理法により証明する. $\log_2 3$ は有理数であるとする. $2 < 3$ なので、 $\log_2 3 > 0$ であり、2 つの自然数 m, n を用いて $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ と表せる. このとき、 $3 = 2^{\frac{m}{n}}$ であるが、これを n 乗して $3^n = 2^m$ が成り立つ. これは左辺は奇数、右辺は偶数となり、不合理. ゆえに $\log_2 3$ は無理数である.
52. $X = 2^x$ とおくと、 X は正であり、方程式は $4X^2 - 16X + a = 0$ と表される. この方程式が X について異なる 2 つの正の解を持つ条件を求めればよいので、 $0 < a < 16$.
53. 左辺 - 右辺 $= (\log_2 x)(\log_2 y) - \frac{1}{4}(\log_2 x - \log_2 y)(\log_2 y - \log_2 x) = \frac{1}{4}(\log_2 x + \log_2 y)^2 = \frac{1}{4}(\log_2 xy)^2 \geq 0$. ゆえに、左辺 $\geq$ 右辺. 等号は $\log_2 xy = 0$ すなわち、 $xy = 1$ のとき成立する.
54. (1) $\log_{10} 5^{25} = 25 \log_{10} 5 = 25 \log_{10} \frac{10}{2} = 25(1 - \log_{10} 2) = 17.475\dots$ ゆえに 18 桁である.
(2) $\log_{10} 5^{25}$ の小数部分について、 $\log_{10} 2 < 0.475\dots < \log_{10} 3$. したがって最高位の数字は 2 である.