

基礎数学問題集〔第2版〕 第5章C問題解答

数理工学社 2021年11月5日

70 以下の各小問において $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする.

(1) 公式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を用いると,

$$\begin{aligned}\cos^2 A &= \sin^2 B + \cos^2 C \\ \iff 1 - \sin^2 A &= \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \\ \iff \sin^2 C &= \sin^2 A + \sin^2 B \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

正弦定理より, $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ であるから, これを代入すると

$$\textcircled{1} \iff \frac{c^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} \iff c^2 = a^2 + b^2$$

よって, $\triangle ABC$ は $C = 90^\circ$ の直角三角形 $\cdots$ (答)

(2) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と正弦定理を用いると,

$$\begin{aligned}a^2 \tan^2 B &= b^2 \tan^2 A \iff a^2 \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = b^2 \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \\ \iff a^2 \sin^2 B \cos^2 A &= b^2 \sin^2 A \cos^2 B \\ \iff a^2 \frac{b^2}{4R^2} \cos^2 A &= b^2 \frac{a^2}{4R^2} \cos^2 B \\ \iff \cos^2 A &= \cos^2 B \iff 1 - \sin^2 A = 1 - \sin^2 B \\ \iff \sin^2 A &= \sin^2 B \iff \frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} \\ \iff a^2 &= b^2 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff a = b\end{aligned}$$

よって, $a = b$ の二等辺三角形 $\cdots$ (答)

2

(3)

$$\tan A \tan B = 1 \iff \sin A \sin B = \cos A \cos B$$

$$\iff \cos A \cos B - \sin A \sin B = 0 \iff \cos(A + B) = 0$$

$0^\circ < A + B < 180^\circ$ より, $A + B = 90^\circ$. よって, $C = 180^\circ - (A + B) = 90^\circ$
以上より, $C = 90^\circ$ の直角三角形 ... (答)

(4) 和積の公式と 2 倍角の公式を用いると

$$\cos A + \cos B = \sin C \quad \downarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\iff 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

ここで, $\cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{180^\circ - C}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}$ であり,
 $0^\circ < \frac{C}{2} < 90^\circ$ より, $\sin \frac{C}{2} \neq 0$ となるから, 両辺を $2 \sin \frac{C}{2}$ でわると

$$\cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \dots \textcircled{1}$$

ここで $-90^\circ < \frac{A-B}{2} < 90^\circ$ および $0^\circ < \frac{C}{2} < 90^\circ$ であるから, $\textcircled{1}$ より

$$\frac{A-B}{2} = \frac{C}{2} \quad \text{または} \quad \frac{A-B}{2} = -\frac{C}{2}$$

$$\iff A = B + C \quad \text{または} \quad A + C = B$$

$A + B + C = 180^\circ$ より

$$A = 90^\circ \quad \text{または} \quad B = 90^\circ$$

以上より, $A = 90^\circ$ の直角三角形, または $B = 90^\circ$ の直角三角形 ... (答)

71 (1) $\triangle PAH$ は $\angle PHA = 90^\circ$ の直角三角形だから三平方の定理より

$$PA^2 = PH^2 + AH^2$$

が成立する. $\triangle PBH$, $\triangle PCH$ についても

$$PB^2 = PH^2 + BH^2, \quad PC^2 = PH^2 + CH^2$$

が成り立つ。 $PA = PB = PC = \sqrt{6}$ であるから

$$AH^2 = BH^2 = CH^2 = 6 - PH^2$$

これより、 $AH = BH = CH$ が成り立つ。 よって点 H は $\triangle ABC$ の外心である。

(2) 以下、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ および $\angle CAB = A$ とおく。 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

となる。 $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

である。 これより

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \dots (\text{答})$$

である。 また、 正弦定理より

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = 2 \div \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15} \dots (\text{答})$$

(3) (2) より $AH = R = \frac{8}{\sqrt{15}}$ であるから四面体の高さ PH は

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{6 - \frac{64}{15}} = \sqrt{\frac{26}{15}}$$

となる。 これより、

$$V = \frac{1}{3}S \times PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4} \cdot \sqrt{\frac{26}{15}} = \frac{\sqrt{26}}{4} \dots (\text{答})$$

72 (1) 和積の公式と2倍角の公式を用いる.

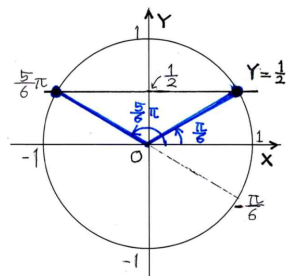
$$\begin{aligned}
 & \sin A - \sin B + \sin C && \downarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\
 = & 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 = & 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \sin \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} && \leftarrow A+B = \pi - C \\
 = & 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} && \leftarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\
 = & 2 \sin \frac{C}{2} \left\{ \sin \frac{A-B}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \right\} && \leftarrow \cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\
 = & 2 \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A-B-C+\pi}{4} \cos \frac{A-B+C-\pi}{4} \\
 = & 2 \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{2A}{4} \cos \frac{-2B}{4} && \leftarrow A+B+C = \pi \\
 = & 2 \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} && \leftarrow \cos(-\theta) = \cos \theta \\
 = & 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

(2) 和積の公式と2倍角の公式を用いる.

$$\begin{aligned}
 & \cos A + \cos B + \cos C \quad \downarrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \\
 & = 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \\
 & = 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \quad \leftarrow A+B=\pi-C \\
 & = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \quad \leftarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\
 & = 2\sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{A-B}{2} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \right\} + 1 \quad \leftarrow \sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\
 & = 2\sin \frac{C}{2} \cdot (-2) \sin \frac{A-B-C+\pi}{4} \sin \frac{A-B+C-\pi}{4} + 1 \\
 & = 2\sin \frac{C}{2} \cdot (-2) \sin \frac{2A}{4} \sin \frac{-2B}{4} + 1 \quad \leftarrow A+B+C=\pi \\
 & = 2\sin \frac{C}{2} \cdot 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 1 \quad \leftarrow \sin(-\theta) = -\sin \theta \\
 & = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1
 \end{aligned}$$

73 (1) 半角の公式・2倍角の公式を用いると与えられた方程式より

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sqrt{3} \sin 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1 \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \quad \leftarrow \text{三角関数の合成} \\
 \Leftrightarrow & \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから

右上図より, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ よって, $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \dots$ (答)

(2) 2倍角の公式を用いる. 与えられた方程式より

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x - \sin^2 x \geq 2(\cos x - \sin x) \\
& \iff (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 2(\cos x - \sin x) \\
& \iff (\cos x - \sin x)(2 - (\cos x + \sin x)) \leq 0 \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

ここで三角関数の合成より $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ となり,
 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ であるから $2 - (\sin x + \cos x) > 0$ である. これを用いると

$$\textcircled{1} \iff \cos x - \sin x \leq 0 \iff \cos x \leq \sin x \cdots \textcircled{2}$$

(i) $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, $\textcircled{2}$ は成り立つ.

(ii) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos x > 0$ であるから

$$\textcircled{2} \iff \tan x \geq 1 \iff \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

(i) (ii) より, 求める解は $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \cdots (\text{答})$

(3) 和積の公式を用いる. 与えられた方程式より

$$\begin{aligned}
& (\sin 3x + \sin x) - \sqrt{2} \sin 2x > 0 \\
& \iff 2 \sin 2x \cos x - \sqrt{2} \sin 2x > 0 \quad \leftarrow \text{和積の公式を利用} \\
& \iff \sin 2x \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0 \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

x の範囲は, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ であるが, $x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき, $\textcircled{1}$ は成り立たない.
 よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のときだけ, 考えれば良い. このとき, $0 < 2x < \pi$ より $\sin 2x > 0$ となるから

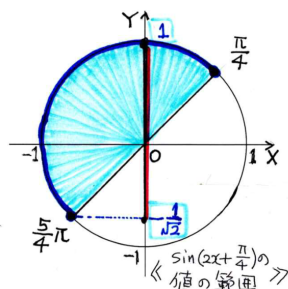
$$\textcircled{1} \iff \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

これより, 求める x の値の範囲は $0 < x < \frac{\pi}{4} \cdots (\text{答})$

74

 (1)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \leftarrow \text{三角関数の合成}
 \end{aligned}$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ であるから、右図より

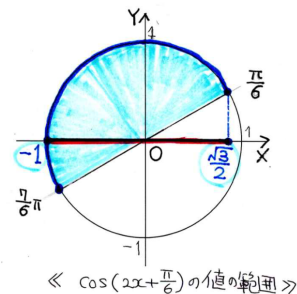
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ となる. これより, } -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となるのは $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, すなわち $x = \frac{\pi}{8}$ のときであり, $y = -\frac{1}{2}$ となるのは $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$, すなわち $x = \frac{\pi}{2}$ のときである. 以上より,

$$\text{最大値は } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(x = \frac{\pi}{8} \text{ のとき} \right), \quad \text{最小値は } -\frac{1}{2} \quad \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \right)$$

(2) 公式 $\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ を第2項に用い, 和積の公式を用いると

$$\begin{aligned}
 y &= \cos 2x + \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) \right\} \\
 &= \cos 2x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \quad \leftarrow \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$ であるから、右上図より

$$-1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となる. これより } -\sqrt{3} \leq y \leq \frac{3}{2}.$$

$y = \frac{3}{2}$ となるのは $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, すなわち $x = 0$ のときであり, $y = -\sqrt{3}$ と

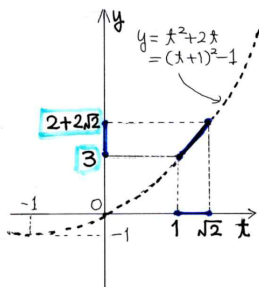
なるのは $2x + \frac{\pi}{6} = \pi$, すなわち $x = \frac{5}{12}\pi$ のときである. 以上より,

最大値は $\frac{3}{2}$ ($x = 0$ のとき), 最小値は $-\sqrt{3}$ ($x = \frac{5}{12}\pi$ のとき)

(3) $\sin x + \cos x = t$ とおく. 両辺を 2 乗すると $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$ となり, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いると $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ となる. これを用いると

$$\begin{aligned} y &= 2t + (t^2 - 1) + 1 \\ &= t^2 + 2t \\ &= (t + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

ここで三角関数の合成より $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ となる. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ となるから $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となり, これより



$1 \leq t \leq \sqrt{2}$ となる. 右上図から, $3 \leq y \leq 2 + 2\sqrt{2}$ となる.

$y = 2 + 2\sqrt{2}$ となるのは $t = \sqrt{2} \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi}{4}$ のときであり, $y = 3$ となるのは $t = 1 \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \iff x = 0, \frac{\pi}{2}$ のときである. 以上より,

最大値は $2 + 2\sqrt{2}$ ($x = \frac{\pi}{4}$ のとき), 最小値は 3 ($x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき)

75 (1) $\angle B = \theta$ とおくと $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \cdots \textcircled{1}$$

$\angle D = \pi - \angle B = \pi - \theta$ であるから, $\triangle CDA$ において余弦定理より

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \theta) \iff x^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \theta \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times cd + \textcircled{2} \times ab$ より

$$(ab + cd)x^2 = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) \cdots \textcircled{3}$$

この式の右辺は $*$: a の 2 次式とみて「たすき掛け」 ↓

$$\textcircled{3} \text{の右辺} = cda^2 + b(c^2 + d^2)a + b^2cd \stackrel{*}{=} (ca + bd)(da + bc)$$

と因数分解される. $x > 0$ であるから, 以上より,

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \dots (\text{答})$$

(2) $\angle C = \phi$ とおくと $\triangle BCD$ において余弦定理より

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \phi \dots \textcircled{4}$$

$\angle A = \pi - \angle C = \pi - \phi$ であるから, $\triangle DAB$ において余弦定理より

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da \cos(\pi - \phi) \iff y^2 = d^2 + a^2 + 2da \cos \phi \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4} \times ad + \textcircled{5} \times bc$ より

$$(ad + bc)y^2 = ad(b^2 + c^2) + bc(d^2 + a^2) \dots \textcircled{6}$$

この式の右辺は $*$: a の 2 次式とみて「たすき掛け」 ↓

$$\textcircled{6} \text{の右辺} = bca^2 + d(b^2 + c^2)a + bcd^2 \stackrel{*}{=} (ba + cd)(ca + bd)$$

と因数分解される. $y > 0$ であるから, 以上より,

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}} \dots (\text{答})$$

(3) (1),(2) の結果より

$$xy = \sqrt{\frac{(ac + bd)(\cancel{ad + bc})}{(\cancel{ab + cd})}} \times \frac{(ac + bd)(\cancel{ab + cd})}{(\cancel{ad + bc})} = ac + bd$$

となり, トレミーの定理が示された.