基礎数学問題集［第２版］ 第５章C問題解答

数理工学社　2026 年 2 月 5 日

$\boxed{\textbf{70}}$ 以下の各小問において △ABC の外接円の半径を R とする．

(1)　公式 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を用いると，

$$\begin{aligned}
&\cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 C \\
\Longleftrightarrow\ & 1 - \sin^2 A = \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \\
\Longleftrightarrow\ & \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \cdots ①
\end{aligned}$$

正弦定理より，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ であるから，これを代入すると

$$① \iff \frac{c^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} \iff c^2 = a^2 + b^2$$

よって， △ABC は $\underline{C = 90^\circ\ \text{の直角三角形}}$ $\cdots$（答）

(2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と正弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}
a^2\tan^2 B = b^2\tan^2 A \iff\ & a^2\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = b^2\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \\
\Longleftrightarrow\ & a^2\sin^2 B\cos^2 A = b^2\sin^2 A\cos^2 B \\
\Longleftrightarrow\ & a^2\frac{b^2}{4R^2}\cos^2 A = b^2\frac{a^2}{4R^2}\cos^2 B \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^2 A = \cos^2 B \iff 1 - \sin^2 A = 1 - \sin^2 B \\
\Longleftrightarrow\ & \sin^2 A = \sin^2 B \iff \frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} \\
\Longleftrightarrow\ & a^2 = b^2 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff a = b
\end{aligned}$$

よって，$\underline{a = b\ \text{の二等辺三角形}}$ $\cdots$（答）

(3)

$$\tan A \tan B = 1 \iff \sin A \sin B = \cos A \cos B$$
$$\iff \cos A \cos B - \sin A \sin B = 0 \iff \cos(A+B) = 0$$

$0^\circ < A+B < 180^\circ$ より，$A+B = 90^\circ$．よって，$C = 180^\circ - (A+B) = 90^\circ$

以上より，$\underline{C = 90^\circ \text{ の直角三角形}}$ $\cdots$（答）

(4) 和積の公式と 2 倍角の公式を用いると

$$\cos A + \cos B = \sin C \qquad \downarrow \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\iff 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ここで，$\cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{180^\circ - C}{2} = \cos\left(90^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$ であり，$0^\circ < \dfrac{C}{2} < 90^\circ$ より，$\sin\dfrac{C}{2} \neq 0$ となるから，両辺を $2\sin\dfrac{C}{2}$ でわると

$$\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2} \cdots ①$$

ここで $-90^\circ < \dfrac{A-B}{2} < 90^\circ$ および $0^\circ < \dfrac{C}{2} < 90^\circ$ であるから，① より

$$\frac{A-B}{2} = \frac{C}{2} \quad \text{または} \quad \frac{A-B}{2} = -\frac{C}{2}$$
$$\iff A = B + C \quad \text{または} \quad A + C = B$$

$A + B + C = 180^\circ$ より

$$A = 90^\circ \quad \text{または} \quad B = 90^\circ$$

以上より，$\underline{A = 90^\circ \text{ の直角三角形，または } B = 90^\circ \text{ の直角三角形}}$ $\cdots$（答）

$\boxed{\textbf{71}}$ (1)　$\triangle$PAH は $\angle$PHA $= 90^\circ$ の直角三角形だから三平方の定理より

$$\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PH}^2 + \mathrm{AH}^2$$

が成立する．$\triangle$PBH，$\triangle$PCH についても

$$\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PH}^2 + \mathrm{BH}^2, \qquad \mathrm{PC}^2 = \mathrm{PH}^2 + \mathrm{CH}^2$$

が成り立つ．$\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{PC} = \sqrt{6}$ であるから

$$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH}^2 = \mathrm{CH}^2 = 6 - \mathrm{PH}^2$$

これより，$\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \mathrm{CH}$ が成り立つ．よって点 H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である．

(2) 以下，$\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$ および $\angle\mathrm{CAB} = A$ とおく．$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

となる．$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

である．これより

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{4}} \cdots (\text{答})$$

である．また，正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin A} = 2 \div \frac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{15}}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{15}}{15}} \cdots (\text{答})$$

(3) (2) より $\mathrm{AH} = R = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$ であるから四面体の高さ PH は

$$\mathrm{PH} = \sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{6 - \frac{64}{15}} = \sqrt{\frac{26}{15}}$$

となる．これより，

$$V = \frac{1}{3} S \times \mathrm{PH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4} \cdot \sqrt{\frac{26}{15}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{26}}{4}} \cdots (\text{答})$$

$\boxed{\textbf{72}}$ (1) 和積の公式と 2 倍角の公式を用いる．

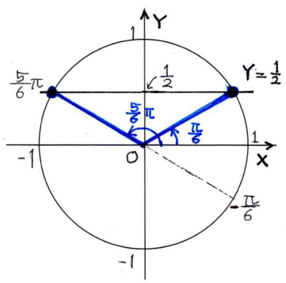
$$\begin{aligned}
&\sin A - \sin B + \underset{\sim\sim\sim}{\sin C} && \downarrow\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\\
=&2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
=&2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} && \leftarrow A+B=\pi-C\\
=&2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} && \leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\\
=&2\sin\frac{C}{2}\left\{\sin\frac{A-B}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right\} && \leftarrow \cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B-C+\pi}{4}\cos\frac{A-B+C-\pi}{4}\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{2A}{4}\cos\frac{-2B}{4} && \leftarrow A+B+C=\pi\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} && \leftarrow \cos(-\theta)=\cos\theta\\
=&4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

(2) 和積の公式と 2 倍角の公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
&\cos A+\cos B+\cos C \qquad \downarrow\ \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta\\
=&2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\
=&2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} \qquad \leftarrow A+B=\pi-C\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} \qquad \leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\\
=&2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right\}+1 \leftarrow \sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{A-B-C+\pi}{4}\sin\frac{A-B+C-\pi}{4}+1\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot(-2)\sin\frac{2A}{4}\sin\frac{-2B}{4}+1 \qquad \leftarrow A+B+C=\pi\\
=&2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+1 \qquad \leftarrow \sin(-\theta)=-\sin\theta\\
=&4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{73}}$ (1) 半角の公式・2 倍角の公式を用いると与えられた方程式より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=1\\
\iff&\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2=1\\
\iff&\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=1\\
\iff&2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \qquad \leftarrow \text{三角関数の合成}\\
\iff&\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ であるから

右上図より， $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ 　　よって，$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\cdots$(答)

(2) 2 倍角の公式を用いる．与えられた方程式より

$$
\begin{aligned}
&\cos^2 x - \sin^2 x \geqq 2(\cos x - \sin x) \\
\iff &(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geqq 2(\cos x - \sin x) \\
\iff &(\cos x - \sin x)\bigl(2 - (\cos x + \sin x)\bigr) \leqq 0 \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで三角関数の合成より $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，$\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$ であるから $2 - (\sin x + \cos x) > 0$ である．これを用いると

$$
① \iff \cos x - \sin x \leqq 0 \iff \cos x \leqq \sin x \cdots ②
$$

(i) $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，②は成り立つ．

(ii) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x > 0$ であるから

$$
② \iff \tan x \geqq 1 \iff \frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}
$$

(i) (ii) より，求める解は $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \cdots$（答）

(3)　和積の公式を用いる．与えられた方程式より

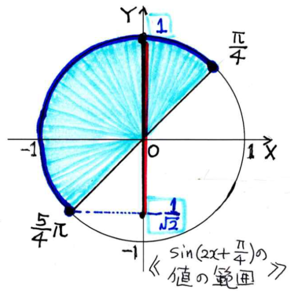
$$
\begin{aligned}
&(\sin 3x + \sin x) - \sqrt{2}\sin 2x > 0 \\
\iff &2\sin 2x \cos x - \sqrt{2}\sin 2x > 0 \quad \text{← 和積の公式を利用} \\
\iff &\sin 2x \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \cdots ①
\end{aligned}
$$

x の範囲は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるが，$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき，① は成り立たない．よって $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のときだけ，考えれば良い．このとき，$0 < 2x < \pi$ より $\sin 2x > 0$ となるから

$$
① \iff \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}
$$

これより，求める x の値の範囲は　$0 < x < \dfrac{\pi}{4} \cdots$（答）

74 (1)



$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \text{三角関数の合成}
\end{aligned}
$$

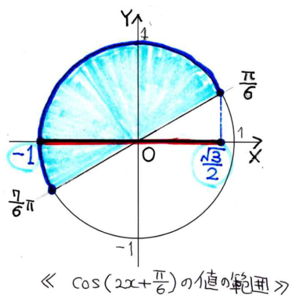
$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ であるから，右図より

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ となる．これより，$-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となるのは $2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x = \dfrac{\pi}{8}$ のときであり，$y = -\dfrac{1}{2}$ となるのは $2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5}{4}\pi$，すなわち $x = \dfrac{\pi}{2}$ のときである．以上より，

最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{8}\text{のとき}\right)$，　最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\text{のとき}\right)$

(2) 公式 $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ を第 2 項に用い，和積の公式を用いると



$$
\begin{aligned}
y &= \cos 2x + \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)\right\} \\
&= \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) \quad \leftarrow \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{7}{6}\pi$ であるから，右上図より

$-1 \leqq \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．これより $-\sqrt{3} \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}$.

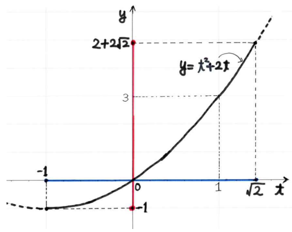
$y = \dfrac{3}{2}$ となるのは $2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$，すなわち $x = 0$ のときであり，$y = -\sqrt{3}$ と

なるのは $2x+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，すなわち $x=\dfrac{5}{12}\pi$ のときである．以上より，

最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ $\quad (x=0$ のとき)，最小値は $-\boldsymbol{\sqrt{3}}$ $\quad \left(x=\dfrac{5}{12}\pi \text{のとき}\right)$

(3) $\sin x+\cos x=t$ とおく．両辺を 2 乗すると $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$ となり，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ を用いると $2\sin x\cos x=t^2-1$ となる．これを用いると

$$\begin{aligned} y &= 2t+(t^2-1)+1 \\ &= t^2+2t \\ &= (t+1)^2-1 \end{aligned}$$



ここで三角関数の合成より $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる．$0\leqq x\leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq \dfrac{5}{4}\pi$ となるから $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ となり，これより

$-1\leqq t\leqq \sqrt{2}$ となる．右上図から，$-1\leqq y\leqq 2+2\sqrt{2}$ となる．

$y=2+2\sqrt{2}$ となるのは $t=\sqrt{2} \iff x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2} \iff x=\dfrac{\pi}{4}$ のときであり，$y=-1$ となるのは $t=-1 \iff x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi \iff x=\pi$ のときである．以上より，

最大値は $\boldsymbol{2+2\sqrt{2}}$ $\quad \left(x=\dfrac{\pi}{4}\text{のとき}\right)$，最小値は $\boldsymbol{-1}$ $\quad (x=\pi \text{のとき})$

$\boxed{\textbf{75}}$ (1) $\angle B=\theta$ とおくと $\triangle$ABC において余弦定理より

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \cdots ①$$

$\angle D=\pi-\angle B=\pi-\theta$ であるから，$\triangle$CDA において余弦定理より

$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\theta) \iff x^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta \cdots ②$$

① $\times\, cd+$ ② $\times\, ab$ より

$$(ab+cd)x^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2) \cdots ③$$

この式の右辺は　　　＊：a の 2 次式とみて「たすき掛け」↓

$$③\text{の右辺} = cda^2 + b(c^2+d^2)a + b^2cd \overset{*}{=} (ca+bd)(da+bc)$$

と因数分解される．$x>0$ であるから，以上より，

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $\angle C = \phi$ とおくと △BCD において余弦定理より

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\phi \cdots ④$$

$\angle A = \pi - \angle C = \pi - \phi$ であるから，△DAB において余弦定理より

$$y^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos(\pi-\phi) \iff y^2 = d^2 + a^2 + 2da\cos\phi \cdots ⑤$$

④ $\times\, ad +$ ⑤ $\times\, bc$ より

$$(ad+bc)y^2 = ad(b^2+c^2) + bc(d^2+a^2) \cdots ⑥$$

この式の右辺は　　　＊：a の 2 次式とみて「たすき掛け」↓

$$⑥\text{の右辺} = bca^2 + d(b^2+c^2)a + bcd^2 \overset{*}{=} (ba+cd)(ca+bd)$$

と因数分解される．$y>0$ であるから，以上より，

$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} \quad \cdots(\text{答})$$

(3)　(1),(2) の結果より

$$xy = \sqrt{\frac{(ac+bd)\cancel{(ad+bc)}}{\cancel{(ab+cd)}} \times \frac{(ac+bd)\cancel{(ab+cd)}}{\cancel{(ad+bc)}}} = ac+bd$$

となり，トレミーの定理が示された．