

6 章 C 発展問題詳解

- 69** $AB = |2t^2 - (3t - 2)| = |2t^2 - 3t + 2|$ であるので, $AB > 0$ であることを示せばよい. ここで, $f(t) = 2t^2 - 3t + 2$ とおき, t の値に関わらず $f(t) > 0$ であることを示す.

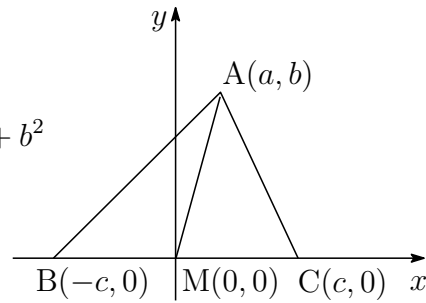
$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 - 3t + 2 = 2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right) + 2 \\ &= 2\left\{\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right\} + 2 = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \end{aligned}$$

以上より, 任意の実数 t について, A と B は異なる.

QED

- 70** $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ とおき, BC の中点 M が原点 O となるようにできる. このとき, 2 点間の距離の公式より

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2\{(a^2 + b^2) + c^2\} \\ &= 2(AM^2 + BM^2) \end{aligned}$$



$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

QED

- 71** 求める点を $B(x, y)$ とおく. $OB^2 = OA^2$, $OB^2 = AB^2$ より

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \dots\dots (1)$$

$$x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \quad \dots\dots (2)$$

ここで, (2) 式を整理すれば, $y = -x + 1$ となり, これを (1) に代入して整理すると次の 2 次方程式が得られる.

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

これを解くと $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ となる. B は第 2 象限にある点なので, $x < 0$ より, $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ となる. $y = -x + 1$ に代入し, $y = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ となり, $y > 0$ である. よって求める点は $B\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$

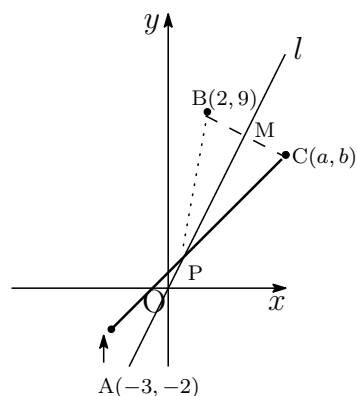
72 (1) 求める点を $C(a, b)$ とおくと線分 BC の中点 $M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+9}{2}\right)$ は直線 $l: y = 2x$ 上にあるので $\frac{b+9}{2} = a+2$ となり, これを整理して

$$2a - b = 5 \quad \dots\dots(*)$$

また, 線分 BC と直線 l は直交しているの
 $\frac{b-9}{a-2} \cdot 2 = -1$ となり, これを整理して

$$a + 2b = 20 \quad \dots\dots(**)$$

$(*) \times 2 + (**) \text{ より, } 5a = 30 \text{ となり, } a = 6,$
 これを $(*)$ に代入して $b = 7$. ゆえに, $C(6, 7)$



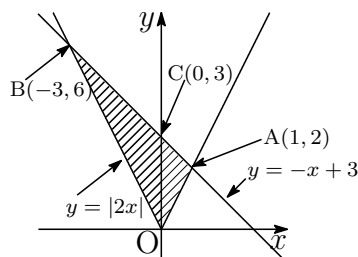
(2) M を線分 BC と直線 l との交点とする. このとき, $AP + PB$ が最小となる点 P の座標は, $\triangle PBM \equiv \triangle PCM$ であることから, 線分 AC と直線 l との交点である. ここで, 直線 AC の方程式は

$$y - (-2) = \frac{7 - (-2)}{6 - (-3)}(x - (-3))$$

より, $y = x + 1$ である. 線分 AC と直線 l との交点は $x + 1 = 2x$ より, $x = 1, y = 2$. よって, 求める点は $P(1, 2)$

73 まず, $y = |2x|$ は $x \geq 0$ であるとき, $y = 2x$ であり, $x < 0$ であるとき, $y = -2x$ である. このとき, $y = -x + 3$ と $y = 2x$ との交点の座標は $A(1, 2)$ であり, $y = -x + 3$ と $y = -2x$ との交点の座標は $B(-3, 6)$ である. さらに, 直線 $y = -x + 3$ と y 軸との交点の座標は $C(0, 3)$ であるので求める図形の面積 S は

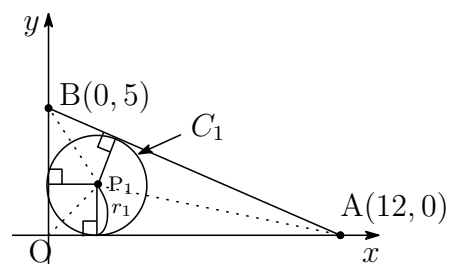
$$\begin{aligned} S &= (\triangle OCA \text{ の面積}) + (\triangle OCB \text{ の面積}) \\ &= 3 \times 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$



- 74 (1) まず、三平方の定理より $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ である. $\triangle OAB$ の面積を S , $\triangle P_1OA$ の面積を S_1 , $\triangle P_1AB$ の面積を S_2 , $\triangle P_1BO$ の面積を S_3 と表わせば

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= \frac{r_1}{2}(12 + 13 + 5) = 15r_1 = 30 \end{aligned}$$

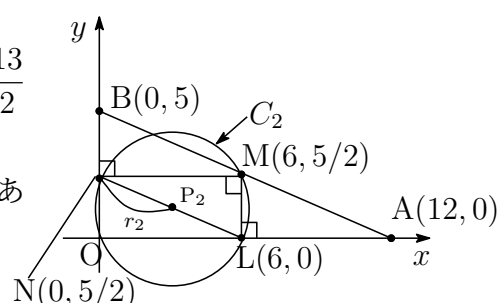
となるので, $r_1 = 2$. これより, 中心 P_1 の座標は $P_1(2, 2)$



- (2) まず, $\angle LMN = 90^\circ$ であるので $\triangle LMN$ の外接円は LN を直径とする円である.

$$LN = \sqrt{(6-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

より, $r_2 = \frac{13}{4}$. また, P_2 は LN の中点であるので $P_2\left(3, \frac{5}{4}\right)$

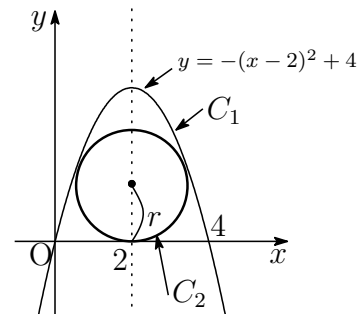


- 75 与えられた 2 次関数の標準形は

$$y = -(x-2)^2 + 4 \quad \dots\dots (1)$$

であるので, グラフは直線 $x = 2$ に対して対称である. これより, 求める円 C_2 の半径を r とおくと中心は $(2, r)$ とおける. よって, 求める円の方程式は

$$(x-2)^2 + (y-r)^2 = r^2 \quad \dots\dots (2)$$



ここで, (1) より $(x-2)^2 = -y + 4$ を (2) に代入して

$$-y + 4 + (y-r)^2 = r^2$$

これを整理して,

$$y^2 - (2r+1)y + 4 = 0 \quad \dots\dots (3)$$

が得られる. 放物線 C_1 と円 C_2 が接していることから 2 次方程式 (3) の判別式を D とすると $D = 0$ である.

$$\begin{aligned} D &= \{-(2r+1)\}^2 - 16 \\ &= (2r+1-4)(2r+1+4) = (2r-3)(2r+5) = 0 \end{aligned}$$

$r > 0$ であるので $r = \frac{3}{2}$. ゆえに, 円 C_2 の方程式は

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

76 $P(x, y)$ とおくと, 条件より $AP^2 = a^2 OP^2$ であるので

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

となる. これを整理すると

$$(a^2 - 1)x^2 + (a^2 - 1)y^2 + 2x - 1 = 0$$

ここで, $a > 0$ より, $a = 1$ のとき, 上式は $2x - 1 = 0$ となり, $x = \frac{1}{2}$

次に, $a \neq 1$ であるとき, $x^2 + y^2 + \frac{2}{a^2 - 1}x - \frac{1}{a^2 - 1} = 0$ より,

$$\left(x + \frac{1}{a^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{(a^2 - 1)^2} = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2}$$

以上より, $\left(x + \frac{1}{a^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{|a^2 - 1|}\right)^2$ となる. ゆえに

$$\begin{cases} a = 1 \text{ のとき, 直線 } x = \frac{1}{2} \\ a \neq 1 \text{ のとき, 中心 } \left(-\frac{1}{a^2 - 1}, 0\right) \text{ 半径 } \frac{a}{|a^2 - 1|} \text{ の円} \end{cases}$$

77 (i) 接線が y 軸と平行でないとき, 求める接線の傾きを m とすると点 $P(x_1, y_1)$ を通ることから接線の方程式は

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

とかける. これを $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入して両辺に $a^2 b^2$ を乗じると

$$b^2 x^2 + a^2 \{m(x - x_1) + y_1\}^2 = a^2 b^2$$

上式を展開して整理すると

$$\begin{aligned} & b^2 x^2 + a^2 (m^2 (x - x_1)^2 + 2m y_1 (x - x_1) + y_1^2) - a^2 b^2 = 0 \\ \iff & b^2 x^2 + a^2 (m^2 x^2 - 2m^2 x_1 x + m^2 x_1^2 + 2m y_1 x - 2m x_1 y_1 + y_1^2) - a^2 b^2 = 0 \\ \iff & (a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 (m y_1 - m^2 x_1) x + a^2 (m^2 x_1^2 - 2m x_1 y_1 + y_1^2 - b^2) = 0 \end{aligned}$$

ここで、 x_1 は上記の 2 次方程式の 2 重解であるので

$$-\frac{a^2(my_1 - m^2x_1)}{a^2m^2 + b^2} = x_1$$

これより、 $a^2(m^2x_1 - my_1) = x_1(a^2m^2 + b^2)$ となり $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ である。
ゆえに、求める接線の方程式は

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \quad \cdots \cdots (1)$$

(1) の両辺に a^2y_1 を乗じると

$$\begin{aligned} a^2y_1y &= -b^2x_1(x - x_1) + a^2y_1^2 \\ \iff b^2x_1x + a^2y_1y &= b^2x_1^2 + a^2y_1^2 \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

ここで、点 $P(x_1, y_1)$ は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点より

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

これを (2) に代入すれば $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ となる。また、楕円であることから $a > 0, b > 0$ としてよいので両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \cdots \cdots (3)$$

が得られる。

(ii) 接線が y 軸と平行なとき、接点 $P(x_1, y_1)$ は $P(\pm a, 0)$ である。これより、求める接線の方程式は $x = \pm a$ (複号同順) である。これは (3) において $x_1 = \pm a, y_1 = 0$ を代入したときの式となっている。

(i), (ii) より、接点 $P(x_1, y_1)$ であるときの接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

となる。

QED

78 (i) 接線が y 軸と平行でないとき、求める接線の傾きを m とすると点 $P(x_1, y_1)$ を通ることから接線の方程式は

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

とかける。これを $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入して両辺に a^2b^2 を乗じると

$$b^2x^2 - a^2\{m(x - x_1) + y_1\}^2 = a^2b^2$$

上式を展開して整理すると

$$\begin{aligned} & b^2x^2 - a^2(m^2(x-x_1)^2 + 2my_1(x-x_1) + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\ \iff & b^2x^2 - a^2(m^2x^2 - 2m^2x_1x + m^2x_1^2 + 2my_1x - 2mx_1y_1 + y_1^2) - a^2b^2 = 0 \\ \iff & (-a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2(my_1 - m^2x_1)x - a^2(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2 + b^2) = 0 \end{aligned}$$

ここで、 x_1 はこの 2 次方程式の 2 重解であるので

$$\frac{a^2(my_1 - m^2x_1)}{-a^2m^2 + b^2} = x_1$$

これより、 $a^2(m^2x_1 - my_1) = x_1(a^2m^2 - b^2)$ となり $m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ である。

ゆえに、求める接線の方程式は

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \quad \dots\dots (1)$$

(1) の両辺に a^2y_1 を乗じると

$$\begin{aligned} & a^2y_1y = b^2x_1(x - x_1) + a^2y_1^2 \\ \iff & b^2x_1x - a^2y_1y = b^2x_1^2 - a^2y_1^2 \quad \dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、点 $P(x_1, y_1)$ は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点より

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$$

これを (2) に代入すれば $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$ となる。また、双曲線であることから $a > 0, b > 0$ としてよいので両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \dots\dots (3)$$

が得られる。

(ii) 接線が y 軸と平行なとき、接点 $P(x_1, y_1)$ は $P(\pm a, 0)$ である。これより、求める接線の方程式は $x = \pm a$ (複号同順) である。これは (3) において $x_1 = \pm a, y_1 = 0$ を代入したときの式となっている。

(i), (ii) より、接点が $P(x_1, y_1)$ であるときの接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

となる。

QED

79 最小値を与える点を $P(x, y)$ とおくと $AP^2 = (x-2)^2 + y^2$ となる。 $P(x, y)$ は楕円上の点より $y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$ とかける。これを上式に代入して

$$AP^2 = (x-2)^2 + 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

ここで、 $y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \geq 0$ より、 $x^2 - 16 \leq 0$ となる．よって、 $-4 \leq x \leq 4$ である．これより、 AP^2 の $-4 \leq x \leq 4$ における最小値を求めればよい．

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x-2)^2 + 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 - 4x + 8 \\ &= \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{16}{3}x\right) + 8 = \frac{3}{4}\left\{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{64}{9}\right\} + 8 \\ &= \frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} + 8 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって、 AP^2 は $-4 \leq x \leq 4$ において $x = \frac{8}{3}$ のとき、最小値 $\frac{8}{3}$ を取る．

$$AP > 0 \text{ より、求める最小値は } AP = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

80 $Q(X, Y)$, $P(x, y)$ とする． AQ の中点が P であるので、 $x = \frac{X+6}{2}$, $y = \frac{Y}{2}$ とかける．よって、

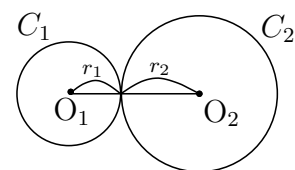
$$X = 2x - 6, Y = 2y \quad \dots\dots (1)$$

ここで、 $Q(X, Y)$ は放物線 $y^2 = 8x$ 上にあるので、 $Y^2 = 8X$ が成り立ち、(1) を $Y^2 = 8X$ に代入して整理すると

$$(2y)^2 = 8(2x - 6) \iff 4y^2 = 16(x - 3) \iff y^2 = 4(x - 3)$$

ゆえに、求める軌跡は、放物線 $y^2 = 4x$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線である．

81 一般に、円 C_1, C_2 が外接するというのは図の場合のときをいう．すなわち、 C_k の中心を O_k ($k = 1, 2$), 半径を r_k ($k = 1, 2$) とするとき、 $O_1O_2 = r_1 + r_2$ となるとき、2 円 C_1, C_2 は外接するという．



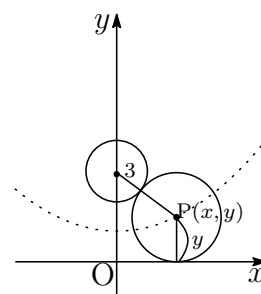
求める円の中心を $P(x, y)$ ($y > 0$) とおく．求める円は x 軸に接するので、半径は y である．さらに右図より

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 1 + y$$

であることから $x^2 + (y-3)^2 = (1+y)^2$ となる．展開して整理すると

$$x^2 = 8(y-1)$$

となる．ゆえに、求める軌跡は放物線 $x^2 = 8y$ を y 軸方向に 1 だけ平行移動した曲線である．



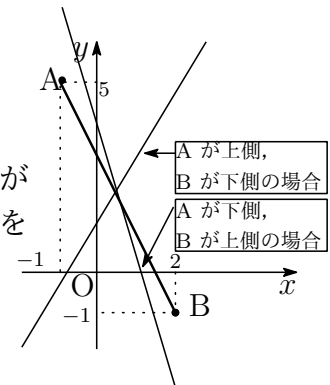
82 $l : y = (b-a)x - (3b+a)$ が線分 AB と共有点を持つということは、次の (i), (ii) の場合のときである。

(i) 点 A が l の上側かあるいは l 上の点で、点 B が l の下側かあるいは l 上の点であるときは次の不等式を満たす。

$$\begin{cases} 5 \geq (b-a)(-1) - (3b+a) & \cdots (1) \\ -1 \leq (b-a) \cdot 2 - (3b+a) & \cdots (2) \end{cases}$$

(ii) 点 A が l の下側かあるいは l 上の点で、点 B が l の上側かあるいは l 上の点であるときは次の不等式を満たす。

$$\begin{cases} 5 \leq (b-a)(-1) - (3b+a) & \cdots (3) \\ -1 \geq (b-a) \cdot 2 - (3b+a) & \cdots (4) \end{cases}$$



以上より、求める点 $P(a, b)$ の存在する領域は (1), (2) から、連立不等式

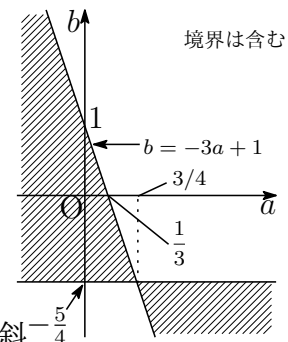
$$\begin{cases} b \geq -\frac{5}{4} & \cdots (1)' \\ b \leq -3a + 1 & \cdots (2)' \end{cases}$$

の表す領域か、あるいは (3), (4) から、連立不等式

$$\begin{cases} b \leq -\frac{5}{4} & \cdots (3)' \\ b \geq -3a + 1 & \cdots (4)' \end{cases}$$

の表す領域をあわせたものである。

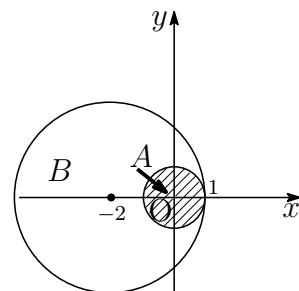
ゆえに、求める点 $P(a, b)$ の存在する領域は右図の斜線部部の部分で境界を含む。



83 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ は $x^2 + y^2 < 1$ であるので、この不等式の表す領域 A は、中心が原点、半径が 1 の円の内部で境界を含まない斜線部分である。また、 $x^2 + 4x + y^2 - 5 < 0$ は $(x+2)^2 + y^2 < 9$ とかけるので、この不等式の表す領域 B は、中心が $(-2, 0)$ 、半径が 3 の円の内部で境界を含まない部分である。

このとき、右図から分かるように、 $A \subset B$ であるので、 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ であれば、 $x^2 + 4x + y^2 - 5 < 0$ である。

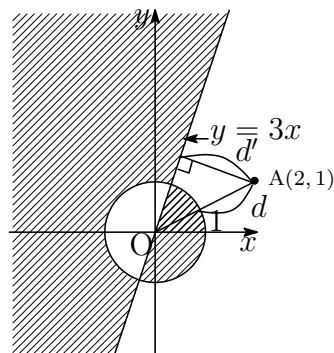
QED



- 84 不等式 $(3x - y)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$ の表す領域 D は次の (1), (2) の連立不等式の表す領域を合わせた領域である (右図参照).

$$\begin{cases} 3x - y \geq 0 \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \cdots (1) \\ 3x - y \leq 0 \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 - 1 \geq 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

このとき, 点 A から直線 $y = 3x$ へ下ろした垂線の長さを d' , $d = OA - 1$ とおくと, 最短距離は d か d' のいずれか小さい方である.



$$d' = \frac{|3 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad d = \sqrt{2^2 + 1^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$$

(d' の求め方は T1 基礎数学 第 6 章 演習問題 B 11 を参照) ここで, $a, b > 0$ のとき, $a > b \iff a^2 > b^2$ であることに注意すると

$$d^2 = 6 - 2\sqrt{5} < 6 - 2 \times 2.23 = 1.54 < (d')^2 = \frac{10}{4} = 2.5$$

より, d が最小値である. よって, 点 $A(2, 1)$ と領域との距離の最小値は $\sqrt{5} - 1$

- 85 a について整理すると

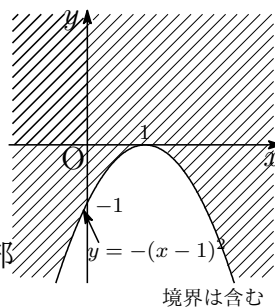
$$a^2 + 2xa + 2x - y - 1 = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

となる. ここで, 直線 l が点 (x, y) を通るためには (1) の判別式 D が $D \geq 0$ であればよい. これより,

$$D/4 = x^2 - (2x - y - 1) \geq 0$$

整理して

$$y \geq -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$$



ゆえに, 直線 l が通る領域は右図の斜線部部分で境界を含む.

- 86 $xy = k$ とおく.

(i) $k = 0$ のときは $xy = k = 0$ より, $x = 0$ あるいは $y = 0$ となるので $k = 0$ はとりうる値である.

(ii) $k \neq 0$ とする. このとき, $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ より,

$$y = \frac{k}{x} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \cdots \cdots (2)$$

が共有点を持つ条件を調べてみる.

(1) を (2) に代入して $x^2 + \left(\frac{k}{x}\right)^2 = 2$ より,

$$x^4 - 2x^2 + k^2 = 0 \quad \dots\dots (3)$$

ここで, $t = x^2$ とおくと (3) は

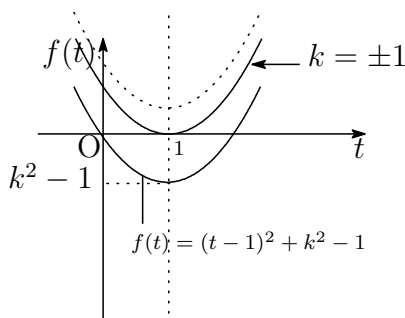
$$t^2 - 2t + k^2 = 0 \quad (t > 0) \quad \dots\dots (4)$$

とかける. このとき, (1) と (2) が共有点を持つためには (4) が正の実数解を持つことと同値である.

(4) が正の実数解を持つための条件を調べるために 2 次関数 $f(t) = t^2 - 2t + k^2$ を考える. ここで,

$$f(t) = t^2 - 2t + k^2 = (t - 1)^2 + k^2 - 1$$

であるので, $f(t)$ は頂点が $(1, k^2 - 1)$ で下に凸の 2 次関数である. これより, グラフは右図のようになるので (4) が正の実数解を持つためには $k^2 - 1 \leq 0$ を満たせばよい. ゆえに, $(k - 1)(k + 1) \leq 0$ より, $-1 \leq k \leq 1$ ($k \neq 0$) となる.



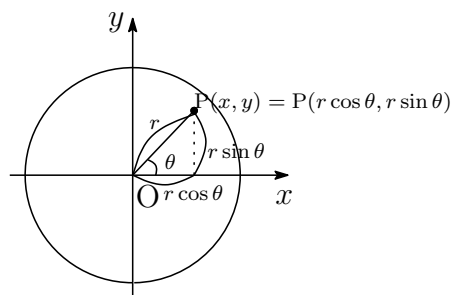
上記 (i), (ii) をあわせて, $-1 \leq xy \leq 1$

別解: 領域上の任意の点 $P(x, y)$ は原点 O から点 P までの距離 r と x 軸の正の方向と線分 OP とのなす角を θ とするとき, 次のように表すことができる.

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \dots\dots (0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

このとき,

$$\begin{aligned} xy &= r \cos \theta \cdot r \sin \theta \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{r^2}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$



ここで, $0 \leq \theta < 2\pi$ より, $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ である. これと (1) より,

$$-\frac{r^2}{2} \leq xy \leq \frac{r^2}{2}$$

さらに, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ から $-1 \leq xy \leq 1$

87 与えられた不等式は x, y の符号により, 次のように表せる.

$$x + y \leq 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0) \dots\dots (1)$$

$$x - y \leq 1 \quad (x \geq 0, y \leq 0) \dots\dots (2)$$

$$-x + y \leq 1 \quad (x \leq 0, y \geq 0) \dots\dots (3)$$

$$-x - y \leq 1 \quad (x \leq 0, y \leq 0) \dots\dots (4)$$

このとき, (1)~(4) の連立不等式の表す領域を合わせた領域が, $|x| + |y| \leq 1$ の領域である. ゆえに, 右図より, 求める領域の面積は $\frac{1}{2} \times 4 = 2$

