

52. 点 P を通る最短経路の数は, ${}_5C_2 \times {}_7C_3 = 350$. 点 Q を通る最短経路の数は, ${}_8C_4 \times {}_4C_1 = 280$. 2 点 P, Q の両方を通る最短経路の数は, ${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 120$. よって, 点 P または点 Q を通る最短経路の総数は, $350 + 280 - 120 = 510$.
53. $11^{10} = (10 + 1)^{10} = {}_{10}C_{10} \cdot 10^{10} + {}_{10}C_9 \cdot 10^9 + \cdots + {}_{10}C_0 \cdot 10^0$ であり, ${}_{10}C_r \cdot 10^r$ ($r = 1, 2, \dots, 10$) は 100 の倍数なので, 求める余りは, ${}_{10}C_0 \cdot 10^0 = 1$.
54. $\frac{{}_nC_{r-1}}{{}_nC_r} \leq 1$ かつ, $\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r} \leq 1$ となるような整数 r を求めればよいので, $\frac{n-1}{2} \leq r \leq \frac{n+1}{2}$. よって, n が奇数のとき, $r = \frac{n-1}{2}$ または $\frac{n+1}{2}$. n が偶数のとき, $r = \frac{n}{2}$.
55. ${}_pC_r = \frac{p!}{r!(p-r)!}$ より, ${}_pC_r \cdot r!(p-r)! = p!$. $p!$ は p の倍数であるが, $r!(p-r)!$ は p の倍数ではない. よって, ${}_pC_r$ は p の倍数.
56. (1) ある面に 6 色のうちの 1 色を塗る. その面と隣り合わない面 (対面) に別の色を塗る方法は 5 通り. 残りの 4 面に残りの 4 色を塗る方法は, $3! = 6$ 通り. よって, 求める塗り方は, $5 \times 6 = 30$ 通り. (2) 5 色を 6 面に塗るので, 2 面は同じ色であり, 対面になる. 残りの 4 面のうちの 1 面に残りの 4 色の中の 1 色を塗る. その面の対面の塗り方は 3 通り. 残りの 2 面には残りの 2 色を塗るが, 回転させればいずれも同じ塗り方になるので, 求める塗り方は, 3 通り.
57. (1) $T = 5$ となるのは, 00001, 10001, 11001, 11101 の 4 通り. (2) $T = t$ となるのは, 以下の $(t-1)$ 通り.
- $\overbrace{000 \cdots 00}^{(t-2) \text{ 個}} 01$
 $100 \cdots 0001$
 $110 \cdots 0001$
 $\dots\dots$
 $\dots\dots$
 $111 \cdots 1001$
 $111 \cdots 1101$
58. (1) 番号「 i 」がふられた頂点を「頂点 i 」と表すことにする. 三角形の頂点として, まず, 頂点 1 を選び, この点から時計回りの方向に並ぶ 3 つの頂点 2, 3, 4 の中から, 2 点を選んで三角形を作る場合の数は, ${}_3C_2 = 3$ 通り. これらの三角形は, 辺上, または内部に正八角形の中心をもたない. 同様に, 頂点 2 を選び, この点から時計回りの方向に並ぶ 3 つの頂点 3, 4, 5 の中から, 2 点を選んで三角形を作る場合の数も ${}_3C_2 = 3$ 通り. 頂点 8 まで同様に続けると, 辺上, または内部に正八角形の中心をもたない三角形の総数 $8 \times 3 = 24$ 通りが求まる. (2) 頂点 1 を選び, この点から時計回りの方向に並ぶ $\left(\frac{m}{2} - 1\right)$ 個の頂点の中から $(n-1)$ 個を選んで n 角形を作る場合の数は, ${}_{\frac{m}{2}-1}C_{n-1}$ 通り. この操作を頂点 m まで続けて, $m \times {}_{\frac{m}{2}-1}C_{n-1} = \frac{m \cdot \left(\frac{m}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{m}{2} - n\right)!(n-1)!}$ 通りが求まる.
59. (1) 3 つのボールを 3 つの箱に分ける方法の総数は, 3 つの「○」と 2 つの仕切り「|」を一行に並べる場合の数と一致するので, ${}_5C_3 = 10$ 通り. (2) ${}_{m+n-1}C_m = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}$ (3) $n = 1$ のときは, $S(m, n) = 1$.

$n > 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
 S(m, n) &= {}_{m+n-1}C_m \\
 &= {}_{m+n-2}C_m + {}_{m+n-2}C_{m-1} \\
 &= S(m, n-1) + {}_{m+n-3}C_{m-1} + {}_{m+n-3}C_{m-2} \\
 &= S(m, n-1) + S(m-1, n-1) + {}_{m+n-4}C_{m-2} + {}_{m+n-4}C_{m-3} \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=0}^m S(i, n-1)
 \end{aligned}$$

60. (1) 二項定理より,

$$\begin{aligned}
 a_n &= {}_nC_0 \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \dots + {}_nC_{n-1} \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + {}_nC_n \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

(2) $1 - \frac{r}{n+1} > 1 - \frac{r}{n}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$) なので, (1) の結果より,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
 &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
 &= a_n + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
 &> a_n
 \end{aligned}$$

(3) $1 - \frac{r}{n} < 1$, $\frac{1}{(r+1)!} \leq \frac{1}{2^r}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$) なので,

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3
 \end{aligned}$$