『ステップ＆チェック 微分方程式』章末問題の解答

2021年9月30日（数理工学社）

[３章の章末演習問題]

1 の解答

(1)　与式は $y' = \left(2xe^{x^2}\right)\left(\dfrac{e^{-y^3}}{3y^2}\right)$ であるので，変数分離形の微分方程式である．両辺を $\dfrac{e^{-y^3}}{3y^2}$ で割り，積分すると，

$$\int \left(3y^2 e^{y^3}\right)\,dy = \int \left(2xe^{x^2}\right)\,dx + C$$

より，一般解は

$$e^{y^3} = e^{x^2} + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(2)　与式は $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{1-y^2}$ であるので，変数分離形の微分方程式である．両辺を $\sqrt{1-y^2}$ で割り，積分すると，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + C$$

より，一般解は

$$\sin^{-1} y = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(3)　与式は $y' = \left(4x^3 - 1\right)\left(\dfrac{e^{-y}+2}{2}\right)$ であるので，変数分離形の微分方程式である．両辺を $\dfrac{e^{-y}+2}{2}$ で割り，積分すると，

$$\int \left(\frac{2}{e^{-y}+2}\right)\,dy = \int \left(4x^3-1\right)\,dx + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

について，

$$\text{左辺} = \int \left(\frac{2}{e^{-y}+2}\right)\,dy = \int \left(\frac{2e^y}{1+2e^y}\right)\,dy = \log(1+2e^y)$$

$$\text{右辺} = \int \left(4x^3-1\right)\,dx + C = x^4 - x + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

より，一般解は

$$\log(1+2e^y) = x^4 - x + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(4)　与式は $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)\{y(y+1)\}$ であるので，変数分離形の微分方程式である．両辺を $y(y+1)$ で割り，積分すると，

$$\int \left\{\frac{1}{y(y+1)}\right\}\,dy = \int \left(\frac{1}{x}\right)\,dx + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

について，

$$\text{左辺} = \int \left\{ \frac{1}{y(y+1)} \right\} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log \left(\frac{y}{y+1} \right)$$

$$\text{右辺} = \int \left(\frac{1}{x} \right) dx + c = \log x + c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

より，一般解は

$$\log \left(\frac{y}{y+1} \right) = \log x + c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

これを変形すれば，

$$y = \frac{Cx}{1 - Cx} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

が得られる．ただし，$C = e^c$ とおいた．

(5)　同次形の微分方程式であるので，$y = xz$ と変数変換すると，

$$z' = \left(\frac{1}{x} \right) \left(e^{-z} \right)$$

となり，変数分離形の微分方程式が得られる．従って，両辺を e^{-z} で割り積分すると，

$$\int e^z \, dz = \int \frac{1}{x} \, dx + C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

より，

$$e^z = \log x + C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

を得る．$z = \dfrac{y}{x}$ を代入して，一般解は

$$e^{\frac{y}{x}} = \log x + C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

となる．変形すれば，

$$y = x \log (\log x + C) \qquad (C\text{ は任意定数})$$

が得られる．

(6)　与式の右辺の分子分母を x^2 で割ると，

$$y' = -\frac{\dfrac{4x}{y}}{2 + \left(\dfrac{y}{x} \right)^2}$$

となり同次形の微分方程式であるので，$y = xz$ と変数変換すると，

$$z' = \left(-\frac{1}{x} \right) \left(\frac{z^3 + 6z}{z^2 + 2} \right)$$

となり，変数分離形の微分方程式が得られる．従って，両辺を $\dfrac{z^3 + 6z}{z^2 + 2}$ で割り積分すると，

$$\int \left(\frac{z^2 + 2}{z^3 + 6z} \right) dz = -\int \frac{1}{x} \, dx + c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

より，

$$\frac{1}{3}\log\left(z^3+6z\right)=-\log x+c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

を得る．$z=\dfrac{y}{x}$ を代入して変形すると，一般解は

$$y^3+6x^2y=C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

となる．ただし，$C=e^{3c}$ である．

(7)　**[例]3.3** の (i) の場合であるので，α，β を定数として，$\xi=x-\alpha$，$\eta=y-\beta$ とおき，与式に代入すると，連立１次方程式

$$\begin{cases}\alpha-\beta-1=0\\ \alpha+2\beta+2=0\end{cases}$$

の解：$\alpha=0$，$\beta=-1$ のとき，同次形の微分方程式

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1-\dfrac{\eta}{\xi}}{1+2\dfrac{\eta}{\xi}}$$

が得られる．$\eta=\xi z$ と変数変換すると，

$$z'=\left(-\frac{1}{\xi}\right)\left(\frac{2z^2+2z-1}{2z+1}\right)$$

となり，変数分離形の微分方程式が得られる．従って，両辺を $\dfrac{2z^2+2z-1}{2z+1}$ で割り積分すると，

$$\int\left(\frac{2z+1}{2z^2+2z-1}\right)dz=-\int\frac{1}{\xi}\,d\xi+c_1 \qquad (c_1\text{は任意定数})$$

より，

$$\frac{1}{2}\log\left(2z^2+2z-1\right)=-\log\xi+c_1 \qquad (c_1\text{は任意定数})$$

を得る．$z=\dfrac{\eta}{\xi}$ を代入して変形すると，一般解は

$$2\eta^2+2\xi\eta-\xi^2=c_2 \qquad (c_2\text{は任意定数})$$

となる．ただし，$c_2=e^{2c_1}$ である．$\xi=x$，$\eta=y+1$ を代入すれば，

$$2(y+1)^2+2x(y+1)-x^2=c_2 \qquad (c_2\text{は任意定数})$$

より，展開して整理すると，

$$-x^2+2x+2xy+2y^2+4y=C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

が一般解である．ただし，$C=c_2-2$ である．

(8)　**[例]3.3** の (ii) の場合であるので，$z = x - y$ とおくと，$z' = 1 - y'$ より，与式は

$$z' = -\frac{z+1}{z-2}$$

となり，変数分離形の微分方程式が得られる．従って，両辺を $\dfrac{z+1}{z-2}$ で割り積分すると，

$$\int \left(\frac{z-2}{z+1}\right) dz = -\int dx + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int \left(\frac{z-2}{z+1}\right) dz = \int \left(1 - \frac{3}{z+1}\right) dz = z - 3\log(z+1) \\ \text{右辺} &= -\int dx + C = -x + C \quad (C \text{ は任意定数}) \end{aligned} \tag{1}$$

より，$z = x - y$ を代入して変形すると，一般解は

$$x - y - 3\log(x - y + 1) = -x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる．整理すると，

$$2x - y - 3\log(x - y + 1) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる．

2 の解答

(1)　非同次方程式の両辺に積分因子 $\mu(x)$ をかけ，左辺を $(\mu(x)y)'$ と比較すれば，$\mu(x)$ に関する変数分離形の微分方程式

$$\mu'(x) = \frac{5}{x}\mu(x)$$

が得られる．これから，任意定数を c として

$$\mu(x) = cx^5$$

となるが，$c = 1$ として積分因子 $\mu(x) = x^5$ とする．これをもとの微分方程式の両辺にかけた式は，

$$(x^5 y)' = \frac{2}{x}$$

となり，両辺を x で積分すれば，

$$x^5 y = 2\log x + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

より，非同次方程式の一般解は

$$y = \frac{2\log x + C}{x^5} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2)　非同次方程式の両辺に積分因子 $\mu(x)$ をかけ，左辺を $(\mu(x)y)'$ と比較すれば，$\mu(x)$ に関する変数分離形の微分方程式

$$\mu'(x) = (-\tan x)\,\mu(x)$$

が得られる．これから，

$$\mu(x) = c\cos x \qquad (c \text{ は任意定数})$$

となるが，$c = 1$ として積分因子 $\mu(x) = \cos x$ とする．これをもとの微分方程式の両辺にかけた式は，

$$(y\cos x)' = 3\cos x\sin^2 x$$

となり，両辺を x で積分すれば，

$$y\cos x = \sin^3 x + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

より，非同次方程式の一般解は

$$y = \frac{\sin^3 x + C}{\cos x} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(3) 同次方程式 $y' + \dfrac{2x}{x^2-1}y = 0$ は，変数分離形の微分方程式

$$y' = -\frac{2x}{x^2-1}y$$

であるので．積分すると，

$$y = \frac{c}{x^2-1} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

が得られる．定数変化法を利用する．$c = z(x)$ とおいて，$y = z\dfrac{1}{x^2-1}$ と $y' = z'\dfrac{1}{x^2-1} - z\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ をもとの微分方程式に代入すると，

$$z' = \frac{2(x^2-1)}{x} = 2x - \frac{2}{x}$$

が得られる．両辺を x で積分すれば，

$$z = x^2 - 2\log x + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が求まる．従って，非同次方程式の一般解は

$$y = \frac{x^2 - 2\log x + C}{x^2-1} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる．

(4) 同次方程式 $y' - 2xy = 0$ は，変数分離形の微分方程式

$$y' = 2xy$$

であるので．積分すると，

$$y = ce^{x^2} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

が得られる．定数変化法を利用する．$c = z(x)$ とおいて，$y = ze^{x^2}$ と $y' = z'e^{x^2} + z\left(2xe^{x^2}\right)$ をもとの微分方程式に代入すると，

$$z' = 2e^{2x}$$

が得られる．両辺を x で積分すれば，

$$z = e^{2x} + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が求まる．従って，非同次方程式の一般解は

$$y = e^{x^2}\left(e^{2x} + C\right) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる．

(5)　与式の両辺を y^3 でわって $z = y^{-2}$ と変数変換すると，

$$z' - z = -2e^{-x}$$

となるので．非同次線形微分方程式に帰着する．積分因子 $\mu(x)$ を両辺にかけて, 左辺が $(\mu(x)z)'$ となる条件を求めると，変数分離形の微分方程式

$$\mu'(x) = -\mu(x)$$

が得られる．これから，任意定数を c として

$$\mu(x) = ce^{-x}$$

となるが，$c = 1$ として積分因子 $\mu(x) = e^{-x}$ とする．これから，

$$\left(e^{-x}z\right)' = -2e^{-2x}$$

となり，両辺を積分して整理すると，

$$z = e^{-x} + Ce^{x} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が求まる．従って，$y^2 = \dfrac{1}{z}$ より，一般解は

$$y^2 = \frac{1}{e^{-x} + Ce^{x}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である．

(6)　与式の両辺を y^4 でわって $z = y^{-3}$ と変数変換すると，

$$z' - 2xz = -6x$$

となるので．非同次線形微分方程式に帰着する．積分因子 $\mu(x)$ を両辺にかけて, 左辺が $(\mu(x)z)'$ となる条件を求めると，変数分離形の微分方程式

$$\mu'(x) = -2x\mu(x)$$

が得られる．これから，任意定数を c として

$$\mu(x) = ce^{-x^2}$$

となるが，$c = 1$ として積分因子 $\mu(x) = e^{-x^2}$ とする．これから，

$$\left(e^{-x^2} z\right)' = -6xe^{-x^2}$$

となり，両辺を積分して整理すると，

$$z = 3 + Ce^{x^2} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が求まる．従って，$y^3 = \dfrac{1}{z}$ より，一般解は

$$y^3 = \frac{1}{3 + Ce^{x^2}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である．

3 の解答

(1) $P(x,\, y) = 2xy^2 + 3x^2y + 1$，$Q(x,\, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^2$ とおいて，完全微分形であるかどうかを確認する．

$$\frac{\partial P(x,\, y)}{\partial y} = 4xy + 3x^2,$$

$$\frac{\partial Q(x,\, y)}{\partial x} = 3x^2 + 4xy$$

より完全微分形である．従って，

$$\begin{aligned}
U(x,\, y) &= \int_{x_0}^{x} \left(2\xi y^2 + 3\xi^2 y + 1\right) d\xi + \int_{y_0}^{y} \left(x_0^3 + 2x_0^2\eta + 3\eta^2\right) d\eta \\
&= \Big[\xi^2 y^2 + \xi^3 y + \xi\Big]_{x_0}^{x} + \Big[x_0^3\eta + x_0^2\eta^2 + \eta^3\Big]_{y_0}^{y} \\
&= \left\{\left(x^2y^2 + x^3y + x\right) - \left(x_0^2y^2 + x_0^3y + x_0\right)\right\} + \left\{\left(x_0^3y + x_0^2y^2 + y^3\right) - \left(x_0^3y_0 + x_0^2y_0^2 + y_0^3\right)\right\} \\
&= x^2y^2 + x^3y + x + y^3 - x_0 - x_0^3y_0 - x_0^2y_0^2 - y_0^3 = c \qquad (c \text{ は任意定数})
\end{aligned}$$

が得られる．これから，

$$x^2y^2 + x^3y + x + y^3 = C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が求まる．ただし，$C = c + x_0 + x_0^3y_0 + x_0^2y_0^2 + y_0^3$ とおいた．

(2) $P(x,\, y) = e^y \sin x + e^{-x}\cos y - 2x$，$Q(x,\, y) = e^{-x}\sin y - e^y \cos x + \log y$ とおいて，完全微分形であるかどうかを確認する．

$$\frac{\partial P(x,\, y)}{\partial y} = e^y \sin x - e^{-x}\sin y,$$

$$\frac{\partial Q(x,\, y)}{\partial x} = -e^{-x}\sin y + e^y \sin x$$

より完全微分形である．従って，

$$
\begin{aligned}
U(x,\,y)=& \int_{x_0}^{x} \left(e^y\sin\xi + e^{-\xi}\cos y - 2\xi\right)\,d\xi + \int_{y_0}^{y}\left(e^{-x_0}\sin\eta - e^{\eta}\cos x_0 + \log\eta\right)\,d\eta \\
&= \Big[-e^y\cos\xi - e^{-\xi}\cos y - \xi^2\Big]_{x_0}^{x} + \Big[-e^{-x_0}\cos\eta - e^{\eta}\cos x_0 + \eta\log\eta - \eta\Big]_{y_0}^{y} \\
&= \left\{\left(-e^y\cos x - e^{-x}\cos y - x^2\right) - \left(-e^y\cos x_0 - e^{-x_0}\cos y - x_0^2\right)\right\} \\
&\quad + \left\{\left(-e^{-x_0}\cos y - e^{y}\cos x_0 + y\log y - y\right) - \left(-e^{-x_0}\cos y_0 - e^{y_0}\cos x_0 + y_0\log y_0 - y_0\right)\right\} \\
&= -e^y\cos x - e^{-x}\cos y - x^2 + y\log y - y + x_0^2 + e^{-x_0}\cos y_0 + e^{y_0}\cos x_0 - y_0\log y_0 + y_0 \\
&= c \qquad (c\text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

が得られる．これから，

$$
-e^y\cos x - e^{-x}\cos y - x^2 + y\log y - y = C \qquad (C\text{ は任意定数})
$$

が求まる．ただし，$C = c - x_0^2 - e^{-x_0}\cos y_0 - e^{y_0}\cos x_0 + y_0\log y_0 - y_0$ とおいた．

(3) $P(x,\,y) = 2y^3 + 6xy$，$Q(x,\,y) = 3xy^2 + 2x^2$ とおいて，完全微分形であるかどうかを確認する．

$$
\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y} = 6y^2 + 6x,
$$

$$
\frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x} = 3y^2 + 4x
$$

より完全微分形ではない．一方，

$$
\left(\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{Q(x,\,y)}\right) = \frac{1}{x}
$$

より，x のみの関数であるので，積分因子 $\mu(x)$ に関する変数分離形の微分方程式

$$
\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{x}\mu(x)
$$

が得られる．これから，

$$
\mu(x) = cx \qquad (c\text{ は任意定数})
$$

が求まるが，$c = 1$ として，$\mu(x) = x$ とする．与式の両辺に x をかけた式は，

$$
x(2y^3 + 6xy)dx + x(3xy^2 + 2x^2)dy = 0
$$

となるが，これは完全微分形であることがわかる．従って，一般解

$$
\begin{aligned}
U(x,\,y)=& \int_{x_0}^{x}\left(2\xi y^3 + 6\xi^2 y\right)\,d\xi + \int_{y_0}^{y}\left(3x_0^2\eta^2 + 2x_0^3\right)\,d\eta \\
&= \Big[\xi^2 y^3 + 2\xi^3 y\Big]_{x_0}^{x} + \Big[x_0^2\eta^3 + 2x_0^3\eta\Big]_{y_0}^{y} \\
&= \left\{\left(x^2y^3 + 2x^3y\right) - \left(x_0^2y^3 + 2x_0^3y\right)\right\} + \left\{\left(x_0^2y^3 + 2x_0^3y\right) - \left(x_0^2y_0^3 + 2x_0^3y_0\right)\right\} \\
&= x^2y^3 + 2x^3y - x_0^2y_0^3 - 2x_0^3y_0 = c \qquad (c\text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

が得られる．これから，

$$
x^2y^3 + 2x^3y = C \qquad (C\text{ は任意定数})
$$

が求まる．ただし，$C = c + x_0^2y_0^3 + 2x_0^3y_0$ とおいた．

(4) $P(x,\,y)=y\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)$，$Q(x,\,y)=2xe^{-x}$ とおいて，完全微分形であるかどうかを確認する．

$$\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y}=e^{-x}-xe^{-x},$$

$$\frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x}=2\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)$$

より完全微分形ではない．一方，

$$\left(\frac{\partial Q(x,\,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,\,y)}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{P(x,\,y)}\right)=\frac{1}{y}$$

より，y のみの関数であるので，積分因子 $\mu(y)$ に関する変数分離形の微分方程式

$$\frac{d\mu(y)}{dy}=\left(\frac{1}{y}\right)\mu(y)$$

が得られる．これから，

$$\mu(y)=cy \qquad (c\text{ は任意定数})$$

が求まるが，$c=1$ として，$\mu(y)=y$ とする．与式の両辺に y をかけた式は，

$$y^2\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)dx+2yxe^{-x}dy=0$$

となるが，これは完全微分形であることがわかる．従って，一般解

$$\begin{aligned}U(x,\,y)&=\int_{x_0}^{x}\left(y^2e^{-\xi}-y^2\xi e^{-\xi}\right)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}\left(2x_0e^{-x_0}\eta\right)\,d\eta\\&=\Big[y^2\xi e^{-\xi}\Big]_{x_0}^{x}+\Big[x_0e^{-x_0}\eta^2\Big]_{y_0}^{y}\\&=\left(y^2xe^{-x}-y^2x_0e^{-x_0}\right)+\left(y^2x_0e^{-x_0}-y_0^2x_0e^{-x_0}\right)\\&=xe^{-x}y^2-x_0e^{-x_0}y_0^2=c \qquad (c\text{ は任意定数})\end{aligned}$$

が得られる．これから，

$$xe^{-x}y^2=C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

が求まる．ただし，$C=c+x_0e^{-x_0}y_0^2$ とおいた．

4 の解答

(1) 与式の両辺を x で微分して整理すると，

$$p'\left(x-\frac{2}{p^2}\right)=0$$

が得られる．$p'=0$ の場合，$p=C$（C は任意定数）より与式に代入すれば，一般解は

$$y=Cx+\frac{2}{C} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である．一方，$x-\dfrac{2}{p^2}=0$ の場合，p をパラメータとする表示として，特異解

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{p^2} \\ y=\dfrac{4}{p} \end{cases}$$

が得られる．p を消去すれば，

$$y^2=8x$$

が得られる．

(2) 与式の両辺を x で微分して整理すると，

$$p'\left(x-2e^p\right)=0$$

が得られる．$p'=0$ の場合，$p=C$（C は任意定数）より与式に代入すれば，一般解は

$$y=Cx-2e^C \quad （C \text{ は任意定数}）$$

である．一方，$x-2e^p=0$ の場合，p をパラメータとする表示として，特異解

$$\begin{cases} x=2e^p \\ y=2e^p(p-1) \end{cases}$$

が得られる．$p=\log\dfrac{x}{2}$ であるので，消去すれば，

$$y=x\log\frac{x}{2}-x$$

が得られる．

[４章の章末演習問題]

1 の解答

(1)　特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 110 = (\lambda + 10)(\lambda - 11) = 0$$

となるので，解は -10 と 11 である．従って，基本解は e^{-10x} と e^{11x} であるので，一般解は

$$y = C_1 e^{-10x} + C_2 e^{11x} \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(2)　特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda - 17 = \left\{\lambda - \left(1 + 3\sqrt{2}\right)\right\}\left\{\lambda - \left(1 - 3\sqrt{2}\right)\right\} = 0$$

となるので，解は $1 \pm 3\sqrt{2}$ である．従って，基本解は $e^{\left(1+3\sqrt{2}\right)x}$ と $e^{\left(1-3\sqrt{2}\right)x}$ であるので，一般解は

$$y = C_1 e^{\left(1+3\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{\left(1-3\sqrt{2}\right)x} \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(3)　特性方程式は

$$\lambda^2 + 14\lambda + 49 = (\lambda + 7)^2 = 0$$

となるので，解は -7（重解）である．従って，基本解は e^{-7x} と xe^{-7x} であるので，一般解は

$$y = e^{-7x}(C_1 + C_2 x) \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

で与えられる．

(4)　特性方程式は

$$\lambda^2 + 81 = (\lambda + 9i)(\lambda - 9i) = 0$$

となるので，解は $\pm 9i$ である．従って，基本解は $\cos 9x$ と $\sin 9x$ であるので，一般解は

$$y = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(5)　特性方程式は

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = \{\lambda - (-4 + 3i)\}\{\lambda - (-4 - 3i)\} = 0$$

となるので，解は $-4 \pm 3i$ である．従って，基本解は $e^{-4x}\cos 3x$ と $e^{-4x}\sin 3x$ であるので，一般解は

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(6)　特性方程式は

$$\lambda^2 - 6\lambda + 12 = \left\{\lambda - \left(3 + \sqrt{3}i\right)\right\}\left\{\lambda - \left(3 - \sqrt{3}i\right)\right\} = 0$$

となるので，解は $3 \pm \sqrt{3}i$ である．従って，基本解は $e^{3x}\cos\sqrt{3}x$ と $e^{3x}\sin\sqrt{3}x$ であるので，一般解は

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right) \quad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

2 の解答

(1)　同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

となるので，解は -2（重解）である．従って，2つの基本解を $y_1 = e^{-2x}$ と $y_2 = xe^{-2x}$ とすると，ロンスキアンは

$$W[e^{-2x},\, xe^{-2x}] = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

であるので，非同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2x)\,e^{-2x} - e^{-2x}\int\left(\frac{2e^{-2x}xe^{-2x}}{x^3e^{-4x}}\right)dx + xe^{-2x}\int\left(\frac{2e^{-2x}e^{-2x}}{x^3e^{-4x}}\right)dx \\ &= (C_1 + C_2x)\,e^{-2x} - e^{-2x}\int\frac{2}{x^2}\,dx + xe^{-2x}\int\frac{2}{x^3}\,dx \\ &= (C_1 + C_2x)\,e^{-2x} - e^{-2x}\left(-\frac{2}{x}\right) + xe^{-2x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= (C_1 + C_2x)\,e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} \quad (C_1,\, C_2\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．

(2)　同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 25 = (\lambda + 5i)(\lambda - 5i) = 0$$

となるので，解は $\pm 5i$ である．従って，2つの基本解を $y_1 = \cos 5x$ と $y_2 = \sin 5x$ とすると，ロンスキアンは

$$W[\cos 5x,\, \sin 5x] = \begin{vmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -5\sin 5x & 5\cos 5x \end{vmatrix} = 5$$

であるので，非同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos 5x + C_2\sin 5x - \cos 5x\int\left(\frac{25\sin 5x}{5\sin 5x}\right)dx + \sin 5x\int\left(\frac{25\cos 5x}{5\sin 5x}\right)dx \\ &= C_1\cos 5x + C_2\sin 5x - 5x\cos 5x + \sin 5x\log(\sin 5x) \quad (C_1,\, C_2\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．

(3)　同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = \{\lambda - (1+i)\}\{\lambda - (1-i)\} = 0$$

となるので，解は $1 \pm i$ である．従って，２つの基本解を $y_1 = e^x \cos x$ と $y_2 = e^x \sin x$ とすると，ロンスキアンは

$$W[e^x \cos x,\, e^x \sin x] = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

であるので，非同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y &= e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - e^x \cos x \int \left\{ \frac{(e^x)(e^x \sin x)}{(\cos x)(e^{2x})} \right\} dx + e^x \sin x \int \left\{ \frac{(e^x)(e^x \cos x)}{(\cos x)(e^{2x})} \right\} dx \\ &= e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x \cos x \log(\cos x) + x e^x \sin x \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．

(4)　同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

となるので，解は -1（重解）である．従って，２つの基本解を $y_1 = e^{-x}$ と $y_2 = xe^{-x}$ とすると，ロンスキアンは

$$W[e^{-x},\, xe^{-x}] = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

であるので，非同次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} - e^{-x} \int \left\{ \frac{(4e^{-x} \log x)(xe^{-x})}{e^{-2x}} \right\} dx + xe^{-x} \int \left\{ \frac{(4e^{-x} \log x)(e^{-x})}{e^{-2x}} \right\} dx \\ &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} - 4e^{-x} \int (x \log x)\, dx + 4xe^{-x} \int \log x\, dx \\ &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} - 4e^{-x} \left(\frac{2x^2 \log x - x^2}{4} \right) + 4xe^{-x}(x \log x - x) \\ &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x^2 e^{-x} (2 \log x - 3) \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．

3 の解答

(1)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 20 = (\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0$$

となるので，解は -4，5 である．従って余関数は

$$C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x} \qquad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．$P(D) = D^2 - D - 20$ とすると，非同次項 $ke^{\alpha x}$ において $k = 10$，$\alpha = 6$ の場合であるので，

$$P(6) = 6^2 - 6 - 20 = 10 \neq 0$$

である．よって，特殊解 y_0 は

$$y_0 = \frac{1}{P(D)}\left(10e^{6x}\right) = 10\frac{1}{P(D)}e^{6x} = 10 \times \frac{1}{P(6)}e^{6x} = e^{6x}$$

であり，従って一般解は

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x} + e^{6x} \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

6 は特性方程式の解ではないので，特殊解 y_0 を $y_0 = Ae^{6x}$ とおくと，

$$\begin{aligned} y_0' &= 6Ae^{6x} \\ y_0'' &= 36Ae^{6x} \end{aligned}$$

より，y_0，y_0'，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$36Ae^{6x} - 6Ae^{6x} - 20 \times Ae^{6x} = 10Ae^{6x} = 10e^{6x}$$

から，$10A = 10$ を解くと $A = 1$ であるので，特殊解は $y_0 = e^{6x}$ である．従って一般解は

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x} + e^{6x} \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(2)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda - 21 = (\lambda + 3)(\lambda - 7) = 0$$

となるので，解は -3 と 7 である．従って余関数は

$$C_1 e^{-3x} + C_2 e^{7x} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．$P(D) = D^2 - 4D - 21$ とすると，非同次項 $ke^{\alpha x}$ において $k = 10$，$\alpha = -3$ の場合であるので，-3 は特性方程式の多重度 1 の解である（$P(-3) = (-3)^2 - 4 \times (-3) - 21 = 0$）．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{D^2 - 4D - 21}\left(10e^{-3x}\right) = 10\left\{\frac{1}{(D+3)(D-7)}e^{-3x}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{D-7} - \frac{1}{D+3}\right)e^{-3x} = \frac{1}{D-7}e^{-3x} - \frac{1}{D+3}e^{-3x} \\ &= \left(\frac{1}{-3-7}e^{-3x}\right) - \left(\frac{x}{1}e^{-3x}\right) \\ &= -\frac{e^{-3x}}{10} - xe^{-3x} \end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-3x} + C_2e^{7x} - \frac{e^{-3x}}{10} - xe^{-3x} \\ &= C_3e^{-3x} + C_2e^{7x} - xe^{-3x} \qquad (C_2,\ C_3\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．ただし，$C_3 = C_1 - \dfrac{1}{10}$ とおいた.

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

-3 は特性方程式の多重度 1 の解であるので，特殊解 y_0 を $y_0 = Axe^{-3x}$ とおくと，

$$\begin{aligned} y_0' &= Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} \\ y_0'' &= -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \end{aligned}$$

より，y_0，y_0'，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned} &-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} - 4 \times \left(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}\right) - 21 \times Axe^{-3x} \\ &= -10Ae^{-3x} \\ &= 10e^{-3x} \end{aligned}$$

から，$-10A = 10$ を解くと $A = -1$ であるので，特殊解は $y_0 = -xe^{-3x}$ である．従って一般解は

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{7x} - xe^{-3x} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である.

(3)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 3 = \left(\lambda + \sqrt{3}\right)\left(\lambda - \sqrt{3}\right) = 0$$

となるので，解は $\pm\sqrt{3}$ である．従って余関数は

$$C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．$P(D) = D^2 - 3$ とすると，非同次項 $k\cos\beta x$ において $k = -1$，$\beta = 2$ の場合であるので，

$$P(2i) = (2i)^2 - 3 = -7 \neq 0$$

である．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned} y_0 &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}\left(-e^{2ix}\right)\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(2i)}e^{2ix}\right\} \\ &= -\mathrm{Re}\left\{\frac{\cos 2x + i\sin 2x}{-7}\right\} \\ &= \frac{\cos 2x}{7} \end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\cos 2x}{7} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

$2i$ は特性方程式の解ではないので，特殊解 y_0 を $y_0 = A\cos 2x + B\sin 2x$ とおくと，

$$\begin{aligned} y_0' &= 2B\cos 2x - 2A\sin 2x \\ y_0'' &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \end{aligned}$$

より，y_0，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned} &-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 3\times(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ &= -7A\cos 2x - 7B\sin 2x \\ &= -\cos 2x \end{aligned} \tag{2}$$

から，連立１次方程式

$$\begin{cases} -7A = -1 \\ -7B = 0 \end{cases}$$

を解くと $A = \dfrac{1}{7}$，$B = 0$ であるので，特殊解は $y_0 = \dfrac{\cos 2x}{7}$ である．従って一般解は

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\cos 2x}{7} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．

(4)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 64 = (\lambda + 8i)(\lambda - 8i) = 0$$

となるので，解は $\pm 8i$ である．従って余関数は

$$C_1\cos 8x + C_2\sin 8x \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．特殊解 y_0 については，非同次項 $q(x)$ が２つの関数 $q_1(x) = 16\cos 8x$ と $q_2(x) = 16\sin 8x$ の和で与えられているので，$q_1(x) = k_1\cos\beta x$ において，$k_1 = 16$，$\beta_1 = 8$ の場合，$q_2(x) = k_2\sin 8x$ において，$k_2 = 16$，$\beta_2 = 2$ の場合であるので，$P(D) = D^2 + 64$ とすると，いずれの場合も $8i$ は特性

方程式の多重度 1 の解である（$P(8i) = (8i)^2 + 64 = 0$）．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned}
y_0 &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}\left(16e^{8ix}\right)\right\} + \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{P(D)}\left(16e^{8ix}\right)\right\} \\
&= 16 \times \left[\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{D^2+64}e^{8ix}\right\} + \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{D^2+64}e^{8ix}\right\}\right] \\
&= 16 \times \left[\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{D-8i}\left(\frac{1}{D+8i}e^{8ix}\right)\right\} + \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{D-8i}\left(\frac{1}{D+8i}e^{8ix}\right)\right\}\right] \\
&= 16 \times \left[\mathrm{Re}\left[\frac{1}{D-8i}\left\{\frac{1}{(8i+8i)}e^{8ix}\right\}\right] + \mathrm{Im}\left[\frac{1}{D-8i}\left\{\frac{1}{(8i+8i)}e^{8ix}\right\}\right]\right] \\
&= 16 \times \left\{\mathrm{Re}\left(\frac{xe^{8ix}}{16i}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{xe^{8ix}}{16i}\right)\right\} \\
&= 16 \times \left\{\mathrm{Re}\left(\frac{x\cos 8x + ix\sin 8x}{16i}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{x\cos 8x + ix\sin 8x}{16i}\right)\right\} \\
&= x\sin 8x - x\cos 8x
\end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y = C_1\cos 8x + C_2\sin 8x + x\sin 8x - x\cos 8x \quad (C_1,\, C_2 \text{は任意定数})$$

である．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

$8i$ は特性方程式の多重度 1 の解であるので，特殊解 y_0 を $y_0 = x^1\left\{A\cos 8x + B\sin 8x\right\}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
y_0' &= A\cos 8x + B\sin 8x + 8Bx\cos 8x - 8Ax\sin 8x \\
y_0'' &= 16B\cos 8x - 16A\sin 8x - 64Ax\cos 8x - 64Bx\sin 8x
\end{aligned}$$

より，y_0，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned}
&16B\cos 8x - 16A\sin 8x - 64Ax\cos 8x - 64Bx\sin 8x + 64 \times (Ax\cos 8x + Bx\sin 8x) \\
&= 16B\cos 8x - 16A\sin 8x \\
&= 16\cos 8x + 16\sin 8x
\end{aligned}$$

から，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 16B = 16 \\ -16A = 16 \end{cases}$$

を解くと $A = -1$，$B = 1$ であるので，特殊解は $y_0 = -x\cos 8x + x\sin 8x$ である．従って一般解は

$$y = C_1\cos 8x + C_2\sin 8x - x\cos 8x + x\sin 8x \quad (C_1,\, C_2 \text{は任意定数})$$

(5)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 11\lambda + 30 = (\lambda - 5)(\lambda - 6) = 0$$

となるので，解は 5 と 6 である．従って余関数は

$$C_1e^{5x}+C_2e^{6x} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．$P(D)=D^2-11D+30$ とすると，非同次項 $ke^{\alpha x}\cos\beta x$ において $k=2$，$\alpha=5$，$\beta=1$ の場合であるので，

$$P(5+i)=(5+i)^2-11\times(5+i)+30=-1-i\neq 0$$

である．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned}
y_0 &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{P(D)}\left\{2e^{(5+i)x}\right\}\right]=2\times\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(5+i)}e^{(5+i)x}\right\}\\
&=2\times\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{5x}\left(\cos x+i\sin x\right)}{-1-i}\right\}\\
&=\mathrm{Re}\left\{e^{5x}(\cos x+i\sin x)(-1+i)\right\}\\
&=-e^{5x}\left(\cos x+\sin x\right)
\end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{6x}-e^{5x}\left(\cos x+\sin x\right) \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．
（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）
　$5+i$ は特性方程式の解ではないので，特殊解 y_0 を $y_0=e^{5x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
y_0' &= e^{5x}\left\{(5A+B)\cos x+(-A+5B)\sin x\right\}\\
y_0'' &= e^{5x}\left\{(24A+10B)\cos x+(-10A+24B)\sin x\right\}
\end{aligned}$$

より，y_0，y_0'，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned}
&e^{5x}\left\{(24A+10B)\cos x+(-10A+24B)\sin x\right\}\\
&\quad -11\times e^{5x}\left\{(5A+B)\cos x+(-A+5B)\sin x\right\}\\
&\quad +30\times e^{5x}\left(A\cos x+B\sin x\right)\\
&=e^{5x}\left\{(-A-B)\cos x+(A-B)\sin x\right\}\\
&=2e^{5x}\cos x
\end{aligned} \tag{3}$$

から，連立１次方程式

$$\begin{cases} -A-B=2\\ A-B=0\end{cases}$$

を解くと $A=-1$，$B=-1$ であるので，特殊解は $y_0=-e^{5x}\left(\cos x+\sin x\right)$ である．従って一般解は

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{6x}-e^{5x}\left(\cos x+\sin x\right) \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(6)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = \{\lambda - (3+i)\}\{\lambda - (3-i)\} = 0$$

となるので，解は $3 \pm i$ である．従って余関数は

$$e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．$P(D) = D^2 - 6D + 10$ とすると，非同次項 $ke^{\alpha x}\cos\beta x$ において $k = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 1$ の場合であるので，$3+i$ は特性方程式の多重度 1 の解である（$P(3+i) = (3+i)^2 - 6\times(3+i) + 10 = 0$）．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned}
y_0 &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{P(D)}\left\{2e^{(3+i)x}\right\}\right] \\
&= 2\times\mathrm{Re}\left[\frac{1}{D-(3+i)}\left\{\frac{1}{D-(3-i)}e^{(3+i)x}\right\}\right] \\
&= 2\times\mathrm{Re}\left[\frac{1}{D-(3+i)}\left\{\frac{1}{(3+i-3+i)}e^{(3+i)x}\right\}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{xe^{(3+i)x}}{i}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{xe^{3x}(\cos x + i\sin x)}{i}\right\} \\
&= xe^{3x}\sin x
\end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^{3x}\sin x \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

である．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

$3+i$ は特性方程式の多重度 1 の解であるので，特殊解を $y_0 = xe^{3x}(A\cos x + B\sin x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
y_0' &= e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + xe^{3x}\{(3A+B)\cos x + (-A+3B)\sin x\} \\
y_0'' &= e^{3x}\{(6A+2B)\cos x + (-2A+6B)\sin x\} + xe^{3x}\{(8A+6B)\cos x + (-6A+8B)\sin x\}
\end{aligned}$$

より，y_0，y_0'，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned}
&e^{3x}\{(6A+2B)\cos x + (-2A+6B)\sin x\} + xe^{3x}\{(8A+6B)\cos x + (-6A+8B)\sin x\} \\
&-6\left[e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + xe^{3x}\{(3A+B)\cos x + (-A+3B)\sin x\}\right] \\
&+10xe^{3x}(A\cos x + B\sin x) \\
&= 2Be^{3x}\cos x - 2Ae^{3x}\sin x \\
&= 2e^{3x}\cos x
\end{aligned}$$

から，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2B = 2 \\ -2A = 0 \end{cases}$$

を解くと $A=0$，$B=1$ であるので，特殊解は $y_0 = xe^{3x}\sin x$ である．従って一般解は

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + xe^{3x}\sin x \quad （C_1,\ C_2 \text{は任意定数}）$$

である．

(7)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$$

となるので，解は 1 と -4 である（$\lambda \neq 0$）．従って余関数は

$$C_1e^{x} + C_2e^{-4x} \quad （C_1,\ C_2 \text{は任意定数}）$$

である．非同次項は１次の多項式（$l=1$）であり，$P(D) = D^2 + 3D - 4$ とすると，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{D^2+3D-4}(4x-3) = \frac{1}{(D-1)(D+4)}(4x-3)\\
&= \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{D-1} - \frac{1}{D+4}\right\}(4x-3)\\
&= \frac{1}{5}\left\{-(1+D)(4x-3) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}D\right)(4x-3)\right\}\\
&= \frac{1}{5}\left\{-(4x+1) - (x-1)\right\}\\
&= -x
\end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} - x \quad （C_1,\ C_2 \text{は任意定数}）$$

である．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

0 は特性方程式の解ではない．よって特殊解を $y_0 = \sum_{j=0}^{1} A_jx^j = A_1x + A_0$ とおくと，

$$\begin{aligned}
y_0' &= A_1\\
y_0'' &= 0
\end{aligned}$$

より，y_0，y_0'，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned}
&0 + 3A_1 - 4(A_1x + A_0)\\
&= -4A_1x + (3A_1 - 4A_0)\\
&= 4x - 3
\end{aligned} \tag{4}$$

から，連立１次方程式

$$\begin{cases} -4A_1 = 4\\ 3A_1 - 4A_0 = -3 \end{cases}$$

を解くと $A_0=0$，$A_1=-1$ であるので，特殊解は $y_0=-x$ である．従って一般解は

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}-x \quad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．

(8)（記号解法）

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2-9=(\lambda+3)(\lambda-3)=0$$

となるので，解は ± 3 である．従って余関数は

$$C_1e^{-3x}+C_2e^{3x} \quad (C_1,\, C_2\text{は任意定数})$$

である．$P(D)=D^2-9$ として，非同次項 $q(x)=r(x)e^{\alpha x}$ において $r(x)=36x$（次数 $l=1$），$\alpha=3$ の場合であり，3 は特性方程式の多重度 1 の解である（$P(3)=3^2-9=0$）．よって特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{P(D)}\left(36xe^{3x}\right)\\
&= 6\times\left(\frac{1}{D-3}-\frac{1}{D+3}\right)\left(xe^{3x}\right)\\
&= 6\times e^{3x}\left(\frac{1}{D+3-3}x-\frac{1}{D+3+3}x\right)\\
&= 6\times e^{3x}\left(\frac{1}{D}x-\frac{1}{D+6}x\right)\\
&= 6\times e^{3x}\left\{\int x\,dx-\frac{1}{6}\left(1-\frac{D}{6}\right)x\right\}\\
&= 6\times e^{3x}\left\{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}\right)\right\}\\
&= e^{3x}\left(3x^2-x+\frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y=C_1e^{-3x}+C_3e^{3x}+e^{3x}\left(3x^2-x\right) \quad (C_1,\, C_3\text{は任意定数})$$

である．ただし，$C_3=C_2+\dfrac{1}{6}$ とおいた．

（未定係数法）（余関数の求め方については省略する）

3 は特性方程式の多重度 1 の解であるので，特殊解 y_0 を $y_0=x^1e^{3x}\displaystyle\sum_{j=0}^{1}A_jx^j=e^{3x}(A_1x^2+A_0x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
y_0' &= e^{3x}\left\{3A_1x^2+(2A_1+3A_0)x+A_0\right\}\\
y_0'' &= e^{3x}\left\{9A_1x^2+(12A_1+9A_0)x+(2A_1+6A_0)\right\}
\end{aligned}$$

より，y_0，y_0'' を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$
\begin{aligned}
&e^{3x}\left\{9A_1x^2+(12A_1+9A_0)x+(2A_1+6A_0)\right\}-9\left\{e^{3x}(A_1x^2+A_0x)\right\}\\
&=e^{3x}\left\{12A_1x+(2A_1+6A_0)\right\}\\
&=36xe^{3x}
\end{aligned}
$$

から，連立１次方程式

$$
\begin{cases}
12A_1=36\\
2A_1+6A_0=0
\end{cases}
$$

を解くと $A_0=-1$，$A_1=3$ であるので，特殊解は $y_0=3x^2-x$ である．従って一般解は

$$
y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}+e^{3x}\left(3x^2-x\right)\qquad (C_1,\, C_2 \text{は任意定数})
$$

である．

[5章の章末演習問題]

1 の解答

(1)　特性方程式は

$$\lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

となるので，解は 0，± 3 である．従って，基本解は 1，e^{3x}，e^{-3x} であるので，一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} \quad （C_1,\ C_2,\ C_3 \text{は任意定数}）$$

である．

(2)　特性方程式は

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80 = (\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 4\lambda + 40\right) = (\lambda + 2)\{\lambda - (-2 + 6i)\}\{\lambda - (-2 - 6i)\} = 0$$

となるので，解は -2，$-2 \pm 6i$ である．従って，基本解は e^{-2x}，$e^{-2x}\cos 6x$，$e^{-2x}\sin 6x$ であるので，一般解は

$$y = C_1 e^{-2x} + e^{-2x}(C_2 \cos 6x + C_3 \sin 6x) \quad （C_1,\ C_2,\ C_3 \text{は任意定数}）$$

である．

(3)　特性方程式は

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 32\lambda - 32 = (\lambda - 2)^2\left(\lambda^2 - 8\right) = (\lambda - 2)^2\left(\lambda + 2\sqrt{2}\right)\left(\lambda - 2\sqrt{2}\right) = 0$$

となるので，解は 2（重解），$\pm 2\sqrt{2}$ である．従って基本解は，e^{2x}，xe^{2x}，$e^{2\sqrt{2}x}$，$e^{-2\sqrt{2}x}$ であるので，一般解は

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{2\sqrt{2}x} + C_4 e^{-2\sqrt{2}x} \quad （C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{は任意定数}）$$

である．

(4)　特性方程式は

$$\begin{aligned}\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25 &= (\lambda + 5)^2 - 4\lambda^2 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right)\\ &= \{\lambda - (1 + 2i)\}\{\lambda - (1 - 2i)\}\{\lambda - (-1 + 2i)\}\{\lambda - (-1 - 2i)\} = 0\end{aligned}$$

となるので，解は $1 \pm 2i$，$-1 \pm 2i$ である．従って，基本解は $e^x \cos 2x$，$e^x \sin 2x$，$e^{-x}\cos 2x$，$e^{-x}\sin 2x$ であるので，一般解は

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) \quad （C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{は任意定数}）$$

である．

2 の解答

(1)　特性方程式は

$$\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+5=(\lambda+1)\left(\lambda+\sqrt{5}i\right)\left(\lambda-\sqrt{5}i\right)=0$$

となるので，解は -1，$\pm\sqrt{5}i$ である．従って，基本解は e^{-x}，$\cos\sqrt{5}x$，$\sin\sqrt{5}x$，であるので，余関数は

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos\sqrt{5}x+C_3\sin\sqrt{5}x \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3\text{は任意定数})$$

である．$P(D)=D^3+D^2+5D+5$ とすると，非同次項 $ke^{\alpha x}$ において $k=18$，$\alpha=2$ の場合であるので，

$$P(2)=2^3+2^2+5\times2+5=27\neq0$$

より特殊解 y_0 は（4.36）式を利用すると，

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{P(D)}18e^{2x}=18\times\frac{1}{P(2)}e^{2x} \\ &= \frac{18}{27}e^{2x}=\frac{2}{3}e^{2x} \end{aligned}$$

であり，従って一般解は

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos\sqrt{5}x+C_3\sin\sqrt{5}x+\frac{2}{3}e^{2x} \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3\text{は任意定数})$$

である．

(2)　特性方程式は

$$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2=\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

となるので，解は 0（重解），-1（重解）である．従って，基本解は 1，x，e^{-x}，xe^{-x} であるので，余関数は

$$y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x) \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\text{は任意定数})$$

である．$P(D)=D^4+2D^3+D^2$ とすると，非同次項 $q(x)=r(x)$ は 2 次の多項式の場合であるから，零は多重度 2 の特性方程式の解である（$P(0)=0^4+2\times0^3+0^2=0$）．よって，第 4 章の未定係数法の分類 (IV) の場合に従って特殊解を $y_0=x^2\displaystyle\sum_{j=0}^{2}A_jx^j=A_2x^4+A_1x^3+A_0x^2$ とおくと，

$$\begin{aligned} y_0' &= 4A_2x^3+3A_1x^2+2A_0x \\ y_0'' &= 12A_2x^2+6A_1x+2A_0 \\ y_0''' &= 24A_2x+6A_1 \\ y_0^{(4)} &= 24A_2 \end{aligned}$$

より，y_0''，y_0'''，$y_0^{(4)}$ を与式に代入して非同次項と比較すると，

$$\begin{aligned} &24A_2+2(24A_2x+6A_1)+\left(12A_2x^2+6A_1x+2A_0\right) \\ &=12A_2x^2+(6A_1+48A_2)x+(2A_0+12A_1+24A_2) \\ &=4x^2-2x+2 \end{aligned}$$

から，連立１次方程式

$$\begin{cases} 12A_2 = 4 \\ 6A_1 + 48A_2 = -2 \\ 2A_0 + 12A_1 + 24A_2 = 2 \end{cases}$$

を解くと $A_0 = 15$，$A_1 = -3$，$A_2 = \dfrac{1}{3}$ であるので，特殊解は $y_0 = \dfrac{x^4}{3} - 3x^3 + 15x^2$ である．従って一般解は

$$y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x) + \frac{x^4}{3} - 3x^3 + 15x^2 \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{は任意定数})$$

である．

3 の解答

(1)　$y_1 = x$ について，$y_1' = 1$，$y_1'' = 0$ を与式に代入すると，

$$0 - \left(\frac{x+2}{x}\right) + \left(\frac{x+2}{x^2}\right) x = 0$$

より同次方程式の特殊解である．$y = zx$ とおくと，$y' = z'x + z$，$y'' = z''x + 2z'$ である．y，y'，y'' を同次方程式に代入すると，

$$z''x + 2z' - \left(\frac{x+2}{x}\right)(z'x + z) + \left(\frac{x+2}{x^2}\right) zx = 0$$

より，$u = z'$ とおくと，

$$u' - u = 0$$

となるので，変数分離形である．積分すれば，

$$u = C_1 e^x \qquad (C_1 \text{は任意定数})$$

である．よって，この式の両辺を積分して，

$$z = C_1 e^x + C_2 \qquad (C_2 \text{は任意定数})$$

が得られる．従って一般解は

$$y = C_1 x e^x + C_2 x \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．

(2)　$y_1 = e^x$ について，$y_1' = e^x$，$y_1'' = e^x$ を与式に代入すると，

$$e^x - \left(1 + \frac{3}{x}\right) e^x + \frac{3}{x} e^x = 0$$

より同次方程式の特殊解である．$y = ze^x$ とおくと，$y' = z'e^x + ze^x$，$y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x$ である．y，y'，y'' を同次方程式に代入すると，

$$z''e^x + 2z'e^x + ze^x - \left(1 + \frac{3}{x}\right)(z'e^x + ze^x) + \frac{3}{x}ze^x = 0$$

より，$u = z'$ とおくと，

$$u' + \left(1 - \frac{3}{x}\right)u = 0$$

となるので，変数分離形である．積分すれば，

$$u = C_1 x^3 e^{-x} \qquad (C_1\text{は任意定数})$$

である．よって，この式の両辺を積分して，

$$z = C_1 \int x^3 e^{-x}\,dx + C_2 = C_1\left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right)e^{-x} + C_2 \qquad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．従って一般解は

$$y = C_1\left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right) + C_2 e^x \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(3)　$y_1 = e^x$ について，$y_1' = e^x$，$y_1'' = e^x$ を与式に代入すると，

$$e^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x - \left(2 - \frac{1}{x}\right)e^x = 0$$

より同次方程式の特殊解である．$y = ze^x$ とおくと，$y' = z'e^x + ze^x$，$y'' = z''e^x + 2z'e^x + ze^x$ である．y，y'，y'' を非同次方程式に代入すると，

$$z''e^x + 2z'e^x + ze^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right)(z'e^x + ze^x) - \left(2 - \frac{1}{x}\right)ze^x = 6x$$

より，$u = z'$ とおくと，

$$u' + \left(3 - \frac{1}{x}\right)u = 6xe^{-x}$$

となるので，１階非同次線形微分方程式である．積分因子を μ とすれば,

$$\mu' = \left(3 - \frac{1}{x}\right)\mu$$

となるので，変数分離形である．これから μ は,

$$\mu = c\frac{e^{3x}}{x} \qquad (c\text{ は任意定数})$$

である．$c = 1$ とすると,

$$\begin{aligned} u &= \frac{6x}{e^{3x}}\int e^{2x}\,dx + C_1\frac{x}{e^{3x}} \\ &= 3xe^{-x} + C_1 xe^{-3x} \qquad (C_1\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．よって，この式の両辺を積分して，

$$z = -3(x+1)e^{-x} + C_1\left(\frac{-3x-1}{9}\right)e^{-3x} + C_2 \quad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．従って一般解は

$$y = -3(x+1) + C_3(3x+1)e^{-2x} + C_2e^x \quad (C_2,\ C_3\text{は任意定数})$$

ただし，$C_3 = -\dfrac{C_1}{9}$ とした．

(4) $y_1 = \dfrac{e^x}{x^2}$ について，$y_1' = e^x\left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)$，$y_1'' = e^x\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^4}\right)$ を与式に代入すると，

$$e^x\left(\frac{x^2-4x+6}{x^4}\right) + e^x\left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{x-2}{x^3}\right) + \left(\frac{2-x^2}{x^2}\right)\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = 0$$

より同次方程式の特殊解である．$y = z\dfrac{e^x}{x^2}$ とおくと，

$$y' = z'\frac{e^x}{x^2} + ze^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right),\ y'' = z''\frac{e^x}{x^2} + 2z'e^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right) + ze^x\left(\frac{x^2-4x+6}{x^4}\right)$$

である．y，y'，y'' を非同次方程式に代入すると，

$$z''\frac{e^x}{x^2}+2z'e^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right)+ze^x\left(\frac{x^2-4x+6}{x^4}\right)+\left(\frac{4}{x}\right)\left\{z'\frac{e^x}{x^2}+ze^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right)\right\}+\left(\frac{2-x^2}{x^2}\right)\left(z\frac{e^x}{x^2}\right) = 1$$

より，$u = z'$ とおくと，

$$u' + 2u = x^2e^{-x}$$

となるので，１階非同次線形微分方程式である．積分因子を μ とすれば，

$$\mu' = 2\mu$$

となるので，変数分離形である．これから μ は，

$$\mu = ce^{2x} \quad (c\text{ は任意定数})$$

である．$c = 1$ とすると，

$$\begin{aligned} u &= e^{-2x}\int x^2e^x\,dx + C_1e^{-2x} \\ &= e^{-x}\left(x^2-2x+2\right) + C_1e^{-2x} \quad (C_1\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．よって，この式の両辺を積分して，

$$z = -(x^2+2)e^{-x} - C_1\frac{e^{-2x}}{2} + C_2 \quad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．従って一般解は

$$y = -\frac{x^2+2}{x^2} + C_3\frac{e^{-x}}{x^2} + C_2\frac{e^x}{x^2} \quad (C_2,\ C_3\text{は任意定数})$$

ただし，$C_3 = -\dfrac{C_1}{2}$ とした．

4 の解答

(1)　与式を変形すると，$y'' + \dfrac{2x}{x^2+1}y' - \dfrac{1}{(x^2+1)^2}y = 0$ となるが，標準形となるように $t = \varphi(x)$ と変数変換する．(5.23) 式により，

$$\varphi(x) = \int \exp\left[-\int\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\right]dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x$$

のとき，標準形

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

が得られる．この同次方程式の特性方程式の解は

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

より，±1 であるので，基本解は e^t，e^{-t} である．従って一般解は

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t = \tan^{-1}x$ として，一般解は

$$y = C_1e^{\tan^{-1}x} + C_2e^{-\tan^{-1}x} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

となる．

(2)　与式を変形すると，$y'' + \dfrac{2}{2x+1}y' - \dfrac{12}{(2x+1)^2}y = \dfrac{4x+1}{(2x+1)^2}$ となるが，標準形となるように $t = \varphi(x)$ と変数変換する．(5.23) 式により，

$$\varphi(x) = \int \exp\left[-\int\left(\frac{2}{2x+1}\right)dx\right]dx = \int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{\log(2x+1)}{2}$$

のとき，$x = \dfrac{e^{2t}-1}{2}$ であるので，標準形

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 12y = 2e^{2t} - 1$$

が得られる．この方程式の同次方程式の特性方程式の解は

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 12 = \left(\lambda + 2\sqrt{3}\right)\left(\lambda - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

より，$\pm2\sqrt{3}$ であるので，基本解は $e^{2\sqrt{3}t}$，$e^{-2\sqrt{3}t}$ である．特殊解については，非同次項は 2 つの項になっているので，それぞれについて計算する．$q_1(x) = ke^{\alpha t}$ については，$k = 2$，$\alpha = 2$ の場合であるので，$P(D) = D^2 - 12$ とおくと，

$$P(2) = 2^2 - 12 = -8 \neq 0$$

であるので，この項に対する特殊解 y_{01} は

$$\begin{aligned} y_{01} &= \frac{1}{P(D)}\left(2e^{2t}\right) = 2\frac{1}{P(2)}\left(e^{2t}\right) \\ &= 2 \times \frac{e^{2t}}{(-8)} = -\frac{e^{2t}}{4} \end{aligned}$$

である．もう１つの項である $q_2(x)=1$ は定数関数の場合であり，$P(D)=D^2-12$ とおくと，

$$P(0)=0^2-12=-12\neq 0$$

である．よって，第４章の未定係数法の分類 (IV) の場合に従って特殊解を $y_{02}=A_0$ とおくと，

$$\frac{dy_{02}}{dt}=0$$
$$\frac{d^2y_{02}}{dt^2}=0$$

より，y_{02}，$\dfrac{d^2y_{02}}{dt^2}$ を標準形の式に代入して非同次項と比較すると，$0-12A_0=-1$ から，$A_0=\dfrac{1}{12}$ であるので，特殊解は $y_{02}=\dfrac{1}{12}$ である．

従って一般解は，特殊解の和と余関数から

$$y=C_1e^{2\sqrt{3}t}+C_2e^{-2\sqrt{3}t}-\frac{e^{2t}}{4}+\frac{1}{12}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t=\dfrac{\log(2x+1)}{2}$，$e^{2t}=2x+1$ として，一般解は

$$y=C_1e^{\sqrt{3}\log(2x+1)}+C_2e^{-\sqrt{3}\log(2x+1)}-\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(3)　$x=e^t$，$t=\log x$ と変数変換すると，$xy'=\dfrac{dy}{dt}$，$x^2y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$ を与式に代入すると，定数係数の非同次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}-40y=0$$

が得られる．この同次方程式の特性方程式の解は

$$P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-40=(\lambda-8)(\lambda+5)=0$$

より，8，-5 であるので，基本解は e^{8t}，e^{-5t} である．従って一般解は

$$y=C_1e^{8t}+C_2e^{-5t}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t=\log x$ として，一般解は

$$y=C_1x^8+C_2\frac{1}{x^5}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(4)　$x=e^t$，$t=\log x$ と変数変換すると，$xy'=\dfrac{dy}{dt}$，$x^2y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$ を与式に代入すると，定数係数の非同次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+13y=0$$

が得られる．この同次方程式の特性方程式の解は

$$P(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+13=\{\lambda-(-2+3i)\}\{\lambda-(-2-3i)\}=0$$

より，$-2 \pm 3i$ であるので，基本解は $e^{-2t}\cos 3t$，$e^{-2t}\sin 3t$ である．従って一般解は

$$y = e^{-2t}\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t = \log x$ として，一般解は

$$y = \frac{1}{x^2}\left\{C_1 \cos\left(3\log x\right) + C_2 \sin\left(3\log x\right)\right\} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(5) $x = e^t$，$t = \log x$ と変数変換すると，$xy' = \dfrac{dy}{dt}$，$x^2 y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$ を与式に代入すると，定数係数の非同次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 2\cos t$$

が得られる．この方程式の同次方程式の特性方程式の解は

$$P\left(\lambda\right) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \left(\lambda - 1\right)^2 = 0$$

より，1（重解）であるので，基本解は e^t，te^t である．非同次項 $k\cos\beta t$ において，$k = 2$，$\beta = 1$ の場合であり，$P(D) = D^2 - 2D + 1$ とおくと，

$$P(i) = (i)^2 - 2 \times i + 1 = -2i \neq 0$$

である．よって，特殊解 y_0 は

$$\begin{aligned} y_0 &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}\left(2e^{it}\right)\right\} = 2 \times \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(i)}\left(e^{it}\right)\right\} \\ &= 2 \times \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}}{(-2i)}\right\} = \mathrm{Re}\left(-\sin t + i\cos t\right) = -\sin t \end{aligned}$$

である．従って一般解は

$$y = e^t\left(C_1 + C_2 t\right) - \sin t \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t = \log x$ として，一般解は

$$y = C_1 x + C_2 x \log x - \sin\left(\log x\right) \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(6) $x = e^t$，$t = \log x$ と変数変換すると，$xy' = \dfrac{dy}{dt}$，$x^2 y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$ を与式に代入すると，定数係数の非同次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2$$

が得られる．この方程式の同次方程式の特性方程式の解は

$$P\left(\lambda\right) = \lambda^2 + 1 = \left(\lambda + i\right)\left(\lambda - i\right) = 0$$

より, $\pm i$ であるので, 基本解は $\cos t, \sin t$ である．非同次項 $q(t)$ は 2 次の多項式であり, $P(D) = D^2 + 1$ とおくと,

$$P(0) = 0^2 + 1 = 1 \neq 0$$

である．よって，特殊解 $y_0 = \sum_{j=0}^{2} A_j t^j = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{dy_0}{dt} &= 2A_2 t + A_1 \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= 2A_2\end{aligned}$$

より，y_0，$\dfrac{d^2 y_0}{dt^2}$ を $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + y = t^2$ に代入して非同次項と比較すると，

$$2A_2 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0 = A_2 t^2 + A_1 t + (A_0 + 2A_2) = t^2$$

から，連立１次方程式

$$\begin{cases} A_2 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_0 + 2A_2 = 0 \end{cases}$$

を解くと $A_0 = -2$，$A_1 = 0$，$A_2 = 1$ であるので，特殊解は $y_0 = t^2 - 2$ である．従って一般解は

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t^2 - 2 \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

であるので，$t = \log x$ として，一般解は

$$y = C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x) + (\log x)^2 - 2 \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

5 の解答

(1) $x = 0$ において，$p_1(x) = -x$ と $p_2(x) = -1$ は解析的であるので，$x = 0$ は正則点である．解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき，$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$，$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ を与式に代入すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \left\{ (n+2) a_{n+2} - a_n \right\} \right] x^n = 0\end{aligned}$$

より，漸化式

$$(n+2) a_{n+2} - a_n = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が得られる．この漸化式は，２項ごとの番号で与えられているので，偶数番目（$n = 2m$）と奇数番目（$n = 2m+1$）（$m = 1,\ 2,\ \cdots$）に分けて得られることになる．それぞれ，

$$\begin{aligned}a_{2m} &= \frac{a_{2m-2}}{2m} = \cdots = \frac{a_0}{(2m)(2m-2)\cdots 2} = \frac{1}{(2m)!!} a_0 \left(= \frac{1}{2^m m!} a_0 \right) \\ a_{2m+1} &= \frac{a_{2m-1}}{2m+1} = \cdots = \frac{a_1}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} = \frac{1}{(2m+1)!!} a_1 \left(= \frac{2^m m!}{(2m+1)!} a_1 \right)\end{aligned}$$

となるが，$a_0 = 1$, $a_1 = 0$ の場合の解を $y_1 = 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!!} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!!} x^{2m}$，$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ の場合の解を $y_2 = x + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!!} x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$ とおくと，y_1 は偶数次の項のみの級数解であり，y_2 は奇数次の項のみの級数解であるので，これらは１次独立であり，基本解であることがわかる．よって，一般解はこの基本解から

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad （C_1, C_2 は任意定数）$$

となる．[*1]

(2) $x = 0$ において，$p_1(x) = 0$ と $p_2(x) = -x$ は解析的であるので，$x = 0$ は正則点である．解を $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき，$\left(y' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \right)$ $y'' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ を与式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\
&= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n \right\} x^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

より，$a_2 = 0$ および漸化式

$$(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が得られる．$a_2 = 0$ より，$a_{3m+2} = 0$（$m = 0, 1, 2, \cdots$）である．またこの漸化式は，３項ごとの番号で与えられているので，$n = 3m$ と $n = 3m + 1$（$m = 1, 2, \cdots$）に分けて得られることになる．それぞれ，

$$\begin{aligned}
a_{3m} &= \frac{a_{3m-3}}{(3m)(3m-1)} = \frac{a_{3m-6}}{(3m)(3m-1)(3m-3)(3m-4)} = \cdots \\
&= \frac{a_0}{(3m)(3m-1)(3m-3)(3m-4)\cdots 3 \cdot 2} = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(3j-2)}{(3m)!} a_0 \\
a_{3m+1} &= \frac{a_{3m-2}}{(3m+1)(3m)} = \frac{a_{3m-5}}{(3m+1)(3m)(3m-2)(3m-3)} = \cdots \\
&= \frac{a_1}{(3m+1)(3m)(3m-2)(3m-3)\cdots 4 \cdot 3} = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(3j-1)}{(3m+1)!} a_1
\end{aligned}$$

となるが，$a_0 = 1$, $a_1 = 0$ の場合の解を $y_1 = 1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(3j-2)}{(3m)!} x^{3m} \right\}$，$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ の場合

[*1] $(2m)!! = 2^m m!$ より，$y_1 = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^m}{m!} = e^{\frac{x^2}{2}}$ である．

の解を $y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m}(3j-1)}{(3m+1)!} x^{3m+1} \right\}$ とおくと，y_1 は3の倍数が次数の項のみの級数解であり，y_2 は3で割って1余る数が次数の項のみの級数解であるので，これらは1次独立であり，基本解であることがわかる．よって，一般解はこの基本解から

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

となる．[*2]

(3)　与式を変形すると，$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{k(k+1)}{1-x^2} y = 0$ となるので，$x = 0$ において，$p_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ と $p_2(x) = \frac{k(k+1)}{1-x^2} = k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ は解析的であるので，$x = 0$ は正則点である．解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき, $y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n, y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ を与式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + k(k+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + k(k+1)a_n\} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+k+1)(n-k)a_n\} x^n = 0
\end{aligned}$$

より，漸化式

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+k+1)(n-k)a_n = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が得られる．この漸化式は，2項ごとの番号で与えられているので，偶数番目（$n = 2m$）と奇数番目（$n = 2m+1$）（$m = 1,\ 2,\ \cdots$）に分けて得られることになる．それぞれ,

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{(2m-1+k)(2m-2-k)}{(2m)(2m-1)} a_{2m-2} \\
&= \frac{(2m-1+k)(2m-3+k)(2m-2-k)(2m-4-k)}{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)} a_{2m-4} = \cdots \\
&= -\frac{(2m-1+k)(2m-3+k)\cdots(1+k)(2m-2-k)(2m-4-k)\cdots(2-k)k}{(2m)!} a_0 \\
a_{2m+1} &= \frac{(2m+k)(2m-1-k)}{(2m+1)(2m)} a_{2m-1} \\
&= \frac{(2m+k)(2m-2+k)(2m-1-k)(2m-3-k)}{(2m+1)(2m)(2m-1)(2m-2)} a_{2m-3} = \cdots \\
&= \frac{(2m+k)(2m-2+k)\cdots(2+k)(2m-1-k)(2m-3-k)\cdots(3-k)(1-k)}{(2m+1)!} a_1
\end{aligned}$$

[*2] この微分方程式の解はエアリー関数という特殊関数の1種である．

となるが，$a_0=1$，$a_1=0$ の場合の解を

$$y_1 = 1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1+k)(2m-3+k)\cdots(1+k)(2m-2-k)(2m-4-k)\cdots(2-k)k}{(2m)!}x^{2m}$$

また $a_0=0$，$a_1=1$ の場合の解を

$$y_2 = x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+k)(2m-2+k)\cdots(2+k)(2m-1-k)(2m-3-k)\cdots(3-k)(1-k)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

とおくと，y_1 は偶数次の項のみの級数解であり，y_2 は奇数次の項のみの級数解であるので，これらは１次独立であり，基本解であることがわかる．よって，一般解はこの基本解から

$$y = C_1y_1+C_2y_2 \quad （C_1，C_2\text{は任意定数}）$$

となる．

（注意）$k=2m$ （$m=0, 1, 2, \cdots$）のときは，$a_{2m+2}=a_{2m+4}=\cdots=0$ である．また，$k=2m+1$ （$m=0, 1, 2, \cdots$）のときは，$a_{2m+3}=a_{2m+5}=\cdots=0$ である．

(4)　与式を変形して，$x^2y''+x\left(\dfrac{3-x}{2}\right)y'-\left(\dfrac{x}{2}\right)y=0$ とすると，$b_1(x)=\dfrac{3-x}{2}$，$b_2(x)=-\dfrac{x}{2}$ の場合であるので，$x=0$ において解析的であり，$x=0$ は確定特異点である．解を $y=x^{\rho}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおくと，$y'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)a_nx^{\rho+n-1}$，　$y''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)a_nx^{\rho+n-2}$ より，与式に代入すると，

$$\begin{aligned}&2x\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)a_nx^{\rho+n-2}+(3-x)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)a_nx^{\rho+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\rho+n}\\&=\{2\rho(\rho-1)+3\rho\}a_0x^{\rho-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\rho+n+1)\{(2\rho+2n+3)a_{n+1}-a_n\}\right]x^{\rho+n}=0\end{aligned}$$

より，決定方程式 $2\rho(\rho-1)+3\rho=0$ の解は 0 と $-\dfrac{1}{2}$ である．漸化式は，
$(\rho+n+1)\{(2\rho+2n+3)a_{n+1}-a_n\}=0$ において，$\rho+n+1\neq 0$（$n\geq 0$）であるので，

$$(2\rho+2n+3)a_{n+1}-a_n=0$$

である．これをそれぞれの ρ について解く．

$\rho=0$ のときの漸化式は，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2n+3}a_n$ であるから，

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)}a_{n-1}=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}a_{n-2}=\cdots=\frac{1}{(2n+1)!!}a_0 \quad (n\geq 1)$$

となるので，解は，$a_0=1$ として，

$$y_1(x)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!!}x^n$$

となる．

$\rho=-\dfrac{1}{2}$ のときの漸化式は，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2(n+1)}a_n$ であるから，

$$a_n=\frac{1}{2^n n!}a_0 \ \ (n\geq 1)$$

となるので，解は，$a_0=1$ として，

$$y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n\left(=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{x}{2}}\right)$$

となる．

y_1 と y_2 は1次独立であり，基本解であることがわかる．よって，一般解はこの基本解から

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

となる．

(5)　与式を変形して，$x^2y''+x(x-3)y'+(4-2x)y=0$ とすると，$b_1(x)=x-3$，$b_2(x)=4-2x$ の場合であるので，$x=0$ において解析的であり，$x=0$ は確定特異点である．解を $y=x^\rho\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおくと，$y'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)a_nx^{\rho+n-1}$，$y''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)a_nx^{\rho+n-2}$ より，与式に代入すると，

$$\begin{aligned}&x^2\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)a_nx^{\rho+n-2}+(x^2-3x)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)a_nx^{\rho+n-1}+(4-2x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\rho+n}\\&=\{\rho(\rho-1)-3\rho+4\}a_0x^\rho+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(\rho+n-1)^2a_{n+1}+(\rho+n-2)a_n\right\}x^{\rho+n+1}=0\end{aligned}$$

より，決定方程式 $\rho(\rho-1)-3\rho+4=0$ の解は2（重解）である．漸化式は，

$$(\rho+n-1)^2a_{n+1}+(\rho+n-2)a_n=0 \ \ (n\geq 0)$$

であるので，$\rho=2$ において，$(n+1)^2a_{n+1}+na_n=0$ となる．従って，$n=0$ で，$a_1=0$ となるので，$a_n=0$（$n\geq 1$）である．従って，解を，$a_0=1$ として，

$$y_1(x)=x^2$$

となる．

もう1つの解は，階数低下法を用いて求める．$y=zx^2$ とおくと，

$$y'=z'x^2+2zx,\ y''=z''x^2+4z'x+2z$$

である．y，y'，y'' を同次方程式に代入すると，

$$x^2\left(z''x^2+4z'x+2z\right)+(x^2-3x)\left(z'x^2+2zx\right)+(4-2x)zx^2=0$$

より，$u=z'$ とおくと，

$$x^4u'+\left(x^4+x^3\right)u=0$$

となるので，変数分離形である．積分すれば，

$$u = C_1 \frac{e^{-x}}{x} = \frac{C_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{x} \quad (C_1\text{は任意定数})$$

である．よって，この式の両辺を積分するが，右辺は項別積分によって求めると，

$$z = C_1 \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx = C_1 \left[\log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n!)}\right] + C_2 \quad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．従って一般解は

$$y = C_1 x^2 \left[\log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n!)}\right] + C_2 x^2 \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(6)　与式を変形して，$x^2 y'' + x(x+2)y' + xy = 0$ とすると，$b_1(x) = x+2$，$b_2(x) = x$ の場合であるので，$x = 0$ において解析的であり，$x = 0$ は確定特異点である．解を $y = x^\rho \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおくと，

$y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n) a_n x^{\rho+n-1}$，$y''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1) a_n x^{\rho+n-2}$ より，与式に代入すると，

$$\begin{aligned} &x\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)(\rho+n-1)a_n x^{\rho+n-2} + (x+2)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho+n)a_n x^{\rho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\rho+n} \\ &= \{\rho(\rho-1)+2\rho\}\, a_0 x^{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\rho+n+1)\{(\rho+n+2)a_{n+1} + a_n\}\right] x^{\rho+n} = 0 \end{aligned}$$

より，決定方程式 $\rho(\rho-1) + 2\rho = 0$ の解は 0，-1 である．漸化式は，

$$(\rho+n+1)\{(\rho+n+2)a_{n+1} + a_n\} = 0 \ (n \geq 0)$$

であるが，$\rho = 0$ において，$(n+2)a_{n+1} + a_n = 0$ となるので，

$$a_n = -\frac{1}{(n+1)} a_{n-1} = \frac{1}{(n+1)n} a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} a_0 \ (n \geq 0)$$

より，解は，$a_0 = 1$ として，

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-x)^n = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n - 1}{(-x)} = \frac{1-e^{-x}}{x}$$

となる．決定方程式の解の差が整数なので，もう 1 つの解は，階数低下法を用いて求める．$y = z\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned} y' &= z'\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) + z\left(\frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2}\right), \\ y'' &= z''\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) + 2z'\left(\frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2}\right) + z\left(\frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2}\right)' \end{aligned}$$

である．y，y'，y'' を同次方程式に代入して整理し，$u = z'$ とおくと，

$$\left(1 - e^{-x}\right) u' + \left(1 + e^{-x}\right) u = 0$$

となるので，変数分離形である．積分すれば，

$$u = C_1 \exp\left[-\int \left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) dx\right] = C_1 \left\{\frac{e^x}{(1 - e^x)^2}\right\} \qquad (C_1\text{は任意定数})$$

である．よって，この式の両辺を積分して，

$$z = C_1 \int \left\{\frac{e^x}{(1 - e^x)^2}\right\} dx + C_2 = C_1 \left(\frac{1}{1 - e^x}\right) + C_2 \qquad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．従って，一般解は

$$y = C_3 \frac{e^{-x}}{x} + C_2 \frac{1 - e^{-x}}{x} \qquad (C_3,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．ただし，$C_3 = -C_1$ とした．

[６章の章末演習問題]

１の解答

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 4 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

であるので，固有値は ± 2 である．それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求める．

(i) 固有値 $\lambda = -2$ のとき

固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A+2E)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$ を掃き出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11} + 2p_{21} = 0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる．

(ii) 固有値 $\lambda = 2$ のとき

固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A-2E)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$ を掃き出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{12} - 2p_{22} = 0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる．

以上から，基本解は $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = e^{-2x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，従って一般解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\tilde{\boldsymbol{y}}_1 + C_2\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{pmatrix} -2C_1e^{-2x} + 2C_2e^{2x} \\ C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} \end{pmatrix} \quad （C_1,\ C_2 \text{は任意定数}）$$

である．

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0$$

であるので，固有値は２（重解）である．固有値２に対する固有ベクトルを求める．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A-2E)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$

を掃き出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11}+p_{21}=0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる.

次に $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とおき，非同次連立１次方程式 $(A-2E)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$ を掃き出し法で解く.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，$p_{12}+p_{22}=1$ が得られるので，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととれる.

以上から，基本解は $\tilde{\boldsymbol{y}}_1=e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}_2=e^{2x}\left\{x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ であり，従って一般解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1\tilde{\boldsymbol{y}}_1+C_2\tilde{\boldsymbol{y}}_2=e^{2x}\begin{pmatrix} -C_1+C_2(-x+1) \\ C_1+C_2x \end{pmatrix} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である.

(3)　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+3i)(\lambda-3i)=0$$

であるので，固有値は $\pm 3i$ である．$3i$ の固有値に対する固有ベクトルは，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A-3iE)\,\boldsymbol{p}_1=\mathbf{0}$ を掃き出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} -3i & 1 \\ -9 & -3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{3} \\ -9 & -3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11}+\frac{i}{3}p_{21}=0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{r}+i\boldsymbol{s}$ ととれる.

以上から，基本解は

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1=\cos 3x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\sin 3x\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 3x \\ -3\sin 3x \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2=\cos 3x\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}+\sin 3x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin 3x \\ 3\cos 3x \end{pmatrix}$$

であり，従って一般解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1\tilde{\boldsymbol{y}}_1+C_2\tilde{\boldsymbol{y}}_2=\begin{pmatrix} C_1\cos 3x+C_2\sin 3x \\ -3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x \end{pmatrix} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

である．

(4)　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \{\lambda - (1+i)\}\{\lambda - (1-i)\} = 0$$

であるので，固有値は $1 \pm i$ である．$1+i$ の固有値に対する固有ベクトルは，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $\{A-(1+i)E\}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$ を掃き出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1+i}{2} \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1+i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11} + \left(\dfrac{1+i}{2}\right) p_{21} = 0$ が得られるので，固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r} + i\boldsymbol{s}$$

ととれる．

以上から，基本解は

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = e^x \left\{ \cos x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = e^x \begin{pmatrix} -\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = e^x \left\{ \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = e^x \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x + \sin x \end{pmatrix}$$

であり，従って一般解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \tilde{\boldsymbol{y}}_1 + C_2 \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = e^x \begin{pmatrix} -C_1 \cos x - C_2 \sin x \\ C_1(\cos x + \sin x) + C_2(-\cos x + \sin x) \end{pmatrix} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である．

2 の解答

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+5) = 0$$

であるので，固有値は 0，-5 である．それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求める．

(i) 固有値 $\lambda=0$ のとき

固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A-0E)\boldsymbol{p}_1=\mathbf{0}$ を掃き出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11}-p_{21}=0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる.

(ii) 固有値 $\lambda=-5$ のとき

固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A+5E)\boldsymbol{p}_2=\mathbf{0}$ を掃き出し法で解く.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{12}+\frac{3}{2}p_{22}=0$ が得られるので，固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ととれる.

以上から，基本解は $\tilde{\boldsymbol{y}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\tilde{\boldsymbol{y}}_2=e^{-5x}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である.

$$\tilde{Y}(x)=\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 & \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3e^{-5x} \\ 2e^{-5x} \end{pmatrix} \right)=\begin{pmatrix} 1 & -3e^{-5x} \\ 1 & 2e^{-5x} \end{pmatrix}$$

とおくと，非同次項 $\boldsymbol{Q}(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 6e^{-2x} \end{pmatrix}$ とすると

$$\tilde{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{Q}(x)=\frac{e^{5x}}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-5x} & 3e^{-5x} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6e^{-2x} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 18e^{-2x} \\ 6e^{3x} \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \int \tilde{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{Q}(x) &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \int (18e^{-2x})dx \\ \int (6e^{3x})dx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9e^{-2x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．従って一般解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} 1 & -3e^{-5x} \\ 1 & 2e^{-5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3e^{-5x} \\ 1 & 2e^{-5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9e^{-2x} \\ 2e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1-3C_2e^{-5x} \\ C_1+2C_2e^{-5x} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である.

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

であるので，固有値は $\pm i$ である．i の固有値に対する固有ベクトルは，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とおき，同次連立１次方程式 $(A - iE)\,\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$ を掃き出し法で解く．

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$p_{11} - ip_{21} = 0$ が得られるので，固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r} + i\boldsymbol{s}$$

ととれる．

以上から，基本解は

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \cos x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

である．

$$\tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 & \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$$

とおくと，非同次項 $\boldsymbol{Q}(x) = \begin{pmatrix} 6\cos 2x \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\tilde{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{Q}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\cos 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sin x \cos 2x \\ 6\cos x \cos 2x \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \int \tilde{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{Q}(x) &= \begin{pmatrix} -6\displaystyle\int (\sin x \cos 2x)dx \\ 6\displaystyle\int (\cos x \cos 2x)dx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\cos x + \cos 3x \\ 3\sin x + \sin 3x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．従って一般解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\cos x + \cos 3x \\ 3\sin x + \sin 3x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sin 2x \\ -2\cos 2x \end{pmatrix} \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数}) \end{aligned}$$

である．

3 の解答

(1)　与式の右辺をそれぞれ $f_1(y_1,\,y_2)=2y_2-\sin y_1-2\sin y_2$，$f_2(y_1,\,y_2)=2y_1-2y_2+y_1^2-y_2^2$ とすると，$f_1(0,\,0)=f_2(0,\,0)=0$ より原点は平衡点である．

右辺を原点のまわりでテイラー展開すると，$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}=-\cos y_1$，$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}=2-2\cos y_2$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}=2+2y_1$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}=-2-2y_2$ であるから，これらに $y_1=y_2=0$ を代入すると，線形近似した式は,

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{dx}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}$$

となる．行列 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ の固有値を求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

であるので，固有値は -1 と -2 である．従って，固有値が符号がともに負である 2 つの実数の場合であるので，原点は安定結節点である．

(2)　与式の右辺をそれぞれ $f_1(y_1,\,y_2)=2y_1+1-e^{y_2}\cos y_1$，$f_2(y_1,\,y_2)=y_1+\sin 2y_1-y_2^2$ とすると，$f_1(0,\,0)=f_2(0,\,0)=0$ より原点は平衡点である．

右辺を原点のまわりでテイラー展開すると，$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}=2+e^{y_2}\sin y_1$，$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}=-e^{y_2}\cos y_1$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}=1+2\cos 2y_1$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}=-2y_2$ であるから，これらに $y_1=y_2=0$ を代入すると，線形近似した式は,

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{dx}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}$$

となる．行列 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ の固有値を求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 3 & -\lambda\end{vmatrix}=\left\{\lambda-\left(1+\sqrt{2}i\right)\right\}\left\{\lambda-\left(1-\sqrt{2}i\right)\right\}=0$$

であるので，固有値は $1\pm\sqrt{2}i$ である．従って，固有値の実部が正の共役な虚数解の場合であるので，原点は不安定渦状点である．

4 の解答

(1)　$y_1=y$，$y_2=y'=y_1'$ とおくと，与式より

$$\begin{aligned}y''&=(y')'=y_2'\\ &=-y'-\sin y=-y_2-\sin y_1\end{aligned}$$

であるので，連立微分方程式は，

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2 - \sin y_1 \end{cases}$$

となる．

(2) $f_1(y_1,\, y_2) = y_2$，$f_2(y_1,\, y_2) = -y_2 - \sin y_1$ とおいて，

$$\begin{cases} f_1(y_1,\, y_2) = y_2 = 0 \\ f_2(y_1,\, y_2) = -y_2 - \sin y_1 = 0 \end{cases}$$

を解くと，第１式から $y_2 = 0$ が得られるので，第２式に代入すると，$y_1 = n\pi$（n は整数）が得られる．よって平衡点は，$(n\pi,\, 0)$（n は整数）である．

(3) それぞれの平衡点における線形近似で得られた行列の固有値を求める．$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0$，$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} = -\cos y_1$，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} = -1$ であるから，$y_1 = n\pi$ の整数 n が偶数の場合と奇数の場合とで分類する．

(i) n が偶数のとき

得られた４つの偏導関数に $y_1 = 2m\pi$（m は整数），$y_2 = 0$ を代入すると，$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 - 2m\pi \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおいて線形近似した式は，

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}$$

となる．行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{\lambda - \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}\left\{\lambda - \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right\} = 0$$

であるので，固有値は $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である．従って，固有値の実部が負の複素共役な２虚数解の場合であるので，平衡点 $(2m\pi,\, 0)$ は安定渦状点である．

(ii) n が奇数のとき

得られた４つの偏導関数に $y_1 = (2m+1)\pi$（m は整数），$y_2 = 0$ を代入すると，$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 - (2m+1)\pi \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおいて線形近似した式は，

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{y}}$$

となる．行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求める．固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{\lambda - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}\left\{\lambda - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\} = 0$$

であるので，固有値は $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．従って，固有値の一方が負でもう一方が正の実数解の場合であるので，平衡点 $((2m+1)\pi, 0)$ は鞍点（不安定）である．