

光ファイバ通信・計測のための
光エレクトロニクス

山下真司 著

数理工学社

「章末問題解答」

2022 年 4 月 15 日

章末問題略解

第 2 章

(1) 一様な円筒状光ビームの強度 I はパワー P とビーム半径 r を用いて $I = P/\pi r^2$ と表せ、また I と電界振幅 E_0 とは (2.39) 式の関係にあるから、

$$|E_0| = \sqrt{\frac{2I}{nc\epsilon_0}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2P}{\pi nc\epsilon_0}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2Z_0 P}{\pi n}} = \frac{\sqrt{2 \times 120 \times 1}}{1 \times 10^{-3}} = 1.55 \times 10^4 \text{ [V/m]}$$

なお、 Z_0 は (2.35) 式の波動インピーダンスである。

(2) (2.50) 式において $1/4$ 波長板では $\Gamma = \pi/2$ であるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{T}(\theta) \mathbf{C}_0(\pi/2) \mathbf{T}(-\theta) = \exp j\pi/4 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \exp j\pi/4 \begin{pmatrix} \cos^2\theta - j\sin^2\theta & (1+j)\cos\theta\sin\theta \\ (1+j)\cos\theta\sin\theta & -j\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特に $\theta = 45^\circ$ の場合、

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta = 45^\circ$ の $1/4$ 波長板に x 直線偏光を入れれば右回り円偏光になり、 y 直線偏光なら左回り円偏光になる。

(3) 波長板の位相差は (2.45) 式より波長 λ を用いて

$$\Gamma = \frac{2\pi(n_s - n_f)l}{\lambda}$$

と表せる。 45° 傾けた波長板のジョーンズ行列は、

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{C}_0(\Gamma) \mathbf{T}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp j\frac{\Gamma}{2} & 0 \\ 0 & \exp -j\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Gamma}{2} & j\sin\frac{\Gamma}{2} \\ j\sin\frac{\Gamma}{2} & \cos\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}$$

である。入射側の偏光子を通った光は x 直線偏光であるので、出力側の偏光子（検光子と呼ばれる場合もある）を通った光のジョーンズベクトルは、

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Gamma}{2} & j\sin\frac{\Gamma}{2} \\ j\sin\frac{\Gamma}{2} & \cos\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、当然 x 直線偏光であるが、その強度は

$$I' = \cos^2 \frac{\Gamma}{2} = \cos^2 \frac{\pi(n_s - n_f)l}{\lambda}$$

この強度は波長が変わると周期的に変化し、

$$\lambda = (n_s - n_f) \frac{l}{m} \quad (m: \text{整数})$$

でピークをとる。つまり波長に対して周期的なフィルタとなる。このように複屈折を利用する光フィルタを Lyot フィルタという。

(4)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp(-j\omega t) dt = \left[\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{\exp\left(-\frac{j\omega\tau}{2}\right) - \exp\left(\frac{j\omega\tau}{2}\right)}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \\ \mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \exp(-j\omega t) dt = \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t + j\omega\tau^2/2)^2}{\tau^2}\right] dt \\ &= \sqrt{\pi}\tau \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \end{aligned}$$

ここで $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a(x-b)^2) dx = \sqrt{\pi/a}$ (b は任意の複素数) を用いている。

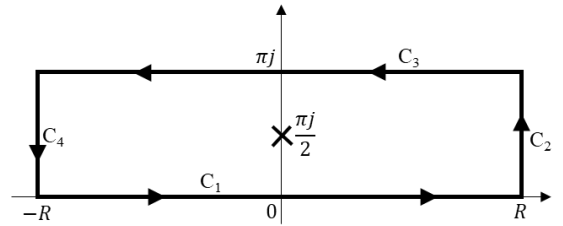
$$\mathcal{F}\left(\text{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp(-j\omega t) dt = 2\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-j\omega\tau x)}{e^x + e^{-x}} dx$$

ここで $x = t/\tau$ と置き換えている。 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-j\omega\tau x)}{e^x + e^{-x}} dx$ を計算するために、下のような

積分路 C で複素関数 $f(z) = \frac{\exp(-j\omega\tau z)}{e^z + e^{-z}}$ の積分を

考える。 C 中の極は $z = \pi j/2$ のみであり、その

留数は $\text{Res}\left(\frac{\pi j}{2}, f\right) = \frac{\exp(-j\omega\tau \frac{\pi j}{2})}{e^{\frac{\pi j}{2}} - e^{-\frac{\pi j}{2}}} = \frac{e^{\frac{\pi\omega\tau}{2}}}{2j}$ なので、



$$\int_C f(z) dz = 2\pi j \text{Res}\left(\frac{\pi j}{2}, f\right) = \pi e^{\frac{\pi\omega\tau}{2}}$$

積分路 C_1 での積分は $R \rightarrow \infty$ とすれば I そのものである。積分路 C_3 での積分は、

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_{R+\pi j}^{-R+\pi j} \frac{\exp(-j\omega\tau z)}{e^z + e^{-z}} dz = \int_R^{-R} \frac{\exp(-j\omega\tau u + \pi\omega\tau)}{e^{u+\pi j} + e^{-u-\pi j}} du = e^{\pi\omega\tau} \int_{-R}^R \frac{\exp(-j\omega\tau u)}{e^u + e^{-u}} du \xrightarrow{R \rightarrow \infty} e^{\pi\omega\tau} I$$

ここで $u = z - \pi j$ と置き換えている。積分路 $C_{2,4}$ での積分は $R \rightarrow \infty$ とすれば 0 となることが容易に示せるため、結局、

$$\int_C f(z) dz = (1 + e^{\pi\omega\tau})I = \pi e^{\frac{\pi\omega\tau}{2}}$$

これより、

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) = 2\tau I = 2\tau \frac{\pi e^{\frac{\pi\omega\tau}{2}}}{1 + e^{\pi\omega\tau}} = \pi\tau \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega\tau}{2}\right)$$

(5) パルス幅 $\Delta\tau$ で周期 T の短パルス列の場合、(2.131)式の複素コヒーレンス関数 $\gamma(\tau)$ は $\tau = \Delta\tau/2$ で $1/2$ になり、その後急速に 0 なるが、 $\tau = T$ に近づくと再び大きくなり、 $\tau = T$ で 1 となる。これを周期 T で繰り返す、つまり光パルスの時間強度波形と同じになる。

このことは、周期的な短パルス列のパワースペクトルが単一パルスの ESD とデルタ関数列との積で与えられる ((2.128)式) から明らかなである。(2.134)式より、 $\gamma(\tau)$ はそのフーリエ逆変換、つまり単一パルスの時間波形とデルタ関数列との畳み込みで与えられる。

ここで注意すべきことは、光パルスの時間強度波形と複素コヒーレンス関数が必ずしも一致するわけではないことである。パワースペクトルがコム状のデルタ関数列であってもそれぞれの位相が揃っていないと短パルス列にならない (5.8 節参照) のに対し、 $\gamma(\tau)$ はパワースペクトルのみによって決まるため、時間波形がパルスでなくても $\gamma(\tau)$ をパルス状にすることができる。

(6) (2.144)式を x で 2 回偏微分すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -A \left(n^2 k^2 \frac{x^2}{q^2} + jnk \frac{1}{q} \right) \exp \left(-jP - jnk \frac{x^2 + y^2}{2q} \right)$$

y についても同様。 x での偏微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial z} = A \left(-jP' + jnk \frac{x^2 + y^2}{2q^2} q' \right) \exp \left(-jP - jnk \frac{x^2 + y^2}{2q} \right)$$

したがって、(2.143)式は、

$$n^2 k^2 \frac{x^2 + y^2}{q^2} + 2jnk \frac{1}{q} + 2jnk \left(-jP' + jnk \frac{x^2 + y^2}{2q^2} q' \right) = n^2 k^2 \frac{x^2 + y^2}{q^2} (1 - q') + 2nkP' + 2jnk \frac{1}{q} = 0$$

となる。これがすべての x, y で成り立つためにはまず $q' = 1$ でなければならず、これよりまず $q(z) = z + q_0$ となる。このとき、上式は

$$P' = -\frac{j}{q} = -\frac{j}{z + q_0}$$

であるから、 $P(0) = 0$ となるように積分定数を定めると $P(z) = -j \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right)$ となる。

(7) (2.151) 式より、

$$\theta = \frac{2\lambda}{\pi w_0} = \frac{2 \times 6.33 \times 10^{-7}}{3.14 \times 5 \times 10^{-5}} = 8.06 \times 10^{-3} [\text{rad}] \sim 0.46 [\text{deg}]$$

z が大きいところでは、ビーム直径 $2w(z)$ は

$$2w(z) = 2w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \sim \frac{2w_0}{z_R} z$$

$\frac{2w_0}{z_R} = \theta$ であるので、この係数は θ に他ならない。したがって、

$$2w(z) = 8.06 \times 10^{-3} \times 3.5 \times 10^8 = 2.82 \times 10^6 [\text{m}] \sim 2.82 \times 10^3 [\text{km}]$$

このように超長距離ではビームが大きく広がってしまうため、 θ をできるだけ小さくしなければならない。

第 3 章

(1) 直角座標系 (x, y, z) と円筒座標系 (r, θ, z) を結びつける基本式は、

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_r \\ H_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

である。これより、

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta}$$

であり、 H_z についても同じである。これを (3.34), (3.35) 式に代入すると、

$$E_x = -\frac{j}{\beta_t^2} \left(\beta \frac{x}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \beta \frac{y}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + \omega \mu_0 \frac{y}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{x}{r^2} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right)$$

$$E_y = -\frac{j}{\beta_t^2} \left(\beta \frac{y}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{x}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega \mu_0 \frac{x}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{y}{r^2} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right)$$

とそれぞれ 4 つの項からなる。 $E_r = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$ を作ると第 2,3 項が消えて (3.39)式が得られる。同様に $E_\theta = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta$ を作れば第 1,4 項が消えて (3.40)式が得られる。同じようにして、(3.36),(3.37)式から (3.41),(3.42)式が得られる。

(2) (3.47),(3.49)式より

$$\frac{\partial E_z}{\partial \theta} = -nA J_n\left(\frac{U}{a}r\right) \sin(n\theta + \psi) \quad (r \leq a), \quad -nA \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K_n\left(\frac{W}{a}r\right) \sin(n\theta + \psi) \quad (r > a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = C \frac{U}{a} J'_n\left(\frac{U}{a}r\right) \sin(n\theta + \psi) \quad (r \leq a), \quad C \frac{W}{a} \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K'_n\left(\frac{W}{a}r\right) \sin(n\theta + \psi) \quad (r > a)$$

(3.40)式の E_θ が $r=a$ で連続でなければならないから、 β_t^2 が (3.48)式で与えられることに注意して、

$$\begin{aligned} E_\theta(r=a) &= -\frac{ja^2}{U^2} \left\{ -\frac{\beta}{a} nA J_n(U) \sin(n\theta + \psi) - \omega\mu_0 C \frac{U}{a} J'_n(U) \sin(n\theta + \psi) \right\} \\ &= \frac{ja^2}{W^2} \left\{ -\frac{\beta}{a} nA \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K_n(W) \sin(n\theta + \psi) - \omega\mu_0 C \frac{W}{a} \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K'_n(W) \sin(n\theta + \psi) \right\} \end{aligned}$$

これを整理すれば (3.50)式が得られる。同じようにして、(3.42)式の H_θ が $r=a$ で連続でなければならない条件から (3.51)式が得られる。

(3) まず (2) で取り上げた E_θ について考えよう。 E_θ は (3.40)式と (2)の最初の 2 つの式より、

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{ja^2}{U^2} \left\{ -\frac{\beta}{r} nA J_n\left(\frac{U}{a}r\right) - \omega\mu_0 C \frac{U}{a} J'_n\left(\frac{U}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi) \quad (r \leq a) \\ &= \frac{ja^2}{W^2} \left\{ -\frac{\beta}{r} nA \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K_n\left(\frac{W}{a}r\right) - \omega\mu_0 C \frac{W}{a} \frac{J_n(U)}{K_n(W)} K'_n\left(\frac{W}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi) \quad (r > a) \end{aligned}$$

まずコア内 ($r \leq a$) について考えよう。 $s = -\frac{\mu_0 \omega C}{\beta A}$ を用いて変形して

$$E_\theta = \frac{ja}{U} \beta A \left\{ \frac{1}{r} n J_n\left(\frac{U}{a}r\right) - s J'_n\left(\frac{U}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi)$$

ベッセル関数の漸化式 (3.61)を用いると、

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{ja}{U} \beta A \left\{ \frac{J_{n-1}\left(\frac{U}{a}r\right) + J_{n+1}\left(\frac{U}{a}r\right)}{2} - s \frac{J_{n-1}\left(\frac{U}{a}r\right) - J_{n+1}\left(\frac{U}{a}r\right)}{2} \right\} \sin(n\theta + \psi) \\
&= jA\beta \frac{a}{U} \left\{ \frac{1-s}{2} J_{n-1}\left(\frac{U}{a}r\right) + \frac{1+s}{2} J_{n+1}\left(\frac{U}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi)
\end{aligned}$$

と(3.82)式の第1式が導ける。同様にクラッド内($r > a$)についても、ベッセル関数の漸化式(3.62)を用いて、

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{ja}{W} \beta A \frac{J_n(U)}{K_n(W)} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{a}{W} n K_n\left(\frac{W}{a}r\right) + s K'_n\left(\frac{W}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi) \\
&= \frac{ja}{W} \beta A \frac{J_n(U)}{K_n(W)} \left\{ \frac{K_{n-1}\left(\frac{W}{a}r\right) - K_{n+1}\left(\frac{W}{a}r\right)}{2} - s \frac{K_{n-1}\left(\frac{W}{a}r\right) + K_{n+1}\left(\frac{W}{a}r\right)}{2} \right\} \sin(n\theta + \psi) \\
&= jA\beta \frac{aJ_n(U)}{WK_n(W)} \left\{ \frac{1-s}{2} K_{n-1}\left(\frac{W}{a}r\right) - \frac{1+s}{2} K_{n+1}\left(\frac{W}{a}r\right) \right\} \sin(n\theta + \psi)
\end{aligned}$$

と(3.82)式の第2式が導ける。他の成分についても同様である。ただし磁界成分については s の代わりに $\frac{\beta^2}{(kn_1)^2}s$ (コア内)または $\frac{\beta^2}{(kn_2)^2}s$ (クラッド内)が出てくるが、弱導波近似のもとではどちらも s で近似できる。

(4) LP_{0l} (HE_{1l}) even モードでは(3.81)-(3.86)式において $s = -1, n = 1, \psi = 0$ である。このとき、(3.87)式より、コア内での電界の y 方向成分は、

$$E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta = -jA\beta \frac{a}{U} \left\{ \frac{1-s}{2} J_{n-1}\left(\frac{U}{a}r\right) \right\} \cos \theta \sin \theta + jA\beta \frac{a}{U} \left\{ \frac{1-s}{2} J_{n-1}\left(\frac{U}{a}r\right) \right\} \sin \theta \cos \theta = 0$$

クラッド内についてもこれは同じである。弱導波近似では電界の z 方向成分は小さいとしてよいので、電界の向きは x 方向であるとできる。

(5) HE_{21} even モードでは(3.81)-(3.86)式において $s = -1, n = 2, \psi = 0$ である。 E_r と E_θ は、

$$\begin{aligned}
E_r &= -jA\beta \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \cos 2\theta \quad (r \leq a), -jA\beta \frac{aJ_2(U)}{WK_2(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \cos 2\theta \quad (r > a) \\
E_\theta &= jA\beta \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \sin 2\theta \quad (r \leq a), jA\beta \frac{aJ_2(U)}{WK_2(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \sin 2\theta \quad (r > a)
\end{aligned}$$

である。一方、 TM_{01} モードの E_r は(3.76)式で与えられ、 $E_\theta = 0$ である。直交座標

に変換すると、HE₂₁ even モードでは

$$E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta = -jA\beta \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \cos \theta \ (r \leq a), -jA\beta \frac{aJ_2(U)}{WK_2(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \cos \theta \ (r > a)$$

$$E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta = jA\beta \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \sin \theta \ (r \leq a), jA\beta \frac{aJ_2(U)}{WK_2(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \sin \theta \ (r > a)$$

TM₀₁ モードでは、

$$E_x = E_r \cos \theta = j\beta A \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \cos \theta \ (r \leq a), -j\beta A \frac{aJ_0(U)}{WK_0(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \cos \theta \ (r > a)$$

$$E_y = E_r \sin \theta = j\beta A \frac{a}{U} J_1\left(\frac{U}{a}r\right) \sin \theta \ (r \leq a), -j\beta A \frac{aJ_0(U)}{WK_0(W)} K_1\left(\frac{W}{a}r\right) \sin \theta \ (r > a)$$

コア内ではこれらの差を作ると x 成分のみが残り、和を作ると y 成分のみが残る。クラッド内についても、HE₂₁ モードおよび TM₀₁ モードで成り立つ分散方程式

$$\frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} = -\frac{K_1(W)}{WK_0(W)}$$

とベッセル関数の漸化式(3.61),(3.62)

$$\frac{1}{U}J_1(U) = \frac{J_0(U) + J_2(U)}{2}, \quad \frac{1}{W}K_1(W) = -\frac{K_0(W) - K_2(W)}{2}$$

より

$$\frac{J_2(U)}{K_2(W)} = -\frac{J_0(U)}{K_0(W)}$$

が示されるため、同じく差を作ると x 成分のみが残り、和を作ると y 成分のみが残る。

第 4 章

(1) (4.16),(4.17)式より、 $\lambda = 2\pi c/\omega$ を用いて、

$$\beta_2 \delta \omega = D \delta \lambda = D \delta \left(\frac{2\pi c}{\omega} \right) = -\frac{2\pi c D \delta \omega}{\omega_0^2} = -\frac{D \lambda_0 \delta \omega}{\omega_0} = -\frac{D \lambda_0^2 \delta \omega}{2\pi c}$$

より得られる。

(2)

$$\begin{aligned}
P_{\text{NL}} &= \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} (E_0 \exp j\omega t + E_0^* \exp -j\omega t)^3 \\
&= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \exp j3\omega t + \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |E_0|^2 E_0 \exp j\omega t + \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |E_0|^2 E_0^* \exp -j\omega t \\
&\quad + \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^{*3} \exp -j3\omega t = \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |E_0|^2 E_0 \exp j\omega t + \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \exp j3\omega t + c.c.
\end{aligned}$$

E_0 が実数のときにはこれは

$$P_{\text{NL}} = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos 3\omega t$$

である。

(3) $a = E_1 \exp j\omega_1 t, b = E_2 \exp j\omega_2 t$ と お く。

$$\begin{aligned}
P_{\text{NL}} &= \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} (a + b + a^* + b^*)^3 \\
&= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [(a + b)^3 + 3(a + b)^2(a^* + b^*) + 3(a + b)(a^* + b^*)^2 + (a^* + b^*)^3]
\end{aligned}$$

であるが、 $(a + b)^3$ と $(a^* + b^*)^3$ は 3 倍の周波数となる項で無視できる。したがって、 $\chi_e \equiv \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)}$ として、

$$\begin{aligned}
P_{\text{NL}} &= \chi_e \{(a + b)^2(a^* + b^*) + (a + b)(a^* + b^*)^2\} = \chi_e \{(a + b)^2(a^* + b^*) + c.c.\} \\
&= \chi_e (a^2 a^* + 2aba^* + b^2 a^* + a^2 b^* + 2abb^* + b^2 b^* + c.c.) \\
&= \chi_e (|a|^2 + 2|b|^2)a + \chi_e (|b|^2 + 2|a|^2)b + \chi_e a^2 b^* + \chi_e b^2 a^* + c.c.
\end{aligned}$$

これより (4.41)式が得られる。

(4) (4.56)式の絶対値は、

$$|A(z, t)| = A_0 \frac{\tau_0}{(|\tau_0^2 + j\beta_2^2 z|)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{\tau_0^2}{2(\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2)} t^2 \right\} = A_0 \frac{\tau_0}{(\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left\{ -\frac{\tau_0^2}{2(\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2)} t^2 \right\}$$

$L_D = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}$ を用いれば (4.57)式が得られる。

また、(4.56)式の位相は、

$$\arg(A(z, t)) = \arg \left((\tau_0^2 + j\beta_2^2 z)^{-\frac{1}{2}} \right) + \arg \left[\exp \left\{ j \frac{\beta_2 z}{2(\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2)} t^2 \right\} \right]$$

第 2 項目は

$$\frac{\beta_2 z}{2(\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2)} t^2 = \frac{1}{2} \frac{\text{sgn}(\beta_2)(z/L_D)}{1 + (z/L_D)^2} \frac{t^2}{\tau_0^2}$$

である。第 1 項目は、 $\arg((a + jb)^\alpha) = \alpha \tan^{-1} \frac{b}{a}$ であることを用いて、

$$-\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\beta_2 z}{\tau_0^2} = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\text{sgn}(\beta_2) z}{L_D}$$

となり、(4.59)式が得られる。

(5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \text{sech}^2(x) \end{aligned}$$

より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(x) dx = [\tanh(x)]_{-\infty}^{\infty} = 2$$

(6) 損失のない非線形シュレーディンガー方程式

$$j \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A$$

において、 $A(z, t) = \sqrt{P_0} U(z, t)$ とすれば、

$$j \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma P_0 |U|^2 U$$

距離と時間を $Z = \frac{z}{L_D}$, $T = \frac{t}{\tau_0}$ で規格化すると、 $L_D = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}$, $L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}$ を用いて、

$$\frac{j}{L_D} \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \frac{\beta_2}{\tau_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \gamma P_0 |U|^2 U = -\frac{1}{2} \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U$$

これより、規格化された非線形シュレーディンガー方程式

$$j \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + N^2 |U|^2 U, \quad N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$$

が求められる。

第 5 章

(1) $E(t)$ は $t \geq 0$ でのみ値をもつので、積分区間は $[0, \infty]$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E(t)) &= \int_0^\infty E_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau_{\text{sp}}}\right) \exp j\omega_0 t \exp(-j\omega t) dt = \frac{E_0}{-\frac{1}{2\tau_{\text{sp}}} + j(\omega_0 - \omega)} \left[\exp\left(-\frac{1}{2\tau_{\text{sp}}} + j(\omega_0 - \omega)\right)t \right]_0^\infty \\ &= \frac{E_0}{\frac{1}{2\tau_{\text{sp}}} + j(\omega - \omega_0)} = E_0 \frac{2\tau_{\text{sp}}}{1 + j4\pi\tau_{\text{sp}}(f - f_0)}\end{aligned}$$

(2) $B_{21} = 0$ とすると (5.14)式は

$$N_2 A_{21} - N_1 B_{12} \rho(f) = 0$$

これと (5.15)式より、

$$\rho(f) = \frac{N_2 A_{21}}{N_1 B_{12}} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \exp\left(-\frac{hf}{k_B T}\right)$$

(5.16)式の $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi n^3 hf^3}{c^3}$ を認めると、これはプランクの法則の (5.13)式に現れる分母 $\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1$ の -1 を無視した形になっており、周波数が高い、もしくは温度が低いところで成り立つウィーン(Wien)の法則となる。

(3)

$$R_p - \frac{N_2}{\tau_{\text{sp}}} - \Delta N W_i = 0, \quad \frac{N_2}{\tau_{\text{sp}}} - \frac{N_1}{\tau_{10}} + \Delta N W_i = 0$$

2式の和をとると、

$$N_1 = \tau_{10} R_p$$

第 1 式より、

$$N_2 = \tau_{\text{sp}} R_p - \tau_{\text{sp}} \Delta N W_i$$

よって、

$$\Delta N = N_2 - N_1 = -\tau_{\text{sp}} \Delta N W_i + \tau_{\text{sp}} R_p - \tau_{10} R_p$$

これを ΔN について解いて、

$$\Delta N = \frac{R_p \tau_{\text{sp}} \left(1 - \frac{\tau_{10}}{\tau_{\text{sp}}}\right)}{1 + \tau_{\text{sp}} W_i}$$

$W_i = \frac{\sigma(f)}{hf} I$ なので、 $\Delta N_0 = R_p \tau_{\text{sp}} \left(1 - \frac{\tau_{10}}{\tau_{\text{sp}}}\right)$, $I_s = \frac{hf}{\sigma(f) \tau_{\text{sp}}}$ として、

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + I/I_s}$$

と表せる。

(4)

$$\frac{dP}{dz} = (N_2 - N_1)\sigma(f_0)P + \frac{hf_0 N_2 \sigma(f_0)}{\phi(f_0)} = (N_2 - N_1)\sigma(f_0) \left(P + \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{hf_0}{\phi(f_0)} \right)$$

これを積分すれば、

$$P + \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{hf_0}{\phi(f_0)} = \exp\{(N_2 - N_1)\sigma(f_0)z\} \left(P(0) + \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{hf_0}{\phi(f_0)} \right)$$

$G = \exp\{(N_2 - N_1)\sigma(f_0)z\}$ として、

$$P(z) = GP(0) + (G - 1) \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{hf_0}{\phi(f_0)}$$

$n_{\text{sp}} = \frac{N_2}{N_2 - N_1}$, $\Delta f_g = \phi(f_0)^{-1}$ とすれば(5.36)式を得る。

(5) 媒質の外から見た振幅反射率が負になることに留意して、

$$\begin{aligned} A_r &= -r_1 A_i + t_1^2 r_2 A_i \exp(-j\delta) + t_1^2 r_1 r_2^2 A_i \exp(-j2\delta) + t_1^2 r_1^2 r_2^3 A_i \exp(-j3\delta) + \dots \\ &= -r_1 A_i + t_1^2 r_2 A_i \exp(-j\delta) (1 + r_1 r_2 \exp(-j\delta) + (r_1 r_2 \exp(-j\delta))^2 + \dots) \\ &= -r_1 A_i + \frac{t_1^2 r_2 \exp(-j\delta)}{1 - r_1 r_2 \exp(-j\delta)} A_i = \frac{-r_1 + r_2 \exp(-j\delta)}{1 - r_1 r_2 \exp(-j\delta)} A_i \end{aligned}$$

ここで $r_1^2 + t_1^2 = 1$ を用いている。

(6) t, r は実数なので、

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{t_1 t_2 \exp\left(-\frac{j\delta}{2}\right)}{1 - r_1 r_2 \exp(-j\delta)} \frac{t_1 t_2 \exp\left(\frac{j\delta}{2}\right)}{1 - r_1 r_2 \exp(j\delta)} = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2 \exp(-j\delta) - r_1 r_2 \exp(j\delta)} \\ &= \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 2r_1 r_2 (1 - \cos \delta)} \\ &= \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\delta/2)} \end{aligned}$$

最後の変形には $R_{1,2} = r_{1,2}^2$, $T_{1,2} = t_{1,2}^2$, $R_{1,2} + T_{1,2} = 1$ を用いている。

同様に問題(5)の A_r から FP 共振器の強度反射率 R_c が

$$T_c = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\delta/2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\delta/2)}$$

として求められ、 $R_c + T_c = 1$ となる。

(7) 図 5.9(b)のリング共振器で、カップラは対称な位置にあり、そのままの導波路を進む振幅の比率を t 、結合する振幅の比率を r とする。共振器一周の位相変化 $\delta = nkL = \frac{2\pi nL}{c}f$ として、

$$\begin{aligned} A_t &= r_1 r_2 A_i \exp\left(-\frac{j\delta}{2}\right) + r_1 t_2 t_1 r_2 A_i \exp\left(-\frac{j3\delta}{2}\right) + r_1 r_2 (t_1 t_2)^2 A_i \exp\left(-\frac{j5\delta}{2}\right) + \dots \\ &= r_1 r_2 A_i \exp\left(-\frac{j\delta}{2}\right) (1 + t_1 t_2 \exp(-j\delta) + (t_1 t_2 \exp(-j\delta))^2 + \dots) = \frac{r_1 r_2 \exp\left(-\frac{j\delta}{2}\right)}{1 - t_1 t_2 \exp(-j\delta)} A_i \\ A_r &= t_1 A_i + r_1^2 t_2 A_i \exp(-j\delta) + r_1^2 t_1 t_2^2 A_i \exp(-j2\delta) + r_1^2 t_1^2 t_2^3 A_i \exp(-j3\delta) + \dots \\ &= t_1 A_i + r_1^2 t_2 A_i \exp(-j\delta) (1 + t_1 t_2 \exp(-j\delta) + (t_1 t_2 \exp(-j\delta))^2 + \dots) \\ &= t_1 A_i + \frac{r_1^2 t_2 \exp(-j\delta)}{1 - t_1 t_2 \exp(-j\delta)} A_i \end{aligned}$$

と形式的に FP 共振器の場合と t と r とがひっくり返った形になる。ただし、カップラの場合には t と r の間には $\frac{\pi}{2}$ の位相差が生じる（6.1.2 項参照）ため、 t を実数とすれば r は純虚数である。 r' を実数として $r = -jr'$ とおくことにすれば、

$$A_t = \frac{-r_1' r_2' \exp\left(-\frac{j\delta}{2}\right)}{1 - t_1 t_2 \exp(-j\delta)} A_i, \quad A_r = t_1 A_i - \frac{r_1'^2 t_2 \exp(-j\delta)}{1 - t_1 t_2 \exp(-j\delta)} A_i = \frac{t_1 - t_2 \exp(-j\delta)}{1 - t_1 t_2 \exp(-j\delta)} A_i$$

となる。ここで $r_1'^2 + t_1^2 = 1$ を用いている。

したがって、強度透過率・反射率も同様に、

$$T_c = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{(1 - T_1)(1 - T_2)}{(1 - \sqrt{T_1 T_2})^2 + 4\sqrt{T_1 T_2} \sin^2(\delta/2)}, \quad T_c = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 + 4\sqrt{T_1 T_2} \sin^2(\delta/2)}{(1 - \sqrt{T_1 T_2})^2 + 4\sqrt{T_1 T_2} \sin^2(\delta/2)}$$

となる。つまり、リング共振器の場合、 T が 1 に近い（カップラでの結合が小さい）ほど共振特性が鋭くなる。

(8) (5.81)式は、 $a, b > 0$ として、

$$f(x) = \left(\frac{b}{x+a} - 1\right)x$$

の形をしているので、この最大値を求めればよい。微分すると、

$$f'(x) = \frac{b}{x+a} - 1 - \frac{bx}{(x+a)^2} = \frac{ab - (x+a)^2}{(x+a)^2} = -\frac{(x+a-\sqrt{ab})(x+a+\sqrt{ab})}{(x+a)^2}$$

$\sqrt{ab} - a > 0$ であれば、 $x > 0$ において $f(x)$ は上に凸で、 $x = \sqrt{ab} - a$ で最大値をとる。このときの $f(x)$ の値は、

$$f(\sqrt{ab} - a) = \left(\frac{b}{\sqrt{ab}} - 1\right)(\sqrt{ab} - a) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$a = 2\alpha_s L, b = 2g_0 L$ なので、

$$T_{\text{op}} = 2(\sqrt{\alpha_s g_0} - \alpha_s)L$$

また、 $P_0 = \frac{P_s}{2}f(x)$ なので、

$$P_{0,\text{max}} = (\sqrt{g_0} - \sqrt{\alpha_s})^2 L P_s$$

(9) まず ω_0 周りのテイラー展開(5.98)式の定数項 β_0 が(5.96)式で消えるのは明らか。 β_1, β_3 の項(一般的に奇数次の項)も ω_0 が(5.97)式を満たしているため消える。したがって、残るのは β_2 の項。

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \beta(\omega_1) + \beta(\omega_2) - \beta(\omega_3) - \beta(\omega_4) \\ &= \frac{1}{2}\beta_2(\omega_1 - \omega_0)^2 + \frac{1}{2}\beta_2(\omega_2 - \omega_0)^2 - \frac{1}{2}\beta_2(\omega_3 - \omega_0)^2 - \frac{1}{2}\beta_2(\omega_4 - \omega_0)^2 \end{aligned}$$

第1項と第3項を合わせると、

$$\frac{1}{2}\beta_2(\omega_1 - \omega_0)^2 - \frac{1}{2}\beta_2(\omega_3 - \omega_0)^2 = \frac{1}{2}\beta_2(\omega_1 + \omega_3 - 2\omega_0)(\omega_1 - \omega_3) = -\frac{1}{2}\beta_2(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)$$

ここで最後の変形に(5.97)式を用いている。同様に第2項と第4項を合わせると、

$$\frac{1}{2}\beta_2(\omega_2 - \omega_0)^2 - \frac{1}{2}\beta_2(\omega_4 - \omega_0)^2 = \frac{1}{2}\beta_2(\omega_2 + \omega_4 - 2\omega_0)(\omega_2 - \omega_4) = -\frac{1}{2}\beta_2(\omega_4 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)$$

$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ であるから、 $\omega_4 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_3$ で $\omega_4 - \omega_2 = \omega_1 - \omega_3$ であり、これは第1項と第3項の和に等しい。したがって、

$$\Delta\beta = -\beta_2(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)$$

(10) 例えば $N=3$ の場合、非縮退 FWM が(5.95)式の3通りに加えて、縮退 FWM

が $2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1, 2\omega_2 - \omega_3, 2\omega_3 - \omega_2, 2\omega_3 - \omega_1, 2\omega_1 - \omega_3$ の 6 通りあり、合わせて 9 通りになる。同様にして一般の N の場合には、非縮退 FWM が $3_N C_3$ あり、縮退 FWM が $2_N C_2$ なので、合わせて

$$3_N C_3 + 2_N C_2 = 3 \frac{N(N-1)(N-2)}{3 \times 2 \times 1} + 2 \frac{N(N-1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2} N^2 (N-1)$$

(11) SRS の前方励起で励起光が非常に強くて吸収が無視できるという仮定から、(5.105)式は、

$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_p I_s - \alpha_s I_s, \quad \frac{dI_p}{dz} = -\alpha_p I_p$$

となる。第 2 式より、

$$I_p(z) = I_p(0) \exp(-\alpha_p z)$$

第 1 式に代入して、

$$\frac{1}{I_s} \frac{dI_s}{dz} = g_R I_p(0) \exp(-\alpha_p z) - \alpha_s$$

積分して、

$$\ln(I_s(z)) = -\frac{g_R I_p(0)}{\alpha_p} \exp(-\alpha_p z) - \alpha_s z + C$$

$z = 0$ で $I_s(z) = I_s(0)$ となるように積分定数 C を決めると、

$$\ln(I_s(z)) = -\frac{g_R I_p(0)}{\alpha_p} \exp(-\alpha_p z) - \alpha_s z + \ln[I_s(0)] + \frac{g_R I_p(0)}{\alpha_p}$$

よって、

$$I_s(z) = I_s(0) \exp \left\{ -\frac{g_R I_p(0)}{\alpha_p} \exp(-\alpha_p z) - \alpha_s z + \frac{g_R I_p(0)}{\alpha_p} \right\}$$

$z = L, L_{\text{eff}} = \{1 - \exp(-\alpha_p L)\} / \alpha_p$ とすれば、

$$G = \frac{I_s(L)}{I_s(0)} = \exp(g_R I_p(0) L_{\text{eff}} - \alpha_s L)$$

となる。

(12) $\alpha = \exp j\pi\Delta f_c t, K = (N-1)/2$ と置くことにすると、

$$\begin{aligned} E(t) &= A \exp j2\pi f_0 t \sum_{q=-K}^K \alpha^{2q} = A \alpha^{-2K} \exp j2\pi f_0 t \sum_{q=0}^{2K} \alpha^{2q} = A \alpha^{-2K} \exp j2\pi f_0 t \frac{1 - \alpha^{4K+2}}{1 - \alpha^2} \\ &= A \exp j2\pi f_0 t \frac{\alpha^{2K+1} - \alpha^{-2K-1}}{\alpha - \alpha^{-1}} = A \frac{\sin(\pi N \Delta f_c t)}{\sin(\pi \Delta f_c t)} \exp j2\pi f_0 t \end{aligned}$$

最後の変形には $\sin(\pi \Delta f_c t) = (\alpha - \alpha^{-1})/2j$ および $\sin(N\pi \Delta f_c t) = (\alpha^{2K+1} - \alpha^{-2K-1})/2j$ を用いている。

第 6 章

(1) モード結合方程式 (6.2) で $\delta = (\beta_2 - \beta_1)/2, \kappa = \kappa^*$ とすると、例題 6.1 より、 $A(z)$ の一般解は

$$A(z) = \{C_1 \exp(j\beta_c z) + C_2 \exp(-j\beta_c z)\} \exp(-j\delta z)$$

となる。これをモード結合方程式 (6.2) の第 1 式に代入して、 $B(z)$ の一般解

$$B(z) = j \frac{A'(z)}{\kappa} \exp(2j\delta z) = -\frac{1}{\kappa} \{C_1(\beta_c - \delta) \exp(j\beta_c z) - C_2(\beta_c + \delta) \exp(-j\beta_c z)\} \exp(j\delta z)$$

が得られる。初期条件 $A(0) = A_0, B(0) = 0$ より、

$$C_1 + C_2 = A_0, \quad C_1(\beta_c - \delta) - C_2(\beta_c + \delta) = 0$$

これより、

$$C_1 = \frac{\beta_c + \delta}{2\beta_c} A_0, \quad C_2 = \frac{\beta_c - \delta}{2\beta_c} A_0$$

よって、

$$A(z) = A_0 \left\{ \frac{\beta_c + \delta}{2\beta_c} \exp(j\beta_c z) + \frac{\beta_c - \delta}{2\beta_c} \exp(-j\beta_c z) \right\} \exp(-j\delta z) = A_0 \left\{ \cos(\beta_c z) + j \frac{\delta}{\beta_c} \sin(\beta_c z) \right\} \exp(-j\delta z)$$

$$B(z) = -\frac{A_0(\beta_c - \delta)(\beta_c + \delta)}{\kappa} \{\exp(j\beta_c z) - \exp(-j\beta_c z)\} \exp(j\delta z) = -jA_0 \frac{\kappa}{\beta_c} \sin(\beta_c z) \exp(j\delta z)$$

最後の式変形には $\beta_c^2 - \delta^2 = \kappa^2$ を用いている。

(2) モード結合方程式 (6.23) の $A(z)$ の一般解は、例題 6.2 より、

$$A(z) = \{C_1 \exp(\alpha z) + C_2 \exp(-\alpha z)\} \exp(j\phi z)$$

となる。これをモード結合方程式 (6.23) の第 1 式に代入して、 $B(z)$ の一般解

$$B(z) = j \frac{A'(z)}{\kappa_G} \exp(-2j\varphi z) = \frac{j}{\kappa_G} \{C_1(\alpha + j\varphi) \exp(\alpha z) - C_2(\alpha - j\varphi) \exp(-\alpha z)\} \exp(-j\varphi z)$$

が得られる。境界条件 $A(0) = A_0, B(L) = 0$ より、

$$C_1 + C_2 = A_0, \quad C_1(\alpha + j\varphi) \exp(\alpha L) - C_2(\alpha - j\varphi) \exp(-\alpha L) = 0$$

これより、 $B = \frac{1}{2}(\alpha + j\varphi) \exp(\alpha L) + \frac{1}{2}(\alpha - j\varphi) \exp(-\alpha L) = \alpha \cosh(\alpha L) + j\varphi \sinh(\alpha L)$ と置いて、

$$C_1 = A_0 \frac{\alpha - j\varphi}{2B} \exp(-\alpha L), \quad C_2 = A_0 \frac{\alpha + j\varphi}{2B} \exp(\alpha L)$$

$A(z), B(z)$ の一般解に代入して、

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{A_0}{2B} [(\alpha - j\varphi) \exp\{\alpha(z - L)\} + (\alpha + j\varphi) \exp\{-\alpha(z - L)\}] \exp(j\varphi z) \\ &= A_0 \frac{\alpha \cosh\{\alpha(z - L)\} - j\varphi \sinh\{\alpha(z - L)\}}{B} \exp(i\varphi z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{j}{\kappa_G} \frac{A_0}{2B} \{(\alpha - j\varphi)(\alpha + j\varphi) \exp(\alpha z) - (\alpha + j\varphi)(\alpha - j\varphi) \exp(-\alpha z)\} \exp(-j\varphi z) \\ &= A_0 \frac{j\kappa_G \sinh\{\alpha(z - L)\}}{B} \exp(-i\varphi z) \end{aligned}$$

最後の式変形には $\alpha^2 + \varphi^2 = \kappa_G^2$ を用いている。

(3) $r(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ を微分すれば、(6.23)式より

$$\begin{aligned} \frac{dr(z)}{dz} &= \frac{A(z)B'(z) - A'(z)B(z)}{A^2(z)} = \frac{A(z) \cdot j\kappa_G A(z) \exp(-2j\varphi z) + j\kappa_G B(z) \exp(2j\varphi z) B(z)}{A^2(z)} \\ &= j\kappa_G [\exp(-2j\varphi z) + r^2(z) \exp(2j\varphi z)] \end{aligned}$$

$A(z), B(z)$ は透過波・反射波を表しているから、 $r(z)$ は局所的な複素反射率を表している。グレーティングからの複素反射率 $r = \frac{B(0)}{A(0)}$ のみを求めたいのであれば、モード結合方程式を境界条件付きで解く代わりに上の微分方程式を $r(L) = 0$ という初期条件で解けばよく、特に κ_G や φ が z 方向に変化するアポダイズグレーティングやチャープグレーティング（6.2.4 項参照）に対する計算がより簡単になる。ただし、モード結合方程式は線形微分方程式であったが、上の微分方程式は非線形微分方程式になっている。上の形の微分方程式は一般に **Riccati**（リッカチ、リカッチと書くことも）微分方程式と呼ばれる。

(4)

$$I_{\text{ph}} = C|E|^2 = R_0 P$$

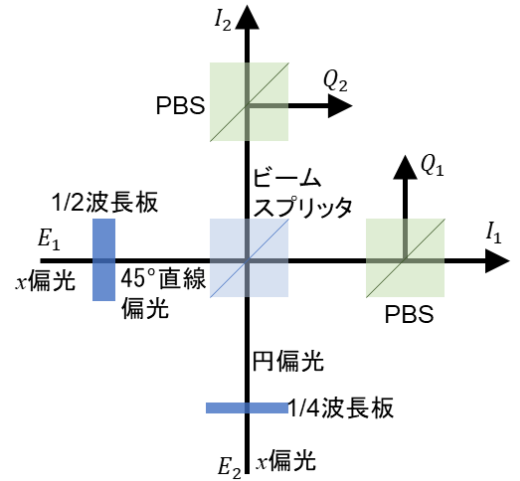
光の強度 I と電界振幅 E とは (2.39) 式の関係にあり、また $P = AI$ であるから、

$$C = \frac{A}{2} n c \varepsilon_0 R_0$$

(5) $E_{1,2} = A_{1,2} \exp j(\omega_{1,2} t + \varphi_{1,2})$ であるので、

$$\begin{aligned} I_{\text{ph}} &= \frac{1}{2} C |E_1 - jE_2|^2 - \frac{1}{2} C |-jE_1 + E_2|^2 = \frac{1}{2} C [(E_1 - jE_2)(E_1^* + jE_2^*) - (-jE_1 + E_2)(jE_1^* + E_2^*)] = jC(E_1 E_2^* - E_1^* E_2) \\ &= jCA_1 A_2 \{ \exp j(\omega_1 t + \varphi_1 - \omega_2 t - \varphi_2) - \exp j(\omega_2 t + \varphi_2 - \omega_1 t - \varphi_1) \} \\ &= jCA_1 A_2 \{ \exp j(\Delta\omega t + \Delta\varphi) - \exp -j(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \} = -2CA_1 A_2 \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned}$$

(6) 右図のような構成がよく用いられる。 x 直線偏光を $1/2$ 波長板と $1/4$ 波長板で 45° 傾いた直線偏光と円偏光に変換する。ビームスプリッタで結合しても偏波状態は変わらない。結合後に PBS で x 成分と y 成分に分離すると、分離したビート信号間には 90° の位相差が生ずる。また、2 つの偏光ビームスプリッタ (PBS) で分離された x 成分同士、 y 成分同士はバランス光受信機の場合と同じくビート



信号間には 180° の位相差が生じる。したがって、図の I_1 と I_2 、 Q_1 と Q_2 をそれぞれバランス受信すれば DC 成分のない 90° 位相差のある 2 つのビート信号が得られる。

第 7 章

(1) まず、 $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ であることを用いれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = \exp(-N_t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_t^n}{n!} N_t \exp(-N_t) = \exp(-N_t) \exp(N_t) = 1$$

である。平均 $\langle n \rangle$ は同様に、

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \exp(-N_t) \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{N_t^n}{n!} = N_t \exp(-N_t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_t^k}{k!} = N_t \exp(-N_t) \exp(N_t) = N_t$$

ここでは、途中で $k = n - 1$ と置換している。

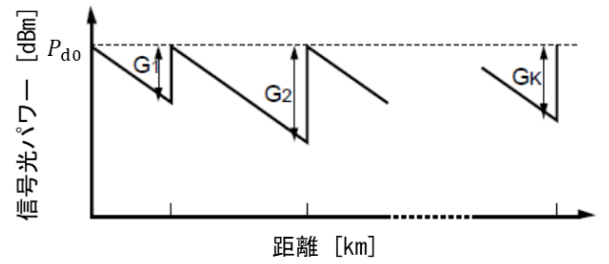
また、分散 $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ は、上と同様にして

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(n) = N_t^2 \exp(-N_t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_t^k}{k!} = N_t^2 \exp(-N_t) \exp(N_t) = N_t^2$$

が成り立つことから、 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = N_t^2 + N_t$ であることを用いれば、

$$\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) - 2\bar{n} \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) - \bar{n}^2 \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = N_t^2 + N_t - 2N_t^2 - N_t^2 = N_t$$

(2) 右図のように K 個の光増幅器が不等間隔で置かれているものとする。それぞれの光増幅器は許されている最大パワーまで信号光を増幅するものとする（しない場合のほうが SN 比が低いのは自明）。こ



の場合、 L を光増幅中継システム全体の長さとして、

$$G_1 G_2 G_3 \dots G_K = \exp \gamma L$$

である。このときの受信器での ASE パワー P_{ASEtotal} は、それぞれの光増幅器からの ASE パワーの和になる、なぜならどの増幅器から見てもその後の利得と損失が釣り合っているからである。したがって、

$$P_{\text{ASEtotal}} = 2hf_0(G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_K - K)n_{\text{sp}}\Delta f$$

となる。ここで係数 2 は 2 偏波あることを考慮している。

相加平均と相乗平均の関係から、

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_K}{K} \geq (G_1 G_2 G_3 \dots G_K)^{\frac{1}{K}} = \exp \frac{\gamma L}{K}$$

が成り立ち、等号成立は $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_K$ のときなので、ASE パワー P_{ASEtotal} はすべての増幅器の利得が等しい場合（= (7.43) 式の場合）に最小となる。また信号光パワーは変わらないため、このときに SN 比が最大になる。

(3) K 個の同じ利得 G の光増幅器が用いられるとして P_{ASEtotal} が最小となる G, K の値を考える。(2) の議論と同様にして、

$$G^K = \exp \gamma L$$

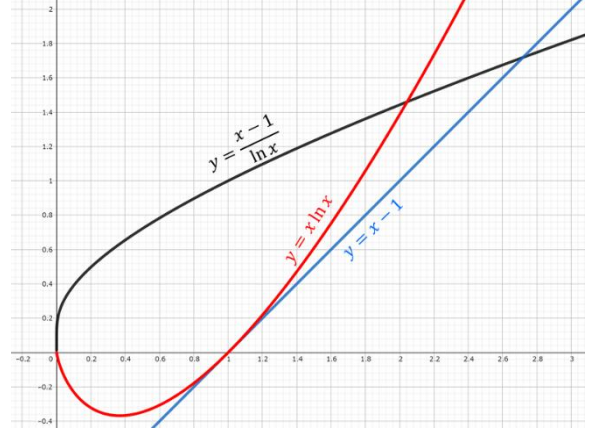
$$P_{\text{ASEtotal}} = 2hf_0 K(G-1)n_{\text{sp}}\Delta f = 2hf_0 \gamma L \frac{G-1}{\ln G} n_{\text{sp}}\Delta f$$

G は 1 以上でなければ第 1 式を満たせないから、 $x \geq 1$ の

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

の最小値を求めればよい。

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$



$y = x-1$ は $x \ln x$ の $x=1$ における接線であり、 $x \ln x$ は $x \geq 1$ で下に凸 ($(x \ln x)' > 0$) であるから、 $x \ln x - x + 1 > 0$ であり、したがって $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加。図に $y = \frac{x-1}{\ln x}$, $y = x \ln x$, $y = x-1$ のグラフを示す。最小値は $x=1$ で

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(\ln x)'} = 1$$

つまり、 $G=1, K=\infty$ であり、これは分布増幅を意味している。このときの ASE パワーは、

$$P_{\text{ASEtotal}} = 2hf_0 \gamma L n_{\text{sp}} \Delta f$$

で与えられる。

(4) 光増幅を受けていない ASK または PSK 信号のマーク時を考える。バランスヘテロダイン受信後の中間周波数 (IF) 信号・雑音光電流 I_{IF} は (7.21), (7.47) 式より、

$$I_{\text{IF}} = S(t) \cos(2\pi f_{\text{IF}} t) + x(t) \cos(2\pi f_{\text{IF}} t) + y(t) \sin(2\pi f_{\text{IF}} t)$$

と表される (図 7.15 参照)。ここで f_{IF} は中間周波数であり、第 1 項が信号成分で、

$$S(t) = \frac{2e\sqrt{P_s P_{\text{LO}}}}{hf_0}$$

であり、いま位相は重要ではないので 0 としてある。第 2, 3 項は f_{IF} を中心とした帯域制限されたショット雑音の信号同相成分と直交成分である。図 7.15 か

らも明らかなように、 f_{IF} を中心として必要な信号帯域はホモダインの場合の 2 倍になる。ここではナイキストレートを仮定して、 f_{IF} を中心とした帯域 R_b の BPF で IF 信号を切り出すものとする。このとき、ショット雑音の信号同相成分と直交成分の分散は等しく、その和が (7.68) 式のショット雑音の分散となる（ただし帯域は R_b ）となるので、

$$\langle x^2(t) \cos^2(2\pi f_{\text{IF}} t) \rangle = \langle y^2(t) \sin^2(2\pi f_{\text{IF}} t) \rangle = \frac{1}{2} \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle y^2(t) \rangle = \frac{1}{2} 2e I_{\text{LO}} R_b = \frac{e^2 P_{\text{LO}} R_b}{h f_0}$$

この IF 信号を同期検波によりベースバンド信号に変換する（図 7.10 (c) 参照）。具体的には I_{IF} に $\cos(2\pi f_{\text{IF}} t)$ を掛けると、

$$I_{\text{IF}} \cos(2\pi f_{\text{IF}} t) = \frac{1}{2} S(t) + \frac{1}{2} x(t) + (\text{高周波成分})$$

高周波成分は LPF によりカットされるので、このベースバンド信号の SN 比は、

$$SNR_{\text{sc}} = \frac{S^2(t)}{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{4e^2 P_s P_{\text{LO}}}{2e^2 P_{\text{LO}} R_b h f_0} = \frac{2N_s}{R_b} = 2N_t$$

(7.49) 式と比較すると、SN 比が光ホモダイン検波の場合の 1/2 となっていることが確かめられる。これは結局、IF 信号の段階でショット雑音の帯域が 2 倍となっているためである。

(5)

$$BER = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{V_{\text{th}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(V-s_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} dV + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{V_{\text{th}}} \exp\left\{-\frac{(V-s_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} dV \right]$$

最初の積分で $\frac{V-s_0}{\sqrt{2}\sigma_0} = t$ ($\frac{dV}{\sqrt{2}\sigma_0} = dt$) と置き換え、2 番目の積分では $\frac{s_1-V}{\sqrt{2}\sigma_1} = t$ ($-\frac{dV}{\sqrt{2}\sigma_1} = dt$) と置き換えると、

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{V_{\text{th}}-s_0}{\sqrt{2}\sigma_0}}^{\infty} \exp(-t^2) dt - \int_{\infty}^{\frac{s_1-V_{\text{th}}}{\sqrt{2}\sigma_1}} \exp(-t^2) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{V_{\text{th}}-s_0}{\sqrt{2}\sigma_0}}^{\infty} \exp(-t^2) dt + \int_{\frac{s_1-V_{\text{th}}}{\sqrt{2}\sigma_1}}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right\} \end{aligned}$$

(6) (7.45) 式より、

$$OSNR = \frac{P_s}{2hf_0 n_{\text{sp}} \Delta f} = \frac{N_s}{2n_{\text{sp}} \Delta f}$$

(7.70)式に代入して、

$$Q_b = \frac{2n_{sp}\Delta f \cdot OSNR}{2n_{sp}\sqrt{\Delta f B} + 2\sqrt{2n_{sp}^2\Delta f B \cdot OSNR + n_{sp}^2\Delta f B}} = \sqrt{\frac{\Delta f}{B}} \frac{OSNR}{1 + \sqrt{2 \cdot OSNR + 1}}$$

ナイキストレート $R_b = 2B$ を仮定すると、与えられた式が成り立つ。

(7)

$$Q_b = \frac{N_t}{n_{sp}\sqrt{2\Delta f/R_b} + \sqrt{2n_{sp}N_t + 2n_{sp}^2\Delta f/R_b}}$$

より、

$$Q_b\sqrt{2n_{sp}N_t + 2n_{sp}^2\Delta f/R_b} = N_t - Q_b n_{sp}\sqrt{2\Delta f/R_b}$$

2乗すると、

$$Q_b^2(2n_{sp}N_t + 2n_{sp}^2\Delta f/R_b) = N_t^2 - 2N_tQ_b n_{sp}\sqrt{2\Delta f/R_b} + Q_b^2 \cdot 2n_{sp}^2\Delta f/R_b$$

これより、

$$2n_{sp}Q_b^2 = N_t - 2Q_b n_{sp}\sqrt{\frac{2\Delta f}{R_b}} \rightarrow N_t = 2n_{sp}Q_b \left(Q_b + \sqrt{\frac{2\Delta f}{R_b}} \right)$$