

光ファイバ通信・計測のための

光エレクトロニクス

山下真司 著

数理工学社

「付録 B-I」

2022年 4月 15日

2023年 8月 12日更新

付録 B 周期的光パルスのパワースペクトル密度

時間 T ごとに繰り返す周期的な光パルス

$$X(t) = \exp j\omega_0 t \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(t - nT) \quad (\text{B.1})$$

のパワースペクトル密度 (PSD)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T_w \rightarrow \infty} \frac{1}{T_w} \left| \int_{-T_w/2}^{T_w/2} X(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \quad (\text{B.2})$$

を求める。(B.2)式中の積分を $I(\omega)$ とおくと、

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T_w}\right) \cdot X(t) \exp(-j\omega t) dt = \mathcal{F}\left(\text{rect}\left(\frac{t}{T_w}\right) \cdot X(t)\right) = \frac{T_w}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_w}{2\pi}\right) * \hat{X}(\omega) \quad (\text{B.3})$$

ここで時間領域での関数の積は周波数領域での畳み込みになることを利用している。(2.125)式より、

$$\hat{X}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \hat{A}(\omega - \omega_0) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}}) \quad (\text{B.4})$$

であり、また、デルタ関数の性質より、

$$f_1(x) * (f_2(x) \cdot \delta(x - a)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x - u) \delta(x - u - a) du = f_1(x - a) f_2(a) \quad (\text{B.5})$$

なので、

$$I(\omega) = \frac{T_w}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{T_w}{2\pi}(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}})\right) \cdot \hat{A}(n\omega_{\text{rep}}) \quad (\text{B.6})$$

(B.6)式は無限の項からなるが、それぞれの項は $\omega_{\text{rep}} = 2\pi/T$ 間隔で離れており、 T_w が十分に大きければ sinc 関数の幅は細くなるので、(B.6)式の絶対値の 2 乗はそれぞれの項の絶対値の 2 乗の和で表される。すなわち、

$$|I(\omega)|^2 = \frac{T_w^2}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{T_w}{2\pi}(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}})\right) \cdot |\hat{A}(n\omega_{\text{rep}})|^2 \quad (\text{B.7})$$

これを (B.2)式に代入して、

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T_w \rightarrow \infty} \frac{|I(\omega)|^2}{T_w} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T_w \rightarrow \infty} \frac{T_w}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{T_w}{2\pi}(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}})\right) \cdot |\hat{A}(n\omega_{\text{rep}})|^2 \quad (\text{B.8})$$

ここで、(B.8)式に出てくる $F_a(x) = a \cdot \text{sinc}^2(ax)$ という関数を考えてみると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_a(x) dx = 1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_a(0) \rightarrow \infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} F_a(x \neq 0) \rightarrow 0 \quad (\text{B.9})$$

であるので、 $a \rightarrow \infty$ において $F_a(x)$ はデルタ関数とみなすことができる。すなわち、PSDとして

$$S(\omega) = \frac{1}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}}) \cdot |\hat{A}(n\omega_{\text{rep}})|^2 = \frac{|\hat{A}(\omega - \omega_0)|^2}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}}) \quad (\text{B.10})$$

が得られる。 $|\hat{A}(\omega - \omega_0)|^2/2\pi$ は単一パルスの ESD で、 $1/T$ は繰り返し周期だから、(B.10)式は、

$$S(\omega) = (\text{単位時間内パルスの ESD}) \cdot \omega_{\text{rep}} \cdot (\omega_{\text{rep}} \text{間隔デルタ関数列}) \quad (\text{B.11})$$

となっていることがわかる。

なお、(B.4)式で表される周期的な光パルス $X(t)$ のフーリエ変換 $\hat{X}(\omega)$ の ESD を作ってみると、

$$\frac{|\hat{X}(\omega)|^2}{2\pi} = 2\pi \frac{|\hat{A}(\omega - \omega_0)|^2}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - n\omega_{\text{rep}}))^2 \quad (\text{B.12})$$

とデルタ関数の 2 乗が出てきて、これは発散する。しかし、デルタ関数の 2 乗を、

$$(\delta(x))^2 = \lim_{T_w \rightarrow \infty} \frac{T_w}{2\pi} \delta(x) \quad (\text{B.13})$$

と定義すれば、(B.10)式と同じ PSD を得ることができる。

付録 C 2 乗屈折率分布媒質中での光線

まず、光束が波長よりずっと大きいような光線が任意の屈折率分布 $n(x,y,z)$ をもつ媒質中でどのように振る舞うかを記述する光線方程式(ray equation)を導こう。波動方程式から導かれるヘルムホルツ方程式(2.141)

$$\nabla^2 u + n^2 k^2 u = 0 \quad (\text{C.1})$$

において、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp(-jk\varphi(\mathbf{r})) \quad (\text{C.2})$$

とおく。 $\varphi(\mathbf{r})$ は基準位置からの光路長

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int n(\mathbf{r}) ds \quad (\text{C.3})$$

に相当する。ここで ds は光線の経路に沿った線素である。(C.2)式を(C.1)式に代入すると、

$$\frac{\nabla^2 u_0}{k^2} - j \frac{\nabla^2 \varphi + \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi}{k} u_0 - (|\nabla \varphi|^2 - n^2) u_0 = 0 \quad (\text{C.4})$$

いま波長は十分に短いとしており、波数 k は波長に反比例するので、(C.4)式の第1,2項は無視する。このような波長を短くした極限での取り扱いを幾何光学 (geometrical optics) という。この場合、

$$|\nabla \varphi(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}) \quad (\text{C.5})$$

が成り立つ。ここで $\varphi(\mathbf{r})$ はアイコナル (eikonal) と呼ばれ、

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (\text{C.6})$$

は $k\varphi(\mathbf{r})$ が位相を表すことから、等位相面、つまり光の波面を表している。(C.5)式はアイコナル方程式 (eikonal equation) という。

光線は波面に垂直な方向なので、光線の単位ベクトル \mathbf{s} は、

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla \varphi(\mathbf{r})}{|\nabla \varphi(\mathbf{r})|} = \frac{\nabla \varphi(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \quad (\text{C.7})$$

となる。ここで最後の変形には (C.5) 式を用いている。一方、

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (\text{C.8})$$

であるので、

$$n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla \varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{C.9})$$

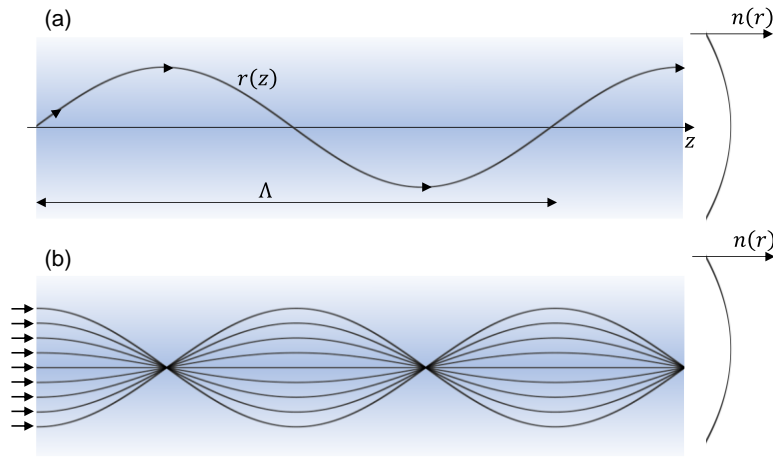
を得る。これを s で微分すると、

$$\frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla \varphi(\mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{d\varphi(\mathbf{r})}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{r}) \quad (\text{C.10})$$

となる。最後の変形には (C.3) 式を用いている。これが任意の屈折率分布に対する光線の伝搬方向を記述する光線方程式であり、 $\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ は光線の方向余弦である。

次に、図 C.1 のような 2 乗屈折率分布媒質中での光線の振る舞いを調べよう。いま考えているのは z 方向への近軸光線なので、光線方程式 (C.10) の s での微分は z での微分に置き換えることができる。それに屈折率分布として (4.11) 式の近似式

$$n(r) \sim n_1 \left\{ 1 - \Delta \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} = n_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (gr)^2 \right\} = n_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (gx)^2 - \frac{1}{2} (gy)^2 \right\}, \quad g = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a} \quad (\text{C.11})$$



図C.1 2乗屈折率分布媒質における光線

を代入すると、

$$n_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2}(gx)^2 - \frac{1}{2}(gy)^2 \right\} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} = -n_1 g^2(x, y, 0) \quad (\text{C.12})$$

左辺の { } 内の 2, 3 項目は微小量であるので無視すると、 $\mathbf{r} = (x, y)$ と置き直して、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} + g^2 \mathbf{r} = 0 \quad (\text{C.13})$$

が得られる。さらに、中心軸 (z 軸) と交わる子午光線 (meridional ray) を仮定すれば、

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + g^2 r = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{C.14})$$

が成り立つ。 $r(0) = r_0, r'(0) = r'_0$ としてこれは容易に解けて、

$$r(z) = r_0 \cos(gz) + \frac{r'_0}{g} \sin(gz) \quad (\text{C.15})$$

となる。したがって、図 C.1(a) に示すように、光路は正弦波状になり、その周期は

$$\Lambda = \frac{2\pi}{g} \quad (\text{C.16})$$

である。図 C.1(b) のように、水平な光線を入射した場合、 $r'_0 = 0$ なので、

$$r(z) = r_0 \cos(gz) \quad (\text{C.17})$$

であり、 $z = \Lambda/4$ のところで全ての光線が集まる焦点 (focal point) になることがわかる。つまり、このような 2 乗屈折率分布媒質はレンズと同じ作用をもち、

実際に GRIN(graded index)レンズとして実用化されている。

図 C.1(b)の光線がすべて同じ光路長をもつことは、1周期の光路長

$$L_{\text{op}} = \int_0^{\Lambda} n(r) \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz \quad (\text{C.18})$$

が同じ値になることを示せばよい。これは実際、 $(gr_0)^2 \ll 1$ を仮定すれば、

$$L_{\text{op}} = n_1 \Lambda \quad (\text{C.19})$$

と計算できる。 $n_1 \Lambda$ はz軸を直進する光線の光路長と同じであるから、仮定が成り立つような近軸光線であれば、2乗屈折率分布媒質中の光路は全て同じ光路長となる。

ここではz軸と交わる子午光線のみを考えたが、z軸と交わらないがその周りを回転しながら進む斜め光線(skew ray)も存在し、それに対しても2乗屈折率分布媒質が近似的に同じ光路長を与える。

付録 D シングル縦モードレーザのスペクトル線幅

発振しているレーザでは、誘導放出だけでなく、自然放出も起こる。自然放出は振幅および位相ゆらぎをもたらすため、その結果としてスペクトル線幅を広げる。

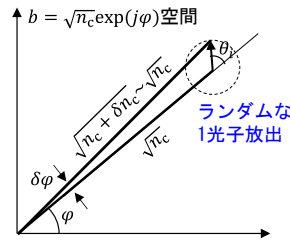
利得スペクトル $\phi(f)$ のピークの $f = f_1 = f_0$ で発振しているシングル縦モードレーザの共振器内の光子数(光子数密度ではないことに注意)を n_c 、位相を φ とする。自然放出によるゆらぎを考慮した n_c と φ の時間変化は

$$\frac{dn_c}{dt} = (g_t - \alpha_t)n_c + R_{\text{sp}} + F_n(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F_p(t) \quad (\text{D.1})$$

で与えられる。ここで、 g_t と α_t は単位時間あたりの共振器の利得・損失係数であり、5.2.5.3節で議論した長さあたりの利得・損失係数 g および α_c に対して

$$g_t = \frac{c}{n} g = \frac{c}{n} (N_2 - N_1) \sigma(f_1), \quad \alpha_t = \frac{c}{n} \alpha_c = \frac{1}{\tau_p} = 2\pi \delta f_c \quad (\text{D.2})$$

である。 R_{sp} は自然放出光の中で発振モードに混入してくる単位時間あたりの光子数である。自然放出を考慮した光増幅の(5.35)式と(D.1)式を比較することにより、(5.35)式が光パワーの長さに対する変化の式であり、(D.1)式は発振している一つのモードの光子数(=共振器内光子エネルギー/ hf_1)の時間に対する変



図D.1 レーザにおける自然放出光による位相の擾乱

化の式であることに注意して、

$$R_{sp} = \frac{c}{n} N_2 \sigma(f_l) \quad (D.3)$$

を得る。(D.3)式に等価帯域幅 $\phi(f_l)^{-1} = \Delta f_g$ が入らないのは、(5.35)式は光増幅であり f_l 以外の周波数の自然放出光も混入しうるのに対し、(D.1)式では $f = f_l$ で発振している一つのモードのみに対する式であるためである。 $F_n(t)$ と $F_p(t)$ は自然放出がランダムに起こることによる光子数と位相のゆらぎを表す項である。いまレーザはシングル縦モードで定常発振しているので発振条件 $g_t = \alpha_t$ が成り立っているので、(D.3)式は(D.2)式より

$$R_{sp} = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{c}{n} (N_2 - N_1) \sigma(f_l) = \frac{n_{sp}}{\tau_p} = 2\pi n_{sp} \delta f_c \quad (D.4)$$

と書き直せる。

光子数により規格化したレーザ共振器内の電界の複素振幅を

$$b = \sqrt{n_c} \exp(j\phi) \quad (D.5)$$

と表すことにすれば、図 D.1 のように複素平面上に表すことができる。いま、 $t = t_i$ において、自然放出により図に示す方向に 1 光子が放出されたとする。 n_c が十分に大きいとすれば、光子数ゆらぎ δn_c は径方向の変化 $\cos \theta_i \sim \sqrt{n_c + \delta n_c} - \sqrt{n_c} \sim \delta n_c / 2\sqrt{n_c}$ で近似できる。一方、位相ゆらぎ $\delta \phi$ は角方向の変化 $\sin \theta_i / \sqrt{n_c}$ で近似できる。したがって、変動項は時刻 0 から t までのすべての光子放出の和をとり、以下のように表せる。

$$F_n(t) = \sum_i 2n_c^{\frac{1}{2}} \cos \theta_i \delta(t - t_i), \quad F_p(t) = \sum_i n_c^{-\frac{1}{2}} \sin \theta_i \delta(t - t_i) \quad (D.6)$$

θ_i は事象 i ごとにランダムな値となるので、(D.6)式の時間平均は $\langle F_n(t) \rangle = \langle F_p(t) \rangle = 0$ である。これらが光子数および位相ゆらぎを記述する式であるが、自然放出では 1 光子が増えるだけであり、しきい値より十分高いところで発振しているレ

一ザでは光子数ゆらぎは無視できる。そこで、光子数はいつでも n_c に保たれているとする。一方、位相ゆらぎの式より

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t F_p(t) dt = \sum_i n_c^{-\frac{1}{2}} \sin \theta_i \quad (\text{D.7})$$

$\langle \varphi(t) - \varphi(0) \rangle = 0$ であり、 $|\varphi(t) - \varphi(0)|$ も微小であることを考えると、 $b(t)$ の自己相関関数は、 $x = \varphi(t) - \varphi(0)$ とおいて、

$$\langle b^*(t)b(0) \rangle = n_c \langle \exp(-jx) \rangle \sim n_c \langle 1 - jx - x^2/2 \rangle = n_c \langle 1 - x^2/2 \rangle \sim n_c \langle \exp(-x^2/2) \rangle \quad (\text{D.8})$$

と近似できる。(D.7)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \langle b^*(t)b(0) \rangle &= n_c \left\langle \exp \left\{ - \left(\sum_i n_c^{-\frac{1}{2}} \sin \theta_i \right)^2 / 2 \right\} \right\rangle = n_c \exp \left[\left\langle - \sum_i \frac{\sin^2 \theta_i}{2n_c} \right\rangle \right] \\ &= n_c \exp \left(- \sum_i \frac{1}{4n_c} \right) = n_c \exp \left(- \frac{R_{sp}t}{4n_c} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

ここで、 θ_i がランダムな値をとるため、 $\langle \sum_{i \neq j} \sin \theta_i \sin \theta_j \rangle = 0$ 、 $\langle \sum_i \sin^2 \theta_i \rangle = 1/2$ になることを用いている。また、 $\sum_i 1$ は時刻 0 から t までのすべての光子数を表すので $R_{sp}t$ に等しい。このように、レーザ出力の自己相関関数は指数関数となる。2.8 節より、自己相関関数をフーリエ変換するとパワースペクトル密度が求められ、表 A.2 よりそれはスペクトル線幅

$$\delta f_{ST} = \frac{R_{sp}}{4\pi n_c} \quad (\text{D.10})$$

のローレンツ関数となる。

一方、 $hf_1 n_c$ は増幅媒質からの誘導放出により共振器内に溜まった光子のエネルギーである。増幅媒質から放射される誘導放出パワーを P_e とすれば、光子寿命 τ_p を用いて、

$$P_e = \frac{hf_1 n_c}{\tau_p} = 2\pi hf_1 \delta f_c n_c \quad (\text{D.11})$$

と表せる。なお、共振器の内部損失がない ($\alpha_s = 0$) 場合、共振器内に溜まった光子はいずれ出力されるので、 P_e はレーザ出力 P_0 に等しい。 $\alpha_s = 0$ でないが α_s は小さいとできる場合、レーザ出力 P_0 は内部損失で消費される分を除いた、

$$P_0 = \frac{\alpha_m}{\alpha_c} P_e = \frac{\alpha_m}{\alpha_s + \alpha_m} P_e \quad (\text{D.12})$$

となる。(D.10)式に(D.4),(D.11),(D.12)式により R_{sp} と n_c を消去すれば、

$$\delta f_{ST} = \frac{\pi h f_1 (\delta f_c)^2}{P_e} n_{sp} = \frac{\pi h f_1 (\delta f_c)^2}{P_o} \frac{\alpha_m}{\alpha_c} n_{sp} \quad (D.13)$$

というシャロー-タウンズの式が得られる。

付録 E 半導体の利得係数

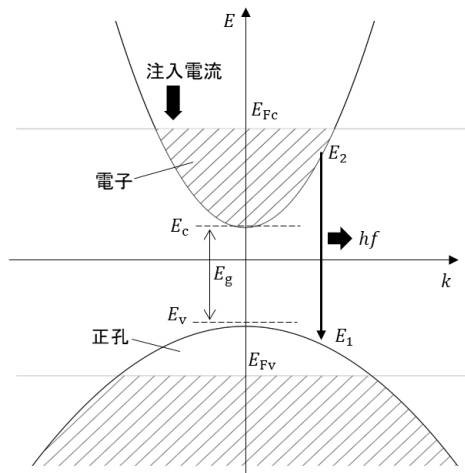
半導体レーザーでも誘導放出による光増幅が基本原理であり、したがって利得係数も(5.22)式と同じ

$$g(f) = (N_2 - N_1) \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 \tau_{sp}} \phi(f) \quad (E.1)$$

で表せる。しかしながら、固体レーザーの場合には誘導放出に関与する電子は原子中において互いに影響を及ぼさないためボルツマン分布に従うのに対し、半導体では前節の最初に述べたように電子はエネルギー帯を構成し、そこでの電子の集団はフェルミ分布

$$F(E, E_F) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (E.2)$$

に従う¹。ここで E_F はフェルミ準位 (Fermi level) である。通常、フェルミ分布は熱平衡状態に対して適用され価電子帯と伝導帯に対して同一のフェルミ準位が定義されるが、電流が注入されている半導体ではこれに当てはまらない。半導体ではバンド間緩和時間 τ_R (~数 μs) に対してバンド内緩和時間 τ_A (~1ps) が



図E.1 電流が注入されている活性層のバンド図

¹フェルミ分布は $f(E)$ と表すのが普通だが、周波数の f と紛らわしいためここでは大文字で表すことにする。

短いため、電流が注入されている場合には価電子帯と伝導帯それぞれに対して擬フェルミ準位 (quasi Fermi level) を用いてフェルミ分布を適用することができる。電流が注入されている活性層では、図 E.1 に示すように、伝導帯では伝導帯の底 E_c から擬フェルミ準位 E_{Fc} まで電子が占めているのに対し、価電子帯では擬フェルミ準位 E_{Fv} から価電子帯の頂点 E_v まで正孔が占めていると考えることができる。擬フェルミ準位 E_{Fc}, E_{Fv} はフェルミ分布関数と状態密度 (density of states)

$$D_c(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}, \quad D_v(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_v - E)^{1/2} \quad (\text{E.3})$$

を用いて、

$$N_c + N = \int_{E_c}^{\infty} D_c(E) F(E, E_{Fc}) dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{(E - E_c)^{1/2}}{\exp\left(\frac{E - E_{Fc}}{k_B T}\right) + 1} dE \quad (\text{E.4})$$

$$N_v + N = \int_{-\infty}^{E_v} D_v(E) (1 - F(E, E_{Fv})) dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{(E_v - E)^{1/2}}{\exp\left(\frac{E_{Fv} - E}{k_B T}\right) + 1} dE \quad (\text{E.5})$$

を解くことにより求められる。ここで、 m_c, m_v はそれぞれ伝導帯の電子および価電子帯の正孔の有効質量 (effective mass) であり、電子の静止質量 $m = 9.11 \times 10^{-31} [\text{kg}]$ とは異なることに注意されたい。 N_c, N_v はそれぞれ電子が注入されていないときの伝導帯の電子および価電子帯の正孔の密度であり、 N は電子が注入されたことによる電子・正孔の密度である。なお、(E.5) 式で状態密度に $F(E, E_{Fv})$ ではなく $1 - F(E, E_{Fv})$ を掛けているのは、 $F(E, E_{Fv})$ は価電子帯の電子がある状態を占める確率であり、(価電子帯の正孔がある状態を占める確率) = (価電子帯の電子がある状態を占めない確率) であるからである。

(E.4), (E.5) 式により擬フェルミ準位 E_{Fc}, E_{Fv} が求められているとして利得係数を求めよう。 $hf = E_2 - E_1$ を満たす光が入射したとすると、5.5.1 項で議論したとおり吸収または放出は図 E.1 のように波数 k の変化を伴わないところでのみ起こる。このとき、 E_2, E_1 は

$$E_2 = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}, \quad E_1 = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} \quad (\text{E.6})$$

と表せるので、

$$hf = E_c - E_v + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (\text{E.7})$$

であり、 $E_g = E_c - E_v$ はバンドギャップエネルギーで $m_r = m_c m_v / (m_c + m_v)$ は電子と正孔の換算有効質量 (reduced effective mass) である。これより E_2, E_1 を

$$E_2 = E_c + \frac{m_r}{m_c}(hf - E_g), \quad E_1 = E_v - \frac{m_r}{m_v}(hf - E_g) \quad (\text{E.8})$$

と表すことができる。

これより半導体での利得係数を求めよう。(E.1)式において、 N_2, N_1 は E_2, E_1 付近での状態密度 $D_{c,v}(E_{2,1})dE_{2,1}$ とフェルミ分布関数 $F(E_{2,1}, E_{F_{c,v}})$ の積で表せる。また、スペクトル形状関数 $\phi(f)$ は半導体の場合バンド内緩和時間 $\tau_A \sim 1[\text{ps}]$ により決まるが、通常は半導体の利得の幅に比べて十分に狭いとすることができるため、 $1/df$ で置き換えることができる。これより、(E.1)式は、

$$g(f) = \frac{c^2}{8\pi n^2 f^2 \tau_R} \left(D_c(E_2) F(E_2, E_{F_c}) \frac{dE_2}{df} - D_v(E_1) F(E_1, E_{F_v}) \frac{dE_1}{df} \right) \quad (\text{E.9})$$

とすることができる。ここで τ_{sp} はバンド間緩和時間 τ_R (\sim 数 $[\mu\text{s}]$)で置き換えてある。これに(E.3)式および(E.8)式を代入することにより、半導体での利得係数が、

$$g(f) = \frac{\sqrt{2} m_r^{3/2} c^2}{\pi n^2 \hbar^2 f^2 \tau_R} (hf - E_g)^{1/2} (F(E_2, E_{F_c}) - F(E_1, E_{F_v})) \quad (\text{E.10})$$

として求められる。これより、増幅が起こる(利得係数が正になる)ためには、

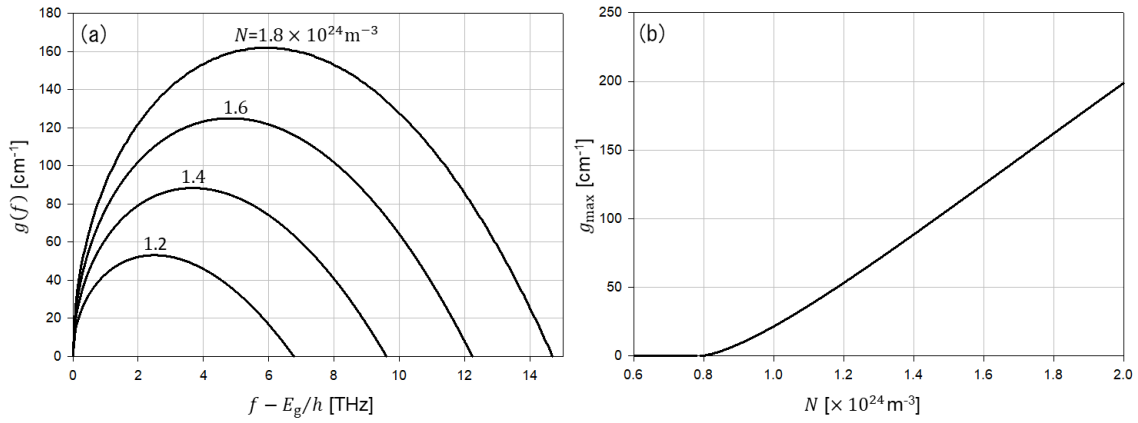
$$F(E_2, E_{F_c}) > F(E_1, E_{F_v}) \quad (\text{E.11})$$

が必要であり、これが半導体における反転分布条件である。 F は(E.2)式で定義されているから、これは、

$$E_g < hf < E_{F_c} - E_{F_v} \quad (\text{E.12})$$

と同じである。ここで左の不等号は(E.10)式で $(hf - E_g)^{1/2}$ が実数でなければならないためである。

(E.10)式の $g(f)$ が利得係数スペクトルを与えるが、 $E_{2,1}$ も周波数 f の関数であるため f に対して複雑な依存性をもっている。図 E.2(a)は波長 $1.3\mu\text{m}$ 帯の InGaAsP 半導体レーザについて $g(f)$ を計算した例である。ここでは、 $E_g = 0.96[\text{eV}]$, $m_c = 0.059m$, $m_v = 0.44m$, $m = 9.11 \times 10^{-31}[\text{kg}]$, $n = 3.5$, $\tau_R = 2.5[\text{ns}]$, $N_c = N_v = 2 \times 10^{23}[\text{m}^{-3}]$, $T = 300[\text{K}]$ と



図E.2 半導体の利得係数の計算例

しており、 N を4つの値、(A) 1.2×10^{24} , (B) 1.4×10^{24} , (C) 1.6×10^{24} , (D) $1.8 \times 10^{24} \text{m}^{-3}$ について計算している。ここからわかるように、注入された電子密度 N が増えるにつれて利得帯域が広がり、(D)の場合には約 14.7THz ($\sim 82.7 \text{nm}$)となっている。利得のピーク g_{max} も N が増えるにつれてシフトし、(D)の場合には $g_{\text{max}} \sim 160 [\text{cm}^{-1}]$ であり、例題 5.1 でのルビーの利得係数 ($g = 5.0 \times 10^{-2} [\text{cm}^{-1}]$)に比べると桁違いに大きい。これは増幅に関わる電子の密度が大きく違うことに起因しており、半導体レーザーの共振器長 L を非常に小さくできることの原因である。なお、 $f - E_g/h$ が0に近いところでの g の増加は主に(E.10)式の $(hf - E_g)^{1/2}$ により、 $f - E_g/h$ が大きくなると g が減少するのは主にフェルミ分布の差の項によるものである。図 E.2 (b)は g_{max} を N の関数として計算したもので、これより、

$$g_{\text{max}} \sim \sigma(N - N_{\text{tr}}) \quad (\text{E.13})$$

とほぼ線形に近似できる。このとき、 $\sigma = 1.9 \times 10^{-20} [\text{m}^2]$ であり、また $N_{\text{tr}} = 9.5 \times 10^{23} [\text{m}^{-3}]$ は半導体が透明になるのに必要な注入電子密度である。

付録 F Er ドープ光ファイバ増幅器の利得特性

Er ドープ光ファイバ増幅器で得られる利得は Er ドープ光ファイバの構造や Er 濃度、長さ、励起光波長・パワー、入射信号光パワーなどに依存する。信号光のパワー P_s 及び ASE パワーは、 σ_e と σ_a がわかっているならば、(5.35)式を修正した

$$\frac{dP_s}{dz} = \Gamma_g(\sigma_e N_2 - \sigma_a N_1)P_s + 2hf\Gamma_g N_2 \sigma_e \Delta f_g \quad (\text{F.1})$$

を解くことにより得られる。ここで Γ_g は Er がドープされている活性層への光閉じ込め率で、右辺 2 項目の ASE の光に 2 が掛かっているのは ASE が信号の偏

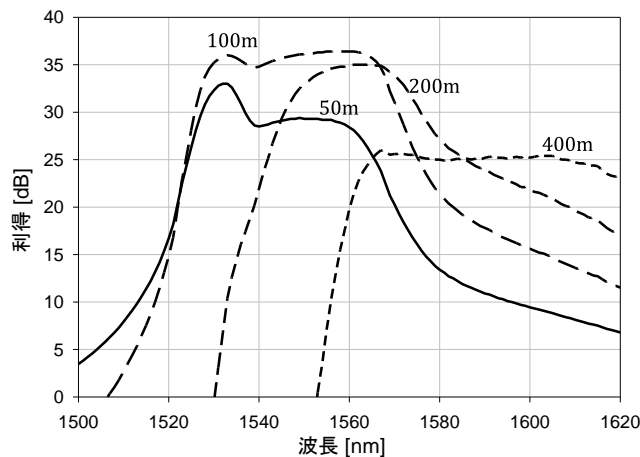
光に直交な成分も有する無偏光であるからである。励起光パワー P_p についても励起光波長での σ_e と σ_a および Γ_g の値を用いれば同じ式が成り立つ。ただし、(5.35) 式では $N_{1,2}$ が一定としたが、長い光ファイバ増幅器では信号光は増幅され励起光は減衰するため場所により異なるとして計算する必要がある。例題 5.2 の 3 準位系のレート方程式を誘導と吸収断面積が異なるとして解くと、

$$N_2 = \frac{\frac{\sigma_{a,s} P_s}{\sigma_{e,s} + \sigma_{a,s} P_{\text{sat}}} + \frac{\sigma_{a,p} P_p}{\sigma_{e,p} + \sigma_{a,p} P_{\text{th}}}}{1 + \frac{P_s}{P_{\text{sat}}} + \frac{P_p}{P_{\text{th}}}} N, \quad N_1 = N - N_2 \quad (\text{F.2})$$

$$P_{\text{sat}} = \frac{hf_s A_{\text{eff},s}}{(\sigma_{e,s} + \sigma_{a,s}) \tau_{\text{sp}}}, \quad P_{\text{th}} = \frac{hf_p A_{\text{eff},p}}{(\sigma_{e,p} + \sigma_{a,p}) \tau_{\text{sp}}} \quad (\text{F.3})$$

となり、(F.1) 式は P_s と P_p の非線形連立方程式となる。ここで $\sigma_{e,s}, \sigma_{a,s}$ は信号光波長での、 $\sigma_{e,p}, \sigma_{a,p}$ は励起光波長での誘導・吸収断面積で、 $A_{\text{eff},s}$ と $A_{\text{eff},p}$ はそれぞれの波長での有効モード断面積である。波長によってモードの形状は異なることに注意しなければならない。

もっと正確には、ASE は $-z$ 方向にも進行し、また励起も $-z$ 方向に行くこともあるため、 $-z$ 方向の式も加える必要がある。さらに、利得の波長特性や ASE スペクトルを正確に計算するためには、波長ごとに信号・ASE を分割してそれぞれについて式を立てる必要がある。図 F.1 は図 5.21 の誘導・吸収断面積を用いて利得の波長依存性を、Er ドープ光ファイバ長 L を変えながら計算した結果である。ここでは $1.48 \mu\text{m}$ 帯励起光のパワー $P_p = 84 [\text{mW}]$ とし、入射信号光のパワーは $P_s(0) = -20 [\text{dBm}]$ とした。また Er 濃度 $N = 5.47 \times 10^{24} [\text{m}^{-3}]$, $\tau_{\text{sp}} = 11 [\text{ms}]$, $A_{\text{eff},s} = A_{\text{eff},p} = 102 [\mu\text{m}^2]$ とし、Er はコアの中心部 $r \leq 1.6 [\mu\text{m}]$ にのみドープされていることを仮定し



図F.1 Er ドープ光ファイバ増幅器の利得特性の計算例

た。 $L = 100[\text{m}]$ で $1530\text{-}1560\text{nm}$ の波長帯域（Cバンド）で大きな利得をもつことが分かる。光ファイバ長をさらに長くしていくと利得は長波長側にシフトし、 $L = 400[\text{m}]$ では $1560\text{-}1610\text{nm}$ の波長帯域（Lバンド）で非常に平坦な利得特性をもつことが分かる。図 5.21 からわかるように Lバンドでは σ_e は小さくなるが、 $\sigma_e > \sigma_a$ が成り立っているため、長くすることで利得を生じる。

付録 G 光パラメトリック増幅

励起光、信号光およびアイドラ光の振幅を A_p, A_s, A_i と表すと、それらは SPM に加えて XPM 項と FWM 項を加えた非線形シュレーディンガー方程式を満たす。ただし、損失は無視でき、また FWM が発生する状況では分散も小さいので分散項も無視できるものとする、

$$\frac{dA_p}{dz} = -j\gamma \left\{ (|A_p|^2 + 2|A_s|^2 + 2|A_i|^2) A_p + 2A_s A_i A_p^* \exp(j\Delta\beta z) \right\} \quad (\text{G.1})$$

$$\frac{dA_s}{dz} = -j\gamma \left\{ (|A_s|^2 + 2|A_i|^2 + 2|A_p|^2) A_s + A_p^2 A_i^* \exp(-j\Delta\beta z) \right\} \quad (\text{G.2})$$

$$\frac{dA_i}{dz} = -j\gamma \left\{ (|A_i|^2 + 2|A_s|^2 + 2|A_p|^2) A_i + A_p^2 A_s^* \exp(-j\Delta\beta z) \right\} \quad (\text{G.3})$$

という連立方程式となる。いま分散は位相不整合量 $\Delta\beta$ にのみ効くとしているので、 A_p, A_s, A_i は t に依存しない z のみの関数で、したがって波形は変化しない。

ここで、励起光パワー P_p は CW で信号光・アイドラ光よりずっと強く、信号光・アイドラ光へのエネルギー移乗は無視できるとする近似 (undepleted pump approximation) をとると、上式の $|A_s|^2, |A_i|^2$ と $A_s A_i A_p^*$ の項は無視できる。(G.1)式より $A_p(z) = \sqrt{P_p} \exp(-j\gamma P_p z)$ なので、

$$\frac{dA_s}{dz} = -j\gamma P_p \{ 2A_s + A_i^* \exp(-2j\gamma P_p z - j\Delta\beta z) \}, \quad \frac{dA_i}{dz} = -j\gamma P_p \{ 2A_i + A_s^* \exp(-2j\gamma P_p z - j\Delta\beta z) \} \quad (\text{G.4})$$

が成り立つ。これらに $B_{s,i} = A_{s,i} \exp(2j\gamma P_p z)$ という置き換えを施せば、 $\kappa = -\Delta\beta + 2\gamma P_p$ として、

$$\frac{dB_s}{dz} = -j\gamma P_p B_i^* \exp(j\kappa z), \quad \frac{dB_i^*}{dz} = j\gamma P_p B_s \exp(-j\kappa z) \quad (\text{G.5})$$

先に述べた位相整合条件を満たす場合 ($\Delta\beta = 0$)、上式を $B_i(0) = 0$ という初期条件で

解けば、

$$B_s = (1 - j\gamma P_p z) B_s(0) \exp(j\gamma P_p z), \quad B_i = -j\gamma P_p z B_s^*(0) \exp(j\gamma P_p z) \quad (G.6)$$

となる。つまり、

$$P_i = (\gamma P_p z)^2 P_s(0) \quad (G.7)$$

であることがわかる。

実は、 $B_{s,i}$ が最大になるのは $\Delta\beta = 0$ のときではなく、 $\kappa = 0$ 、つまり $\Delta\beta = 2\gamma P_p$ のときである。これは励起光の SPM による位相整合のずれで、 κ を**実効的位相不整合量 (effective phase mismatch)**という。このとき、(G.5)式の解は、光ファイバ長を L として、

$$B_s = B_s(0) \cosh(\gamma P_p L), \quad B_i = -jB_s(0) \sinh(\gamma P_p L) \quad (G.8)$$

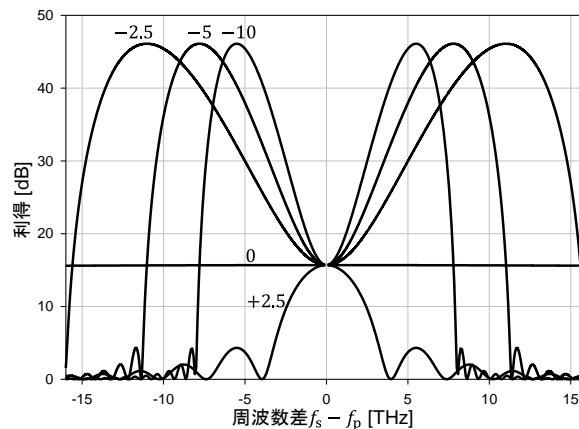
となる。つまり、

$$P_s = P_s(0) \cosh^2(\gamma P_p L), \quad P_i = P_s(0) \sinh^2(\gamma P_p L) \quad (G.9)$$

であり、 $\gamma P_p L$ が十分に大きければ

$$G = \frac{P_s}{P_s(0)} = \cosh^2(\gamma P_p L) \sim \sinh^2(\gamma P_p L) \sim \frac{1}{4} \exp(2\gamma P_p L) \quad (G.10)$$

となり、信号光・アイドラ光ともに指数関数的に増大することがわかる。これが光パラメトリック増幅 (OPA) である。ファイバ OPA は $\kappa = 0$ を満たすところで高利得な光増幅が可能である。図 G.1 は $\gamma P_p L = 6$ としたときのファイバ OPA による光増幅スペクトルの計算例である。励起光周波数における f_p における β_2 の値をマイナス (異常分散) にすることで、広い周波数域で 40dB を超える利得が得ら



図G.1 パラメトリック増幅特性の計算例
 図中の数字は f_p における $\beta_2 L [\times 10^{-3} \text{ps}^2]$ の値

れることがわかる。 β_2 の値の調整は実際には励起光波長を光ファイバの零分散波長からわずかにずらすことで実現される。2波長励起、つまり非縮退 OPA の場合にはさらに広帯域な増幅が可能であるが、実際には増幅の周波数特性は光ファイバの β_4 やz方向の分散のゆらぎなどにより大きく影響を受ける。実験的には数 100nm の広帯域や 70dB 以上の高利得が実現されている。

付録 H 均一な利得媒質をもつレーザでのモード同期

均一な広がりをもつ利得媒質では、利得スペクトルは一様に飽和する。一般に利得媒質の飽和からの回復時間は、共振器一周の時間（=FSRの逆数）よりもずっと遅い。したがって、モード同期パルス発振しているレーザに対しては、利得の飽和は平均の強度に対して起こる、すなわち

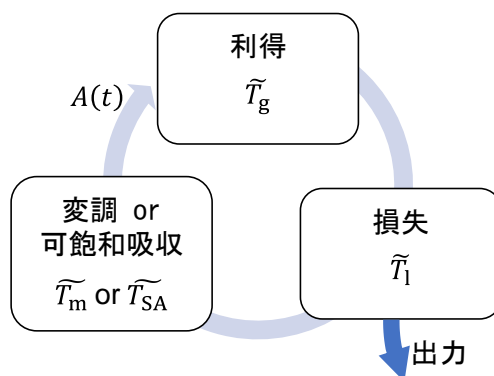
$$g = \frac{g_0}{1 + \langle I \rangle / I_s} \quad (\text{H.1})$$

である。ここで $\langle I \rangle$ は時間平均強度であり、一つのパルスの光強度を $I(t)$ とすれば、

$$\langle I \rangle = f_{\text{rep}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt \quad (\text{H.2})$$

である。

いま、モード同期レーザを図 H.1 のように利得、損失（結合損失を含む）、および変調（または可飽和吸収）部分に分けて、それぞれを通過して周回するとする。これはリングレーザのモデルであるが、FPレーザにもそのまま適用できる。また、4.5節の非線形シュレーディンガー方程式と同様に、ある任意の地点での一つの光パルスの複素振幅を $A(t)$ と表し、光パルスとともに進む座標系を採用することとする。また、ここでは、 $|A(t)|^2$ が光強度 $I(t)$ となるように規格化されているものとする。



図H.1 モード同期レーザのモデル

まず能動モード同期について考える。共振器中の利得、損失（結合損失や変調器の固有損失も含む）、変調の部分を表す演算子を $\widetilde{T}_g, \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_m$ とすると、定常状態では、

$$\widetilde{T}_m \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_g A(t) = A(t) \quad (\text{H.3})$$

が成り立つ。利得係数は強度については(5.22)式のように

$$g = \frac{g_p}{1 + \{2(\omega - \omega_0)/\delta\omega_g\}^2} \quad (\text{H.4})$$

と書くことができる。ここで g_p は(H.1)式にしたがって飽和した利得係数のピーク値であり、(5.11)式のスペクトル形状関数を各周波数 ω に書き改めている。振幅についての増倍係数は、(5.9)式を参照して、

$$\frac{g_p/2}{1 + 2j(\omega - \omega_0)/\delta\omega_g} \quad (\text{H.5})$$

である。したがって、増幅の前後での複素振幅のスペクトル $\hat{A}(\omega - \omega_0)$ の変化は、

$$\frac{\hat{A}_{\text{out}}(\omega - \omega_0)}{\hat{A}_{\text{in}}(\omega - \omega_0)} = \exp\left\{\frac{g_p L/2}{1 + 2j(\omega - \omega_0)/\delta\omega_g}\right\} \quad (\text{H.6})$$

と表せる。ここで利得媒質の長さは共振器長と同じ L であるとしている²。(H.6)式の指数は

$$\frac{g_p L/2}{1 + 2j(\omega - \omega_0)/\delta\omega_g} = \frac{g_p L}{2} \left[1 - \frac{2j(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g} - \left\{ \frac{2(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g} \right\}^2 + \dots \right] \quad (\text{H.7})$$

と展開できるので、2次の項までとることにすると、

$$\frac{\hat{A}_{\text{out}}(\omega - \omega_0)}{\hat{A}_{\text{in}}(\omega - \omega_0)} = \exp\left\{-\frac{jg_p L(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g}\right\} \exp\frac{g_p L}{2} \left[1 - \left\{ \frac{2(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g} \right\}^2 \right] \quad (\text{H.8})$$

ここで1番目の積項 $\exp\left\{-\frac{jg_p L(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g}\right\}$ は位相シフトを与えるだけなのでここでは無視できる。なお、この位相シフトが(5.72)式で表される利得のピークと縦モードの周波数がずれているときの発振周波数のずれの原因である。2番目の積項が利得スペクトルを与えるが、共振器の損失が小さくて $g_p L \ll 1$ と仮定できれば、

$$\frac{\hat{A}_{\text{out}}(\omega - \omega_0)}{\hat{A}_{\text{in}}(\omega - \omega_0)} = 1 + \frac{g_p L}{2} \left[1 - \left\{ \frac{2(\omega - \omega_0)}{\delta\omega_g} \right\}^2 \right] \quad (\text{H.9})$$

これをフーリエ逆変換すれば、(4.51)式を導いたのと同様に $j(\omega - \omega_0)$ が $\frac{\partial}{\partial t}$ に対応す

²モード同期レーザーでは利得媒質の長さは共振器長より短い場合が多い。そのときには g_p を共振器内の平均の利得係数と解釈すればよい。

ることに注意して、

$$\tilde{T}_g = 1 + \frac{g_p L}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{\delta\omega_g} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \right\} \quad (\text{H.10})$$

とできる。

損失係数 α_c についても同様に、 $\alpha_c L \ll 1$ と仮定して、

$$\tilde{T}_1 = \exp\left(-\frac{\alpha_c L}{2}\right) \sim 1 - \frac{\alpha_c L}{2} \quad (\text{H.11})$$

であり、変調についても同様に $\alpha_m L \ll 1$ として、

$$\tilde{T}_m = \exp\left\{-\frac{\alpha_m L}{2}(1 - \cos\omega_m t)\right\} \sim 1 - \frac{\alpha_m L}{2}(1 - \cos\omega_m t) \quad (\text{H.12})$$

パルスは変調の損失が小さいところ、つまり $t=0$ 近傍を透過するので、そこでは

$$\cos\omega_m t \sim 1 - \frac{1}{2}(\omega_m t)^2 \quad (\text{H.13})$$

なので、

$$\tilde{T}_m = 1 - \frac{\alpha_m L}{4}(\omega_m t)^2 \quad (\text{H.14})$$

これらを (H.3) 式に入れ、再度 $g_p L, \alpha_c L, \alpha_m L \ll 1$ を用いれば、

$$\left[g_p \left\{ 1 + \left(\frac{2}{\delta\omega_g} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \right\} - \alpha_c - \frac{\alpha_m}{2}(\omega_m t)^2 \right] A(t) = 0 \quad (\text{H.15})$$

を得る。これは調和振動子に対する 1 次元のシュレーディンガー方程式と同じ形になる。その解は、 H_n をエルミート多項式として、

$$A(t) = A_n H_n(\omega_p t) \exp\left(-\frac{\omega_p^2 t^2}{2}\right) \quad (\text{H.16})$$

で与えられる。 ω_p は

$$\omega_p = \left(\frac{\alpha_m}{2g_p} \right)^{1/4} \left(\frac{\omega_m \delta\omega_g}{2} \right)^{1/2} \quad (\text{H.17})$$

で与えられ、さらに、

$$1 - \frac{\alpha_c}{g_p} = \frac{4\omega_p^2}{\delta\omega_g^2} (2n + 1) \quad (\text{H.18})$$

が成り立つ必要がある。

このうち、安定な解は $n=0(H_0=1)$ のガウス形の解のみである。2.7 節の議論により、このガウス形パルスのパルス幅は、周波数に直すと、

$$\Delta\tau_p = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\omega_p} = \left(\frac{2\sqrt{2}\ln 2}{\pi^2}\right)^{1/2} \left(\frac{g_p}{\alpha_m}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{f_m\delta f_g}\right)^{1/2} \sim 0.45 \left(\frac{g_p}{\alpha_m}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{f_m\delta f_g}\right)^{1/2} \quad (\text{H.19})$$

ここで、 g_p と α_m は近い値でありさらに $1/4$ 乗されているためほぼ $(g_p/\alpha_m)^{1/4} \sim 1$ としてよい。したがって、

$$\Delta\tau_p \sim 0.45 \left(\frac{1}{f_m\delta f_g}\right)^{1/2} \quad (\text{H.20})$$

このガウス形パルスはチャープしていないので、スペクトルもガウス形であり、表 2.2 の時間帯域幅積を満たす。周期的なパルス波形であるので、図 2.18 で示したようなガウス形スペクトルを包絡線としてもつ線スペクトル列となる。このとき、(H.18)式より

$$1 - \frac{\alpha_c}{g_p} = \frac{4f_p^2}{\delta f_g^2} \sim \frac{\sqrt{2}f_m}{\delta f_g} \quad (\text{H.21})$$

が成り立つ。CW レーザの場合には $g_p = \alpha_c$ であったので、(H.21)式は $g_p > \alpha_c$ つまり利得のピークが損失を上回っていることを意味している。モード同期の場合には変調により生じる $\pm f_m = \pm \Delta f_c$ のサイドバンドが隣接する縦モードに分配されるため、 $g_p > \alpha_c$ でも定常状態が保たれるわけである。

次に、受動モード同期について考える。利得と損失の演算子は同じである。可飽和吸収素子は、損失係数 α_{SA} とすれば、 $\alpha_{SA}L \ll 1$ と仮定して、

$$\widetilde{T}_{SA} = \exp\left(-\frac{\alpha_{SA}L}{2}\right) \sim 1 - \frac{\alpha_{SA}L}{2} \quad (\text{H.22})$$

ここで、可飽和吸収の応答時間はパルス幅よりも短いと仮定し、可飽和吸収特性が、 I_{SA} を飽和強度として、

$$\alpha_{SA} = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_{SA}} \quad (\text{H.23})$$

と表せるものとする。 $I = |A(t)|^2$ となるように $A(t)$ が規格化されており、また $I/I_{SA} \ll 1$ と仮定できれば、 \widetilde{T}_{SA} は、

$$\widetilde{T}_{SA} \sim 1 - \frac{\alpha_0 L}{2} \left(1 - \frac{|A(t)|^2}{I_{SA}} \right) \quad (\text{H.24})$$

となる。したがって、受動モード同期に対する (H.15) 式に相当する式は、

$$\left[g_p \left\{ 1 + \left(\frac{2}{\delta\omega_g} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \right\} - \alpha_c - \alpha_0 + \alpha_0 \frac{|A(t)|^2}{I_{SA}} \right] A(t) = 0 \quad (\text{H.25})$$

この解は、

$$A(t) = A_0 \text{sech} \left(\frac{t}{\tau_p} \right) \quad (\text{H.26})$$

という sech 形パルスである。 τ_p は、 $I_0 = |A_0|^2$ として、

$$\tau_p = \left(\frac{2g_p I_{SA}}{\alpha_0 I_0} \right)^{1/2} \frac{2}{\delta\omega_g} \quad (\text{H.27})$$

で与えられ、さらに、

$$\alpha_c + \alpha_0 - g_p = \frac{4g_p}{\delta\omega_g^2 \tau_p^2} \quad (\text{H.28})$$

が成り立つ必要がある。 $\alpha_c + \alpha_0$ は可飽和吸収素子が飽和していないときの共振器全体の損失係数であるので、(H.28) 式はパルスがないところでは (利得) < (損失) であり、パルスが来るときのみ (利得) > (損失) となることを意味している。2.7 節の議論により、(H.26) 式の sech 形パルスのパルス幅は、周波数に直すと、

$$\Delta\tau_p = 2 \ln(\sqrt{2} + 1) \tau_p \sim \left(\frac{2g_p I_{SA}}{\alpha_0 I_0} \right)^{1/2} \frac{0.56}{\delta f_g} \quad (\text{H.29})$$

となり、おおよそ δf_g の逆数程度になる。この sech 形パルスはチャープしていないので、スペクトルも sech 形であり、表 2.2 の時間帯域幅積を満たす。

実際にはパルス幅が短くなればなるほど、分散と非線形性の影響を大きく受けることになる。分散と非線形性の影響も同じようにモデル化することはできるが、ここでは割愛する。受動モード同期に対しては (H.26) 式のような sech 形パルスとなるため、それが分散と非線形性の部分において 4.5.4 項で扱った光ソリトンの条件を満たすことができれば安定に存在できる、つまりソリトンファイバレーザが作れる、ということを指摘しておく。

付録 I ビート雑音による SN 比

光増幅後の信号は図 7.12 (b)に示すように信号に加えて一様なスペクトル密度の広帯域 ASE 雑音加わる。いま、図 I.1 に示すように広帯域 ASE 雑音を N 個の狭帯域 (帯域: $\delta f = \Delta f/N$) 成分に等分する。まず、そのうちの周波数 $f_a = \omega_a/2\pi$ 付近の成分に注目し、これが信号光と作るビートを考えよう。簡単のため、信号は変調されていない CW 光とするが、7 章脚注 7 で注意したとおり広帯域な ASE 光に対しては十分な近似である。このとき、信号光と狭帯域 ASE 成分の電界の和は

$$E = A_0 \exp j(\omega_0 t + \varphi_0) + A_a \exp j(\omega_a t + \varphi_a) \quad (\text{I.1})$$

のように表すことができる。ここで A_0, A_a は実数である。これが作るビート電流は、(6.37)式より、

$$i_a = 2CA_0 A_a \cos(\Delta\omega_a t + \Delta\varphi_a) \quad (\text{I.2})$$

となり、 $f = \Delta f_a = \Delta\omega_a/2\pi$ のところに狭帯域なビートスペクトルを作る。ここで $\Delta\omega_a = \omega_0 - \omega_a = 2\pi(f_0 - f_a)$, $\Delta\varphi_a = \varphi_1 - \varphi_2$ である。(I.2)式の 2 乗平均値は

$$\langle i_a^2 \rangle = 2C^2 A_0^2 A_a^2 \quad (\text{I.3})$$

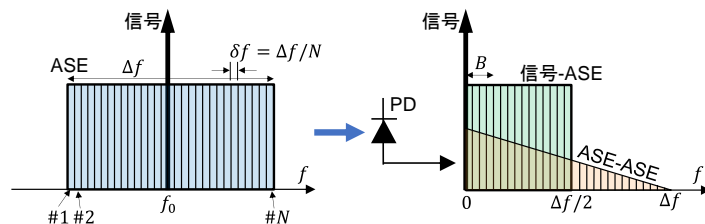
である。(7.36)式より、信号成分の光パワーは GP_s 、狭帯域 ASE 成分の光パワーは $hf_0(G-1)n_{sp}\delta f$ であるので³、それぞれの直接検出電流は

$$GI_s = G \frac{e}{hf_0} P_s = CA_0^2, \quad I_a = e(G-1)n_{sp}\delta f = CA_a^2 \quad (\text{I.4})$$

と表せる。したがって、(I.3)式は、

$$\langle i_a^2 \rangle = 2 \frac{e}{hf_0} GP_s \cdot e(G-1)n_{sp}\delta f = 2n_{sp}G(G-1)eI_s\delta f \quad (\text{I.5})$$

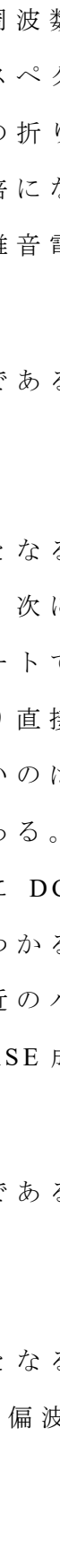
と書き直すことができる。 δf は狭帯域 ASE 成分の帯域であるから、パワースペ



図I.1 CW信号光と狭帯域ASE成分が作るビートスペクトル

³(7.31)式の ASE の項にある係数 2 がつかないのは、同じ偏波状態の光しかビートを作らないからである。

クトル密度としては $2n_{sp}G(G-1)eI_s$ となる。

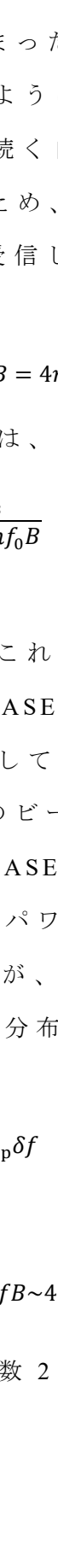
ASE は上で考えた狭帯域 ASE 成分が集まったものであり、それぞれが別々の周波数にビートを作るため、 1.1 に示すように信号-ASE ビート雑音はパワースペクトル密度が一様な DC から $\Delta f/2$ まで続く白色雑音となる。ただし、周波数の折り返しがある ($\pm\Delta f_a$ が区別できない) ため、片側パワースペクトル密度は 2 倍になる。したがって、帯域 B の受信器で受信した光電流の分散 σ_b^2 (= 光電流の雑音電流の 2 乗平均値) は、

$$\sigma_b^2 = 4n_{sp}G(G-1)eI_sB \sim 4n_{sp}eG^2I_sB = 4n_{sp}e^2G^2N_sB \quad (I.6)$$

である。これより、ビート雑音限界 SN 比は、

$$SNR_b = \frac{G^2I_s^2}{\sigma_b^2} = \frac{P_s}{4n_{sp}hf_0B} \quad (I.7)$$

となる。

次に、ASE-ASE ビート雑音を考えよう。これは狭帯域 ASE 成分同士が作るビートである。DC 付近に現れるのは狭帯域 ASE 成分とそれ自身のビート、つまり直接検出成分であり、これは場合の数として N の場合がある。次に周波数が高いのは狭帯域 ASE 成分とその隣の成分とのビートであり、これは $N-1$ の場合がある。このようにして考えてゆくと、ASE-ASE ビート雑音は  1.1 に示すように DC をピークとして Δf まで続く三角形のパワースペクトル密度を持つことがわかる。したがってこれは白色雑音でないが、7.5.3 項で議論したように DC 付近のパワースペクトル密度を使ってガウス分布で近似できる。ひとつの狭帯域 ASE 成分 (1 偏波) の直接検出成分は、

$$I_a = CA_a^2 = e(G-1)n_{sp}\delta f \quad (I.8)$$

であるので、光電流の分散 σ_{aa}^2 は

$$\sigma_{aa}^2 = 2 \frac{NI_a^2}{\delta f} (2B) = 4e^2(G-1)^2n_{sp}^2\Delta fB \sim 4e^2G^2n_{sp}^2\Delta fB \quad (I.9)$$

となる。ここで、(I.9) 式に現れる 2 つの係数 2 は、周波数の折り返しと ASE が 2 偏波あることに対応している。