『微分積分問題集[第 2 版]』（2023 年 10 月）数理工学社

## 1 章 C 問題詳解

### 問題 1.48

(1) 漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n \Leftrightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$ だから，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_2-3a_1=-3$，公比 3 の等比数列。よって，$b_n=3b_{n-1}=3^2b_{n-2}=\cdots=3^{n-1}b_1=-3^n. \therefore a_{n+1}=3a_n-3^n.$

ここで，$c_n=\frac{a_n}{3^n}$とおくと，$c_1=\frac{a_1}{3^1}=1$. $c_2=\frac{a_2}{3^2}=\frac{2}{3}$. $c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n-3^n}{3^{n+1}}=c_n-\frac{1}{3}$.

すなわち，数列$\{c_n\}$は初項 1，交差$-\frac{1}{3}$の等差数列だから，$c_n=1-\frac{1}{3}(n-1)=\frac{4-n}{3}$.

ゆえに，数列$\{a_n\}$の一般項は$a_n=3^nc_n=3^n\times\frac{4-n}{3}=3^{n-1}(4-n)$.

(2)（本小問の$a_n$は(1)と定数くらいずれているだろうと考えて）

$a_n=d_n+k$とおいて本小問の漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n+4$ に代入すると，

$$d_{n+2}+k=6\{d_{n+1}+k\}-9\{d_n+k\}+4. \therefore d_{n+2}=6d_{n+1}-9d_n+4(1-k).$$

よって，$k=1$，すなわち $a_n=d_n+1$ とおけば，数列$\{d_n\}$は(1)の漸化式を満たし，初項$d_1=a_1-1=1-1=0$, 第 2 項$d_2=a_2-1=4-1=3$ だから，

$$d_{n+1}-3d_n=3(d_n-3d_{n-1})=\cdots=3^{n-1}(d_2-3d_1)=3^n.$$

$$\therefore \frac{d_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{d_n}{3^n}+\frac{1}{3}. \therefore \frac{d_n}{3^n}=\frac{d_1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n-1}{3}.$$

$$\therefore d_n=3^n\frac{n-1}{3}=3^{n-1}(n-1). \therefore a_n=d_n+1=3^{n-1}(n-1)+1.$$

(3)（本小問の$a_n$は(1)と$n$の 1 次式くらいずれているだろうと考えて）

$a_n=e_n+pn+q$とおいて本小問の漸化式 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n+n$ に代入すると，

$$e_{n+2}+p(n+2)+q=6\{e_{n+1}+p(n+1)+q\}-9\{e_n+pn+q\}+n.$$

$$\therefore e_{n+2}=6e_{n+1}-9e_n+(1-4p)n+4(p-q).$$

よって，$p=q=\frac{1}{4}$，すなわち $a_n=e_n+\frac{n+1}{4}$ とおけば，数列$\{e_n\}$は(1)の漸化式を満たし，初項$e_1=a_1-\frac{1+1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 第 2 項$e_2=a_2-\frac{2+1}{4}=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$だから，

$$e_{n+1}-3e_n=3(e_n-3e_{n-1})=\cdots=3^{n-1}(e_2-3e_1)=\frac{7}{4}\cdot 3^{n-1}.$$

$$\therefore \frac{e_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{e_n}{3^n}+\frac{7}{36}. \therefore \frac{e_n}{3^n}=\frac{e_1}{3}+\frac{7}{36}(n-1)=\frac{7n-1}{36}.$$

$$\therefore e_n=3^n\frac{7n-1}{36}=\frac{3^{n-2}}{4}(7n-1). \therefore a_n=e_n+\frac{n+1}{4}=\frac{3^{n-2}}{4}(7n-1)+\frac{n+1}{4}.$$

問題 1.49

(1) $n=1$ のとき $a_1=1\geqq 1$ で成り立つ。$n=k$ のとき不等式が成り立つと仮定する。$a_1a_2\cdots a_{k+1}=1$ とする。一般性を失わずに $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{k+1}$ としてよい。$a_1\leqq 1\leqq a_{k+1}$ であることに注意する。$(a_1a_{k+1})a_2\cdots a_k=1$ だから帰納法の仮定により $(a_1a_{k+1})+a_2+\cdots+a_k\geqq k$ であって，

$$
\begin{aligned}
a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}&=a_1+a_{k+1}-(a_1a_{k+1})+(a_1a_{k+1})+a_2+\cdots+a_k\\
&\geqq a_1+a_{k+1}-(a_1a_{k+1})+k=k+1-(a_1-1)(a_{k+1}-1)\geqq k+1\,.
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ でも成り立つから，数学的帰納法により全ての自然数 $n$ においてこの不等式は成り立つ。

　次に等号成立のときを調べる。再び一般性を失わずに $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ とし，$a_1\leqq 1\leqq a_n$ に注意する。$(a_1a_n)+a_2+\cdots+a_{n-1}\geqq n-1$ より上と同様に $n=a_1+a_2+\cdots+a_n\geqq n-(a_1-1)(a_n-1)$．よって，$a_1=1$ または $a_n=1$ であるが，$a_1a_2\cdots a_n=1$ かつ $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ だから，いずれの場合も $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ となるより他ない。//QED

(2) (1)で各 $a_k$ を $\dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ に置き換えれば相加相乗平均の関係が成り立つ。さらに，相加相乗平均の関係において各 $a_k$ をその逆数に置き換えれば調和相乗平均の関係が成り立つ。等号成立はいずれも $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\dfrac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\cdots=\dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=1$，

すなわち $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限る。//QED

**問題1.50**　（教科書の「指数・累乗・階乗」参照.）

(1) $\frac{n^3}{3^n} \to 0 \ (n \to \infty)$

(2) $\frac{3^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$

(3) $\frac{n^3}{n!} = \frac{n^3}{2^n}\frac{2^n}{n!} \to 0 \times 0 = 0 \ (n \to \infty)$

(4) 十分大きい$n$に対して$\frac{n^3 2^n}{n!} < \frac{2^{2n}}{n!} = \frac{4^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$

**問題1.51**

(1) $n \to \infty$ のとき$\frac{2010^n}{n!} \to 0$. (教科書の「指数・累乗・階乗」参照.)

(2) $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \ (n \to \infty)$

**問題1.52**

(1) $r = \frac{1}{a}$ とおくと$r > 1$であって, $n \to \infty$のとき$na^n = \frac{n}{r^n} \to 0$. (教科書の「指数・累乗・階乗」参照)

(2) $S_N = \sum_{n=1}^{N} na^{n-1}$とおくと$(1-a)S_N = \sum_{n=1}^{N} a^{n-1} - Na^N = \frac{1-a^N}{1-a} - Na^N$であるから$S_N = \frac{1-a^N}{(1-a)^2} - \frac{Na^N}{1-a}$. 右辺第1項は$\frac{1}{(1-a)^2}$に収束し, 右辺第2項は(2)より$N \to \infty$ のとき0に収束。ゆえに, $N \to \infty$のとき$S_N \to \frac{1}{(1-a)^2}$.

問題1.53

(1) 相加相乗平均の関係より $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\geqq\sqrt{3}$. $a_n=\sqrt{3}$ とならないことを背理法で示す。ある$n$に対して$a_n=\sqrt{3}$が成り立つとする。$n=1$のとき，$a_1=3\neq\sqrt{3}$ より矛盾。$n\geqq 2$のとき，$a_n>0$ ($n$: 自然数)なることに留意しつつ，

$$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{3}{a_{n-1}}\right)\Leftrightarrow(a_{n-1}-\sqrt{3})^2=0$$

より$a_{n-1}=\sqrt{3}$. 同様にして結局$a_1=\sqrt{3}$を得るが，$a_1=3$だからこれは矛盾。

//QED

(2) 漸化式の両辺から$\sqrt{3}$を引くと, (1)より$1>\frac{\sqrt{3}}{a_n}$であることから

$$a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{a_n}\right)<\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3}).$$

//QED

(3) (1),(2)より

$$0<a_n-\sqrt{3}<\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\sqrt{3}\right)<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1-\sqrt{3}\right)\to 0\ (n\to\infty).$$

したがって，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ となる。 //QED

**問題 1.54**

(1) 数列$\{a_n\}$が$\sqrt{3}-1$に収束することを以下に示す。

まず，$a_1>0$および$a>0 \Rightarrow 0<\frac{2}{2+a}<1$より2以上の全ての自然数$n$に対し$0<a_n<1$

であることに注意する。$\lambda(2+\lambda)-2=\lambda^2+2\lambda-2=0$を解くと$\lambda=-1\pm\sqrt{3}$. 簡単のため

$\alpha=-\sqrt{3}-1$，$\beta=\sqrt{3}-1$とおく。

$$a_{n+1}=\frac{-\alpha\beta}{a_n-\alpha-\beta} \quad \therefore a_{n+1}-\beta=\frac{-\beta(a_n-\beta)}{|\alpha|+(a_n-\beta)}$$

$n$を2以上の自然数とすると，$0<a_n<1$より$1-\sqrt{3}<a_n-\beta<2-\sqrt{3}$.

$\therefore 2<|\alpha|+(a_n-\beta)<3$. $\therefore \frac{1}{3}<\frac{1}{|\alpha|+(a_n-\beta)}<\frac{1}{2}$. $\therefore |a_{n+1}-\beta|<\frac{\beta}{2}|a_n-\beta|$.　$0<\frac{\beta}{2}<1$より

$$0\leqq|a_n-\beta|<\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-2}|a_2-\beta|\to 0\ (n\to\infty).$$

はさみうちの原理により$\{a_n\}$は収束し，その極限値は$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta=\sqrt{3}-1$.　//QED

(2) 数列$\{a_n\}$が$a+\sqrt{a^2+1}$に収束することを以下に示す。

$(\lambda-2a)\lambda-1=\lambda^2-2a\lambda-1=0$の 2 解は$\lambda=a\pm\sqrt{a^2+1}$.

$\alpha=a-\sqrt{a^2+1}$，$\beta=a+\sqrt{a^2+1}$とおく。解と係数の関係より$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=-1$.

また，$a_1=2a>0$および$a_n>0 \Rightarrow a_{n+1}=2a+\frac{1}{a_n}>0$より全ての自然数$n$に対し$a_n>0$.

(I) $a_1=\beta$のとき，$a_n=\beta$ならば$a_{n+1}=2a+\frac{1}{a_n}=\alpha+\beta+\frac{-\alpha\beta}{\beta}=\beta$であるから，数学的帰

納法により全ての自然数$n$に対し$a_n=\beta$，したがって$\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$.

(II)　$a_1 \neq \beta$ のとき，

$$a_{n+1} = \alpha + \beta + \frac{-\alpha\beta}{a_n} \quad \therefore a_{n+1} - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{a_n}\right) = \alpha \frac{a_n - \beta}{a_n}$$

$b_n = \frac{1}{a_n - \beta}$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1 - \beta}$ で

$$b_{n+1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a_n}{a_n - \beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{b_n} + \beta}{\frac{1}{b_n}} = \frac{\beta b_n + 1}{\alpha}. \quad \therefore b_{n+1} - \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{\beta}{\alpha}\left(b_n - \frac{1}{\alpha - \beta}\right).$$

$$\therefore b_n - \frac{1}{\alpha - \beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\left(b_1 - \frac{1}{\alpha - \beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a_1 - \beta} - \frac{1}{\alpha - \beta}\right).$$

$\alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 + 1}$ および $\frac{\beta}{\alpha} = -\left(\sqrt{a^2 + 1} + a\right)^2$ を代入すると

$$b_n = \left\{-\left(\sqrt{a^2 + 1} + a\right)^2\right\}^{n-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}.$$

ここで，$\sqrt{a^2 + 1} + a > 1$，$\frac{-1}{\sqrt{a^2+1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} = -\frac{\sqrt{a^2+1} + a}{2\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1} - a\right)} < 0$ に注意する。三角不等式より

$$|b_n| \geqq \left|\sqrt{a^2 + 1} + a\right|^{2n-2}\left|\frac{-1}{\sqrt{a^2 + 1} - a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}\right| - \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}} \to +\infty$$

$$\therefore |a_n - \beta| = \frac{1}{|b_n|} \to 0. \quad \therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \beta.$$

(I), (II) あわせて，数列 $\{a_n\}$ は $\beta = \sqrt{a^2 + 1} + a$ に収束する。//QED

**問題1.55**

(1) $\left(1+x\right)^n \geqq 1+nx > nx$． 最初の不等号は$n=1$のとき明らかであり，$n \geqq 2$に対しては教科書の例題1.9において数学的帰納法で示した。//QED

(2) 自然数$n$に対し$\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$だから, (1)において$x=\frac{1}{\sqrt{n}}$とおけば$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > \sqrt{n}$.

両辺の$n$乗根をとれば示したい式を得る。//QED

(3) (2)の両辺を2乗すると, 1より大きい数の$n$乗根は1より大きいこと

(1より小さい数の$n$乗がやはり1より小さいことの対偶)とあわせて

$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 1 \ (n \to \infty)$. //QED

**問題 1.56**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$とおく。自然数$n$に対し$\frac{1}{n}$は正であるから$\{S_n\}$は単調増加数列。したがってその極限は収束するかまたは$+\infty$に発散するかのいずれかである。

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_4 - S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} \geqq 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_8 - S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4+k} \geqq 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^N} - S_{2^{N-1}} = \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \frac{1}{2^{N-1}+k} \geqq 2^{N-1} \times \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2} \ (N\text{は自然数})$$

辺々を足し合わせると，任意の自然数$N$に対し

$$S_{2^N} - 1 \geqq \frac{N}{2} \qquad \therefore\ S_{2^N} \geqq \frac{N}{2} + 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$がある実数$S$に収束すると仮定するとすると，$N > 2S$なる$N$に対し

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = S_{2^N} \geqq \frac{N}{2} + 1 > S + 1$$

これは矛盾。ゆえに$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$は収束せず，したがって$+\infty$に発散する。//QED

**問題 1.57**

（I） $x=0$ のとき， $1^n=1$ より明らか。

（II） $x>0$ のとき， 問題1.32(1)より

$$(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)\geqq 1+\left(x+\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{n}\right)=1+x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

前問の結果より，$n\to\infty$ のとき右辺は$+\infty$ に発散し，したがって左辺も$+\infty$ に発散する。

（III） $x<0$ のとき， 問題 1.32(2)より$N>|x|$なる任意の自然数$N$ に対し，

$$\left(1-\frac{|x|}{N}\right)\left(1-\frac{|x|}{N+1}\right)\cdots\left(1-\frac{|x|}{N+n}\right)<\frac{1}{1+\left(\frac{|x|}{N}+\frac{|x|}{N+1}+\cdots+\frac{|x|}{N+n}\right)}=\frac{1}{1+|x|\sum_{k=N}^{N+n}\frac{1}{k}}$$

左辺は有限個の正の数の積だからやはり正である。一方， 前問の結果より， $n\to\infty$ のとき右辺の分母は$+\infty$ に発散し， したがって右辺は$0$ に収束する。両辺に$(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{N-1}\right)$ をかけてもやはり$0$ に収束する。//QED