$\boxed{71}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x+a-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$ について，

$$x+a-\sqrt{x^2+x+1}\times\frac{x+a+\sqrt{x^2+x+1}}{x+a+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{(x+a)^2-(x^2+x+1)}{x+a+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x(2a-1)+a^2-1}{x+a+\sqrt{x^2+x+1}}\times\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{(2a-1)+\frac{a^2-1}{x}}{1+\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$x\to\infty$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2$ であるから，

極限の性質より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left((2a-1)+\frac{a^2-1}{x}\right)=2$

したがって，$2a-1=2$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{72}$ （1） $y' = (x)'e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$

(2) $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+1\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(3) $y = x^{x^x}$ 両辺の自然対数をとると $\log y = \log x^{x^x} = x^x \log x$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = (x^x)'\log x + x^x(\log x)'$$

$$= x^x(\log x+1)\log x + x^x\frac{1}{x} = x^{x-1}\left\{x(\log x)^2 + x\log x + 1\right\}$$

$$\therefore\ y' = x^{x^x+x-1}\left\{x(\log x)^2 + x\log x + 1\right\}$$

補足 $(x^x)'$ について：

$f(x) = x^x$ の両辺の自然対数をとると $\log f(x) = \log x^x = x\log x$

両辺を x で微分すると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x)'\log x + x(\log x)' = \log x + 1$

$$\therefore\ f'(x) = x^x(\log x+1)$$

(4)　$t=\dfrac{1}{2x^2+1}$ とおくと　$y=\sin^{-1}t$

合成関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2x^2+1}\right)^2}}\frac{-4x}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^4+4x^2}{\left(2x^2+1\right)^2}}}\frac{-4x}{\left(2x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{|x|\sqrt{x^2+1}\left(2x^2+1\right)}$$

$$\therefore\ y'=-\frac{2}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\quad\left(x\geqq 0\right)$$

$$y'=\frac{2}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\quad\left(x<0\right)$$

(5)　$y'=\dfrac{(\cos^2 x)'(2x+1)^2-\cos^2 x\cdot\left\{(2x+1)^2\right\}'}{(2x+1)^4}$

$$=\frac{-2\sin x\cos x(2x+1)^2-\cos^2 x\cdot 2(2x+1)\cdot 2}{(2x+1)^4}$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{2\cos x\left\{(2x+1)\sin x+2\cos x\right\}}{(2x+1)^3}$$

$\boxed{73}$　(1)　(ⅰ)　$y = x\log x,\quad (a,b)=(e,e)$

$y' = \log x + 1$ であるから，接線の傾きは，$y'(e) = \log e + 1 = 1+1 = 2$

したがって，(e,e) における接線の方程式は $y - e = 2(x-e)$

$\therefore\ y = 2x - e$

(ⅱ)　$y = \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}},\quad (a,b)=(0,0)$

$$y' = \frac{\left(2e^{2x}+e^{-x}\right)\left(e^{3x}+e^{-2x}\right)-\left(e^{2x}-e^{-x}\right)\left(3e^{3x}-2e^{-2x}\right)}{\left(e^{3x}+e^{-2x}\right)^2}$$ であるから

接線の傾きは，$y'(0) = \dfrac{(2+1)(1+1)-0}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{2}$

したがって，$(0,0)$ における接線の方程式は $y = \dfrac{3}{2}x$

(2)
$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{(-2x+8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{-2\,\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{(x-4)}\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= \frac{-2\cdot 4}{3+3}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

$\boxed{74}$ （ア） $x^3-3x \geqq 0$ のとき，

つまり $x(x^2-3) \geqq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leqq x \leqq 0$， $x \geqq \sqrt{3}$ のとき

$y=|x^3-3x|=x^3-3x$， $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

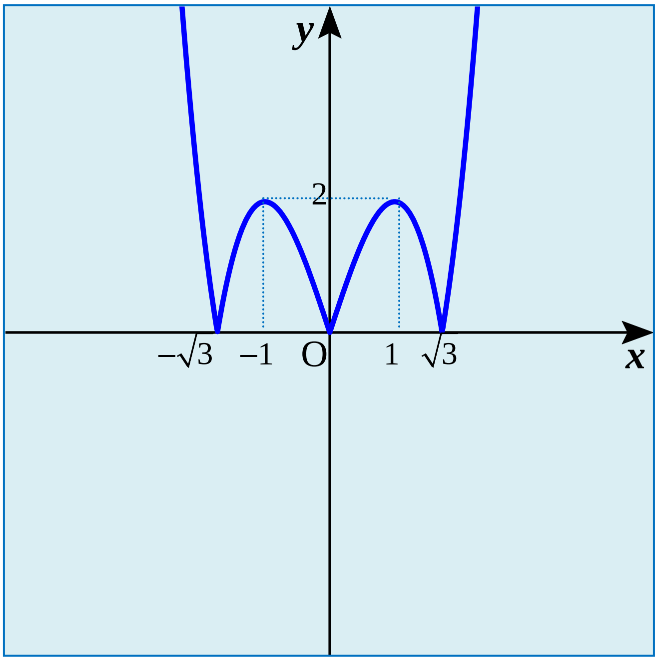
（イ） $x^3-3x<0$ のとき，

つまり $x(x^2-3)<0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3},\ 0<x<\sqrt{3}$ のとき

$y=|x^3-3x|=-x^3+3x$， $y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

(ア)，(イ)より増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	$\searrow$	0 極小	$\nearrow$	2 極大	$\searrow$	0 極小	$\nearrow$	2 極大	$\searrow$	0 極小	$\nearrow$



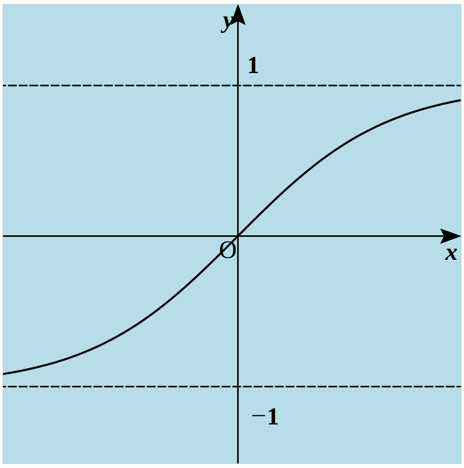
$\boxed{75}$　$y' = \dfrac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0$ より単調増加関数である.

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - \dfrac{1}{e^x}}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{e^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}} = 1$$

$t = -x$ とおいて,

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} - e^t}{e^{-t} + e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{1}{e^{2t}} - 1}{\dfrac{1}{e^{2t}} + 1} = -1$$

以上より　グラフは右図のようになる.



$\boxed{76}$　$y=x^3-3x$ 上の点 $(a,\ a^3-3a)$ における接線の方程式は，$y'=3(x^2-1)$ より

$$y=3(a^2-1)(x-a)+a^3-3a=3(a^2-1)x-2a^3 \quad \cdots ①$$ となる．

直線①が点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通るとすると，

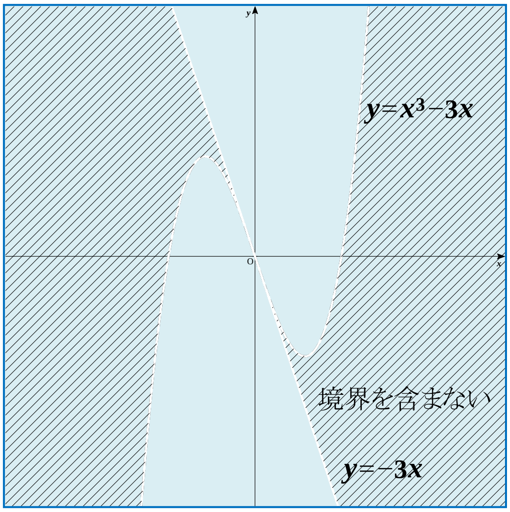
$$y_0=3(a^2-1)x_0-2a^3 \quad \text{すなわち} \quad 2a^3-3a^2x+y_0+3x_0=0 \quad \cdots ②$$

が成り立つ．点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る異なる３本の接線がひけるとき，a に関する方程式②は３つの異なる実数解をもつ．

$f(a)=2a^3-3x_0a^2+y_0+3x_0$ とおくと，方程式②が３つの異なる実数解をもつための必要十分条件は $f(a)$ の２つの極値がそれぞれ異なる符号となることである．よって，$f'(a)=6a^2-6x_0a=6a(a-x_0)=0$ より $f(a)$ は $a=0,\ x_0$ で極値をとるので，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る異なる３本の接線がひける必要十分条件は

不等式 $f(0)\cdot f(x_0)=(y_0+3x_0)(y_0+3x_0-x_0^3)<0$ が成り立つことである．

したがって，点 P から曲線 $y=x^3-3x$ に相異なる接線が３本ひけるとき，点 P は x-y 平面上の不等式 $(y+3x)(y+3x-x^3)<0$ をみたす領域にある．領域を図示すると下図のようになる．

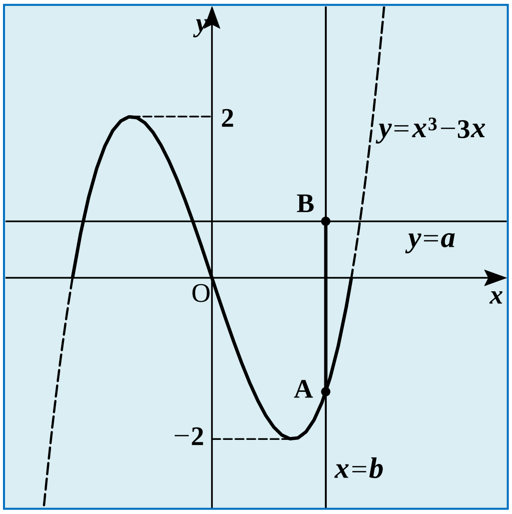


77　$y=x^3-3x$ の増減を調べて $-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ の範囲でグラフをかく．

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ より，増減表は

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

となるので，グラフは下図のようになる．



点 A を曲線 $y=x^3-3x$ （$-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$）上にとり，その x 座標を b とし，

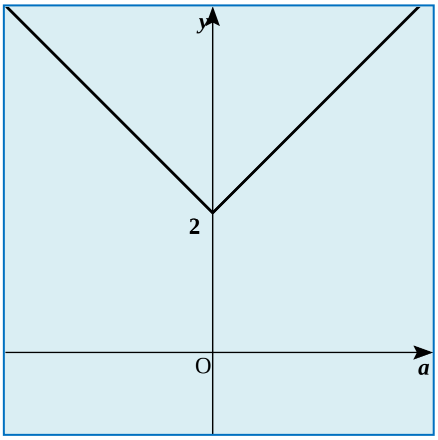
直線 $x=b$ （$-\sqrt{3}\leqq b\leqq\sqrt{3}$）と直線 $y=a$ との交点を B とする．

$f(b)$ の値は線分 AB の長さと一致するので，上のグラフより

$a\geqq 0$ のとき $g(a)=2+a$，$a<0$ のとき $g(a)=2-a$ となる．

$y=g(a)$ のグラフは下図のようになるので，

$g(a)$ の最小値は２（$a=0$ のとき）（答）



$\boxed{78}$ （1）$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ （>0）より　$e^x+e^{-x}=2y \Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x+1=0$

よって　$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$　（$y \geqq 1$）…①

①の両辺の対数をとると　$x=\log\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)$

x と y を入れ替えると　$y=\cosh^{-1}x=\log\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$（$x \geqq 1$）

ここで

$$x-\sqrt{x^2-1}=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1} \quad \text{より}$$

$$y=\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}=-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{であるから}$$

$$\therefore\ y=\cosh^{-1}x=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

（2）$y'=\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\dfrac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\dfrac{\cancel{\sqrt{x^2-1}+x}}{\sqrt{x^2-1}}}{\cancel{x+\sqrt{x^2-1}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\boxed{79}$ （1） $f(x)=\tan^{-1}x-\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)$ とおく．

$f(0)=0$， $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-1+x^2=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ 　より

増減表は

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

となるので　$f(x)=\tan^{-1}x-\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)>0\ \ (x>0)$

したがって， $\tan^{-1}x>x-\dfrac{x^3}{3}\ \ (x>0)$ が示された．

（2） $f(x)=\sin^{-1}x+\sqrt{2(1-x)}-\dfrac{\pi}{2}$ とおく． $f(-1)=2-\pi,\ f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{2(1-x)}}=\frac{\sqrt{2(1-x)}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2(1-x)}}=\frac{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2(1-x)}}>0\ \ (-1<x<1)$$

以上より増減表は

x	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$2-\pi$	$\nearrow$	0

となるので，

$f(x)=\sin^{-1}x+\sqrt{2(1-x)}-\dfrac{\pi}{2}\leqq 0\quad(-1\leqq x\leqq 1)$　（等号は $x=1$ のとき成立）．

したがって， $\sin^{-1}x+\sqrt{2(1-x)}\leqq\dfrac{\pi}{2}\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$ が示された．

$\boxed{80}$　（ヒント：$\dfrac{l}{m}=x$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ をみたす.）

$f(x)=x^n-x^{n+1}$ とおいて，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で増減表を作成すると

$f'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=x^{n-1}\{n-(n+1)x\}$ より

x	0	$\cdots$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\cdots$	1
y'	0	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$	$\searrow$	0

となるので，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$x^n-x^{n+1} \leqq \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$　が成り立つ.

特に，$0 \leqq \dfrac{l}{m} \leqq 1$　だから，上式で $x=\dfrac{l}{m}$ とおくことにより

$$\left(\frac{l}{m}\right)^n-\left(\frac{l}{m}\right)^{n+1} \leqq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$　が示された.

81　$t>0$ のとき，不等式①は次の不等式

$$e^t-1 \geqq te^{\frac{t}{a}} \ (t>0)$$

と同値である．

ここで，$x=e^{\frac{t}{a}}$ とおくと，$\log x=\log e^{\frac{t}{a}}$ より $\log x=\frac{t}{a}\log e=\frac{t}{a}$ だから，$t=a\log x$ である．$t>0$ より，$x>1$ だから，不等式① $(t>0)$ は次の不等式と同値となる．

$$\boxed{(※)\quad x^a-1 \geqq ax\log x \ (x>1)}$$

(※左辺)－(※右辺)＝ $f(x)=x^a-ax\log x-1$ とおくと，次が成り立つ．

$$f(1)=1^a-a\log 1-1=0,$$

$$f'(x)=a\left(x^{a-1}-\log x-1\right),\quad f'(1)=a\left(1^{a-1}-\log 1-1\right)=0,$$

$$f''(x)=a\left\{(a-1)x^{a-2}-\frac{1}{x}\right\},\quad f''(1)=a(a-2)$$

(1)　$a=2$ のとき，$f(1)=f'(1)=f''(1)=0$，

$$f'(x)=2(x-\log x-1),$$

$$f''(x)=2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}>0 \ (x>1).$$

$f''(x)>0 \ (x>1)$ より $x>1$ で $f'(x)$ は単調増加である．さらに，$f'(1)=0$ だから，$x>1$ で $f'(x)>0$ である．（増減表参照）

x	1	$\cdots$
f''	/	$+$
f'	0	↗

よって，$x>1$ で $f(x)$ は単調増加である．さらに，$f(1)=0$ だから，$x>1$ で $f(x)>0$ が成り立つ．（増減表参照）

x	1	$\cdots$
f'	/	$+$
f	0	↗

特に，$f(x) \geqq 0$ でもあるから，$a=2$ のとき，不等式（※）が示された．

よって，$a=2$ のとき，これと同値な不等式① $(t>0)$ も成り立つ．■

（2）　$\boxed{f''(1)=a(a-2)<0}$ と仮定すると，　$f'(1)=0$ だから，

$f(x)$ は $x=1$ で極大値をとる．

ゆえに，$\boxed{x>1 \text{ で } f(x)<0 \text{ となる } x \text{ が存在する．}}$（増減表参照）

$x=1$ に十分近い範囲では，

x	$\cdots$	1	$\cdots$
f'		0	
f''		$-$	
f	↗	0	↘

したがって，$\boxed{f''(1)=a(a-2)\geqq 0}$ でなくてはならない．$a>1$ だから，不等式（※）が成り立つためには，次の条件が必要である．

（☆）　$a\geqq 2$

逆に，$a\geqq 2$ であれば，（１）の結果より

$$\frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}\geqq e^{\frac{t}{a}}\ (t>0)$$

が成り立つので，これと同値な不等式（※）も成り立つ．よって（☆）は，$a>1$ のとき不等式（※）が成り立つための必要十分条件である．

不等式（※）と不等式① $(t>0)$ は同値なので，求める a の範囲は

$$a\geqq 2$$

である．