73 $\dfrac{x^4}{x^3-1}=\dfrac{x(x^3-1)+x}{x^3-1}=x+\dfrac{x}{x^3-1}=x+\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$ であるから

$\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ とおくと，$a=c=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x-2}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x+1-3}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-3\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$ より

$$\int\frac{x^4}{x^3-1}dx=\int\left\{x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)\right\}dx$$

$$=\int\left\{x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}-3\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\left\{\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\log\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$ （C は積分定数）

補足 $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ より，$t=x+\dfrac{1}{2}$ とおくと $dt=dx$

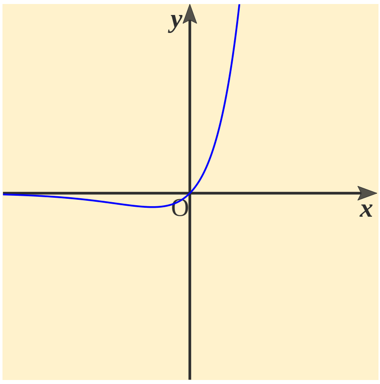
$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

74 (1) $y = xe^x$, $y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, $\lim_{y\to+\infty} y = +\infty$, $\lim_{y\to-\infty} y = 0$ より

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$+\infty$

グラフの概形は



部分積分法より

$$\int xe^x\,dx = \int x\left(e^x\right)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - e^x + C \quad (C\text{は積分定数})$$

$x \leqq 0$ のとき $y \leqq 0$ に注意する．A, x軸, $x = a$ $(a<0)$により囲まれる

図形の面積 $S(a)$は

$$S(a) = \int_a^0 \left(0 - xe^x\right)dx = -\int_a^0 xe^x\,dx = -\left[xe^x - e^x\right]_a^0$$
$$= -\left(-e^0 - ae^a + e^a\right)$$
$$= 1 - e^a(1-a)$$

(2) $a = -b$ とおくと $a \to -\infty$ のとき $b \to \infty$

ロピタルの定理より $\lim_{a\to-\infty} e^a(1-a) = \lim_{b\to\infty}\dfrac{b+1}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\dfrac{(b+1)'}{\left(e^b\right)'} = \lim_{b\to\infty}\dfrac{1}{e^b} = 0$

$$\therefore \lim_{a\to-\infty} S(a) = \lim_{a\to-\infty}\left\{1 - e^a(1-a)\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{1 - \frac{b+1}{e^b}\right\} = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1$$

75　$x=\tan\theta$ とおくと，

$$1+x^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},\quad dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta,$$

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

より

$$I=\int_0^1\frac{\log(x+1)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\log(\tan\theta+1)}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(\tan\theta+1)d\theta$$

ここで，$\log(\tan\theta+1)=\log\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}=\log\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\theta}$

$$=\log\sqrt{2}+\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\log\cos\theta$$ を代入すると

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sqrt{2}\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\theta\,d\theta$$

さらに，$t=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\theta\,d\theta$$ だから

$$I=\log\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\theta\,d\theta=\frac{\log2}{2}[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\log2}{8}\quad\square$$

76　(1)　$t=\tan^{-1}x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，

x	$0\to1$
t	$0\to\frac{\pi}{4}$

より

$$\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$$

（2）$I=\int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2\,dx$ とおくと，$I=\left[\dfrac{x^2}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}\left(\tan^{-1}x\right)dx$

ここで，$\dfrac{x^2}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}$ であるから

$$I=\int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2\,dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\tan^{-1}x\right)dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^1\tan^{-1}x\,dx+\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$$

(1) より $\int_0^1\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx=\dfrac{\pi^2}{32}$，　また，

$$\int_0^1\tan^{-1}x\,dx=\left[x\tan^{-1}x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\log\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

であるから

$$I=\frac{\pi^2}{32}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)+\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

別解　$I=\int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2\,dx=\int_0^1\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)'\left(\tan^{-1}x\right)^2\,dx$

$$=\left[\frac{x^2+1}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2+1}{2}\cdot 2\tan^{-1}x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^1(x)'\tan^{-1}x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\left(\left[x\tan^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

部分積分法を
2 回適用

(3) $x=\sin\theta$ とおくと，$dx=\cos\theta d\theta$，

x	$0\to\frac{1}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

より，

この範囲では $\cos\theta>0$ に注意すると

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$ だから，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(4) $x=\sin\theta$ とおくと，$\sin^{-1}x=\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$，$dx=\cos\theta d\theta$，

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

より，

$$\int_0^1 x^2\sin^{-1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\theta d\theta=\frac{1}{3}\left[\sin^3\theta\cdot\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$$

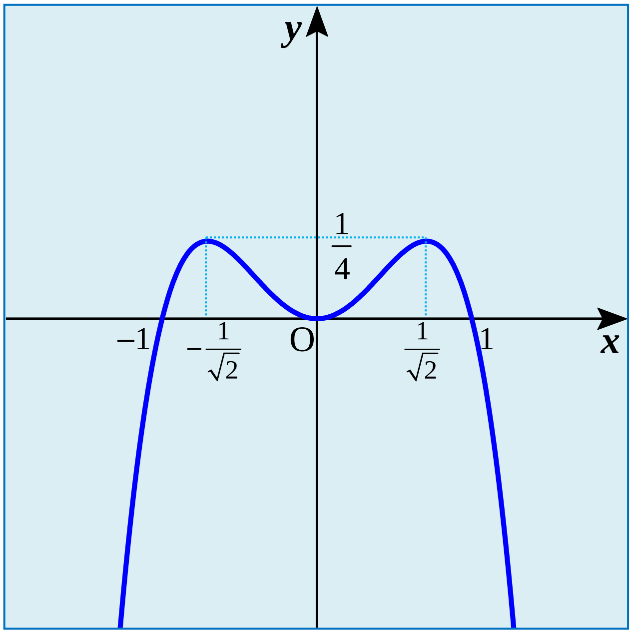
77 （1）　$f(x)=x^2(1-x^2)=x^2-x^4$　より

$$f'(x)=-4x^3+2x=-4x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=-4x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

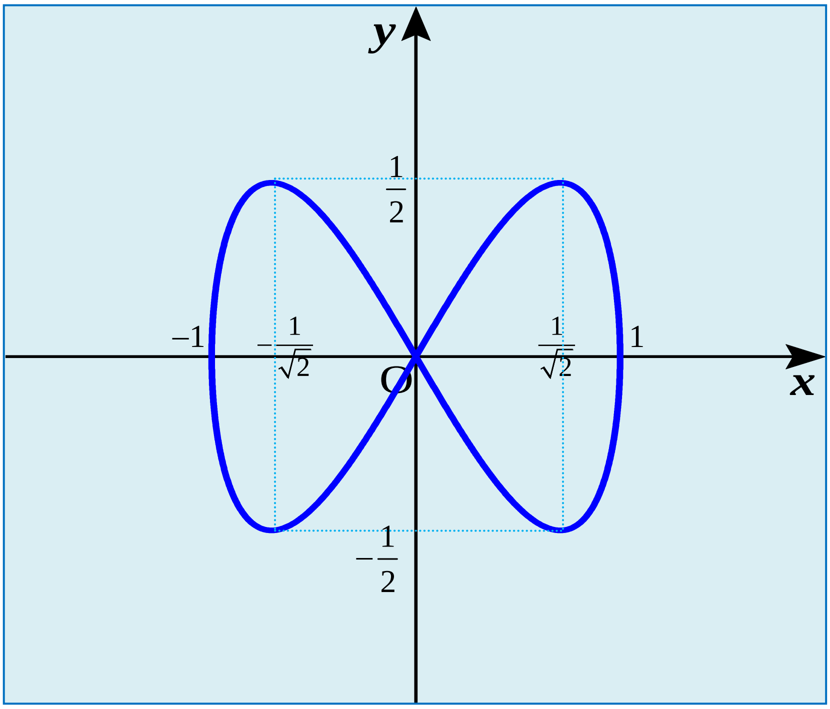
よって　$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋	0	－
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

$f(x)$ のグラフは y 軸対称であり，グラフは下図のようになる．



(2)　$y^2 = x^2(1-x^2) \geqq 0$　より　$-1 \leqq x \leqq 1$　の部分のみ，実数 y の値が存在する．



(3)　$V_x = 2\int_0^1 \pi y^2\ dx = 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\ dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\pi$

$y^2 = x^2 - x^4$　より，　$(x^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$　であるから　$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2}$

D は x 軸対称だから

$$V_y = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}\ dy - 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}\ dy$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4y^2}\ dy = 4\pi\ \underline{\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\ dy}$$

$$= 4\pi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

注意：円 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ の面積の $\frac{1}{4}$ に等しい

78　（ア）　$b \geqq a > 0$ のとき

$$x^2+(y-b)^2=a^2 \Leftrightarrow (y-b)^2=a^2-x^2 \Leftrightarrow y=b\pm\sqrt{a^2-x^2} \cdots ①$$ （複号同順）

$$V=\pi\left\{\int_{-a}^{a}\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx-\int_{-a}^{a}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx\right\}$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\pi b\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi a^2$$

$$=2\pi^2a^2b$$

次に，①の両辺を x で微分すると　$y'=\mp\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　（複号同順）

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$　より，表面積は

$$S=\int_{-a}^{a}2\pi\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int_{-a}^{a}2\pi\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=8\pi ab\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=8\pi ab\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=8\pi ab\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2ab$$

（イ）　$a>b>0$ のとき

$$V=2\pi\left(\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx\right)$$

$$=2\pi\left(\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}}(b^2+a^2-x^2)dx+\int_0^a2b\sqrt{a^2-x^2}\;dx+\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^{a}2b\sqrt{a^2-x^2}\;dx\right)$$

$$=2\pi\left[(a^2+b^2)x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$+4\pi b\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a+4\pi b\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\sqrt{a^2-b^2}}^a$$

$$=2\pi\left\{\frac{2a^2+b^2}{3}\sqrt{a^2-b^2}+a^2b\left(\pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right\}$$

$$S=2\int_0^a 2\pi(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+2\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^a 2\pi(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=4\pi ab\left(\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int_{\sqrt{a^2-b^2}}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)+4\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} dx$$

$$=4\pi ab\left(\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a+\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\sqrt{a^2-b^2}}^a\right)+4\pi a\sqrt{a^2-b^2}$$

$$=4\pi a\left\{\sqrt{a^2-b^2}+b\left(\pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right\}$$

以上より，

■ $b \geqq a>0$ のとき $V=2\pi^2a^2b$， $S=4\pi^2ab$

■ $a>b>0$ のとき

$$V=2\pi\left\{\frac{2a^2+b^2}{3}\sqrt{a^2-b^2}+a^2b\left(\pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right\}$$

$$S=4\pi a\left\{\sqrt{a^2-b^2}+b\left(\pi-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right\}$$

79 (1) $S=\int_0^1\{x-(-x)\}dx+\int_1^2\{2-x^2-(-x)\}dx$

$$=\left[x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=\frac{13}{6}$$

(2) $V_x=\pi\int_0^2 x^2dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^2(2-x^2)^2dx$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+4x\right]_{\sqrt{2}}^2=\frac{16(2\sqrt{2}-1)}{15}\pi$$

(3) $V_y=\pi\int_{-2}^1(2-y)dy-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1-\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot2$

$$=\pi\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^1-3\pi=\frac{9}{2}\pi$$

(4) 曲線 $y=2-x^2$ $(1\leqq x\leqq 2)$上の任意の点を，

$P(t,2-t^2)$ $(1\leqq t\leqq 2)$とおく．Pから直線 $y=-x$ に下ろした垂線の足をQとおく． Qの座標は，直線 PQ と 直線 $y=-x$ の交点であるから，

連立方程式 $\begin{cases} y-(2-t^2)=x-t \\ y=-x \end{cases}$ の解である．

これを解いて $Q\left(\dfrac{t^2+t-2}{2},\ -\dfrac{t^2+t-2}{2}\right)$ を得る．

tがtから$t+dt$(dt微小量)まで変化するとき， Qの動く距離をdsとすると

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2+\left(-\frac{2t+1}{2}\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{2}\left|\frac{2t+1}{2}\right|dt=\frac{2t+1}{\sqrt{2}}dt \quad (\text{注意：}\ 1\leqq t\leqq 2\text{より}\ \ 2t+1>0)$$

$$PQ=\sqrt{\left(t-\frac{t^2+t-2}{2}\right)^2+\left(2-t^2+\frac{t^2+t-2}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(t^2-t-2)^2}$$

したがって

$$V=\int_1^2 \pi\cdot PQ^2\frac{ds}{dt}dt=\int_1^2\frac{\pi}{2}(t^2-t-2)^2\frac{(2t+1)}{\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_1^2(t+1)^2(t-2)^2(2t+1)dt$$

ここで， $u=t-2$ とおくと， $t=u+2$， $dt=du$

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^0 u^2(u+3)^2(2u+5)du$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^0(2u^5+17u^4+48u^3+45u^2)du$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}u^6+\frac{17}{5}u^5+12u^4+15u^3\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{91}{60}\sqrt{2}\pi$$

80 (1) ■ $0 \leqq h \leqq 1$ のとき $V(h)=\pi\int_0^h x^2\,dy=\pi\int_0^h y^2\,dy=\pi\left[\dfrac{y^3}{3}\right]_0^h=\dfrac{\pi}{3}h^3$

特に $h=1$ のとき，$V=\dfrac{\pi}{3}$

■ $h \geqq 1$ のとき

$$V(h)=\frac{\pi}{3}+\pi\int_1^h\left(\frac{1}{y}\right)^2 dy=\frac{\pi}{3}+\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^h=\pi\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{h}\right)$$ （注意： $V<\dfrac{4}{3}\pi$）

さて，1 秒あたり単位体積の水が入っているから，
t 秒後の高さ $h(t)$ は次のようになる．

（ア） $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{\pi}{3}h(t)^3=t$ より $h(t)=\left(\dfrac{3t}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

（イ） $\dfrac{\pi}{3} \leqq t < \dfrac{4}{3}\pi$ のとき $\pi\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{h(t)}\right)=t$ より $h(t)=\dfrac{3\pi}{4\pi-3t}$

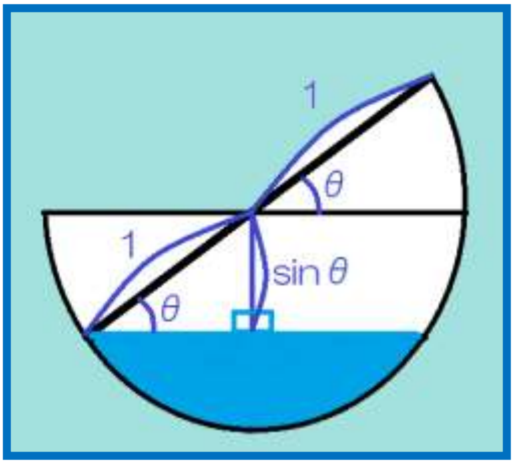
(2) (1)より $0<t<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{2}{3}}$

$\dfrac{\pi}{3}<t<\dfrac{4}{3}\pi$ のとき $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{9\pi}{(4\pi-3t)^2}$

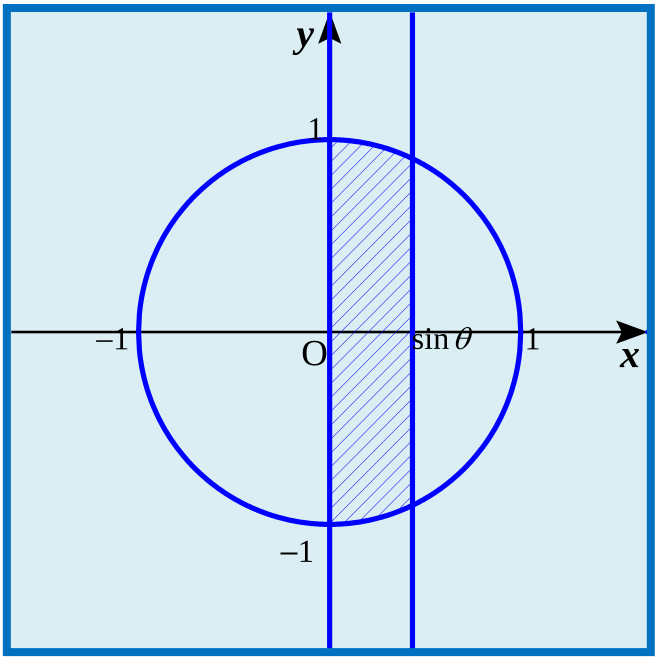
81 (1) $V=\pi\int_{1-h}^{1} y^2dx=\pi\int_{1-h}^{1}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\dfrac{x^3}{3}\right]_{1-h}^{1}=\pi\left(h^2-\dfrac{h^3}{3}\right)$

(2) こぼれる水の量は，図より

$$V=\pi\int_0^{\sin\theta} y^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\sin\theta}(1-x^2)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sin\theta}$$
$$=\pi\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)$$



$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2$



82 (1) 頂点 $(0,b)$ より，放物線は $y=kx^2+b$ …① とおける．

$x=\pm a$ のとき，$y=0$ であるから，①へ代入して $0=ka^2+b$ $\therefore k=-\dfrac{b}{a^2}$

したがって，$y=-\dfrac{b}{a^2}x^2+b$ …② を得る．

②より，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2b}{a^2}x$

C は y 軸対称であるから，

$$L=2\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\int_0^a\sqrt{1+\left(-\frac{2b}{a^2}x\right)^2}dx=2\int_0^a\frac{2b}{a^2}\sqrt{x^2+\frac{a^4}{4b^2}}dx$$

$$=\frac{4b}{a^2}\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+\frac{a^4}{4b^2}}+\frac{a^4}{4b^2}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{a^4}{4b^2}}\right|\right]_0^a$$

$$=\sqrt{a^2+4b^2}+\frac{a^2}{2b}\log\left(\frac{2b+\sqrt{a^2+4b^2}}{a}\right)$$

(2) ②より　$x^2 = -\dfrac{a^2}{b}(y-b)$

この両辺を y で微分すると　$2x\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{a^2}{b}$

したがって，

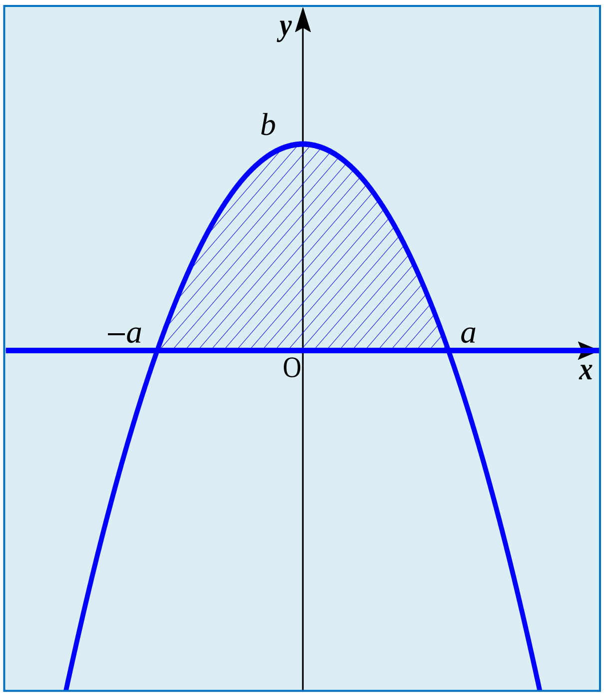
$$S = 2\pi\int_0^b |x|\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^b |x|\sqrt{1+\left(-\frac{a^2}{2bx}\right)^2}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^b \sqrt{x^2+\frac{a^4}{4b^2}}\,dy = 2\pi\int_0^b \sqrt{-\frac{a^2}{b}(y-b)+\frac{a^4}{4b^2}}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^b \sqrt{\frac{a^2\{(-4by+4b^2)+a^2\}}{4b^2}}\,dy = 2\pi\frac{a}{2b}\int_0^b \sqrt{-4by+4b^2+a^2}\,dy$$

$$= \frac{a}{b}\pi\left[\frac{2}{3}\frac{1}{-4b}\left(-4by+4b^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = -\frac{\pi a}{6b^2}\left[\left(-4by+4b^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b$$

$$= \frac{\pi a}{6b^2}\left\{\left(a^2+4b^2\right)^{\frac{3}{2}} - a^3\right\}$$



83　$2x^2-2xy+y^2=4 \quad \cdots ① \quad \Leftrightarrow y^2-2xy+(2x^2-4)=0 \Leftrightarrow y=x\pm\sqrt{4-x^2}$

ここで，$4-x^2 \geqq 0$　より　$-2 \leqq x \leqq 2$

したがって

$$S=\int_{-2}^{2}\left\{\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)-\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)\right\}dx = 2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2 = 4\pi$$

注意：円 $x^2+y^2=4$　の面積の半分

図形①を x 軸まわりに 180° 回転させた図形の方程式は，

(x,y) を $(x,-y)$ に変えると，$2x^2+2xy+y^2=4 \quad \cdots ②$　である．

①，②の連立方程式を解くと，①と②の共有点は $(x,y)=(0,\pm 2),\ (\pm\sqrt{2},0)$

この回転体は，y 軸対称な立体であるから

$$V=2\pi\int_{0}^{2}\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)^2dx-2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{2}\left(4+2x\sqrt{4-x^2}\right)dx-2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(4-2x\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

ここで，$t=\sqrt{4-x^2}$ とおくと　$t^2=4-x^2$，　$2tdt=-2xdx \Leftrightarrow xdx=-tdt$

x	$0\to 2$
t	$2\to 0$

，

x	$\sqrt{2}\to 2$
t	$\sqrt{2}\to 0$

$$V=8\pi\left(\left[x\right]_0^2-\left[x\right]_{\sqrt{2}}^2\right)+4\pi\int_2^0(-t^2)dt+4\pi\int_{\sqrt{2}}^0(-t^2)dt$$

$$V=8\sqrt{2}\pi+4\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2+4\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{32(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$$