微分積分問題集 [第2版]

数理工学社　**2023** 年 **10** 月

4 章 **C** 発展問題詳解

94 (1) $\sin f(0) = \cos^2 0 = 1$ $\left(0 \leqq f(0) \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \quad \cdots \quad \text{答}$$

同様に，$\sin f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\left(0 \leqq f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \cdots \quad \text{答}$$

$\sin f(x) = \cos^2 x$ の両辺を微分すると

$$f'(x)\cos f(x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x \quad \cdots \quad ①$$

さらに両辺を微分すると

$$f''(x)\cos f(x) - \{f'(x)\}^2 \sin f(x) = -2\cos 2x \quad \cdots \quad ②$$

これより

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left\{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 \sin f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -2\cos\frac{\pi}{2} \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sin\frac{\pi}{6} &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad \cdots \quad \text{答} \end{aligned}$$

□

(2) (1) の ① より，x が十分小さな正の実数ならば，$\sin 2x > 0$ より，$\cos f(x) \neq 0$ である．仮定より $0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから，x が十分小さな正の実数のとき，

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x}{\cos f(x)} < 0 \quad \cdots \quad (*)$$

$\cos f(0) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ より，ロピタルの定理を適用して，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to +0} \frac{-\sin 2x}{\cos f(x)} \\ &= \lim_{x \to +0} \frac{-2\cos 2x}{-f'(x)\sin f(x)} = \frac{2}{f'(0)\sin f(0)} \end{aligned}$$

ここで，$\sin f(0) = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ と ② より，$\{f'(0)\}^2 = 2$ となり，$(*)$ だから $f'(0) = -\sqrt{2}$ となる．よって，

$$f'(0) = \lim_{x \to +0} f'(x) = \frac{2}{f'(0)\sin f(0)} = -\sqrt{2} \quad \cdots \quad \text{答}$$

□

95 (1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1) + \frac{x}{x+1} \\ f''(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{x' \cdot (x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ \text{ここで } g'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \text{ より} \\ f''(x) &= g(x) - g'(x) \\ \therefore \quad f'''(x) &= g'(x) - g''(x) \end{aligned}$$

□

(2) (1) の結果から，$k \geqq 2$ である自然数に対して，

$$f^{(k)}(x) = g^{(k-2)}(x) - g^{(k-1)}(x)$$

が成立するので

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2n+1} f^{(k)}(0) = f'(0) + \sum_{k=2}^{2n+1} f^{(k)}(0) \\ &= f'(0) + \sum_{k=2}^{2n+1} \left(g^{(k-2)}(0) - g^{(k-1)}(0)\right) \\ &= f'(0) + (g(0) - \cancel{g'(0)}) + (\cancel{g'(0)} - \cancel{g''(0)}) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (\cancel{g^{(2n-2)}(0)} - \cancel{g^{(2n-1)}(0)}) + (\cancel{g^{(2n-1)}(0)} - g^{(2n)}(0)) \end{aligned}$$

$$= f'(0) + g(0) - g^{(2n)}(0)$$

ここで，$f'(0) = 0,\ g(0) = 1$ であり，$g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ より $g^{(2n)}(0) = (2n)!$ であることから

$$\sum_{k=1}^{2n+1} f^{(k)}(0) = f'(0) + g(0) - g^{(2n)}(0) = 1 - (2n)! \quad \cdots \quad 答$$

□

96 (1) $\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

より

$$x\cos x = x\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\right) = x - \frac{1}{2}x^3 + \cdots \quad \cdots \quad 答$$

$\log(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

より

$$\begin{aligned} \log(1+3x) &= 3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{3}(3x)^3 - \cdots \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \cdots \quad \cdots \quad 答 \end{aligned}$$

□

(2)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\} \\ &= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \cdots} - \frac{1}{3x - \frac{3}{2}x^3 + \cdots}\right\} \qquad (\because \quad (1) \text{ の結果}) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x - \frac{3}{2}x^3 + \cdots - \left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \cdots\right)}{\left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \cdots\right)\left(3x - \frac{3}{2}x^3 + \cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2 - \frac{21}{2}x^3 + \cdots}{x^2\left(3 - \frac{9}{2}x + 9x^2 - \cdots\right)\left(3 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots\right)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{9}{2} - \frac{21}{2}x + \cdots}{\left(3 - \frac{9}{2}x + 9x^2 - \cdots\right)\left(3 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots\right)} = \frac{1}{2}$$

□

97 (1)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-h^2}}{h}$$

が存在することを示せばよい．ここで，$h = \frac{1}{t}$ とおくと $h \to 0$ のとき，$t \to \pm\infty$ より

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{-h^2}}{h} \\ &= \lim_{t \to \pm\infty} te^{-t^2} \quad (h = t^{-1}) \\ &= \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \\ &= \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

これより，$f'(0) = 0$ なので，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である． □

(2) $(e^{-x^{-2}})' = 2x^{-3}e^{-x^{-2}}$ と (1) より $f'(0) = 0$ であることから

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3}e^{-x^{-2}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

ここで，$x \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x^{-3}e^{-x^{-2}})' \quad (x \neq 0) \\ &= -6x^{-4}e^{-x^{-2}} + 2x^{-3} \cdot 2x^{-3}e^{-x^{-2}} \\ &= 2x^{-6}(2 - 3x^2)e^{-x^{-2}} \end{aligned}$$

と微分可能であるので，$f''(0)$ が存在することのみ示せばよい．よって，

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^{-3}e^{-h^{-2}}}{h}$$

が存在することを示せばよい．$u = \frac{1}{h^2}$ とおくと $h \to 0$ のとき，$u \to \infty$ より

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{2h^{-3}e^{-h^{-2}}}{h} \\ &= \lim_{u \to \infty} \frac{2u^2}{e^u} \quad (u = h^{-2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{u\to\infty} \frac{4u}{e^u} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{4}{e^u} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，すべての x に関して 2 回微分可能であり

$$
f''(x) = \begin{cases} 2x^{-6}(2-3x^2)e^{-x^{-2}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}
$$

最後に $f''(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示す．これは

$$
\lim_{x\to 0} f''(x) = f''(0)\,(= 0)
$$

を示せばよい．ここで，$u = \dfrac{1}{x^2}$ とおくと $x \to 0$ のとき，$x \to \infty$ より

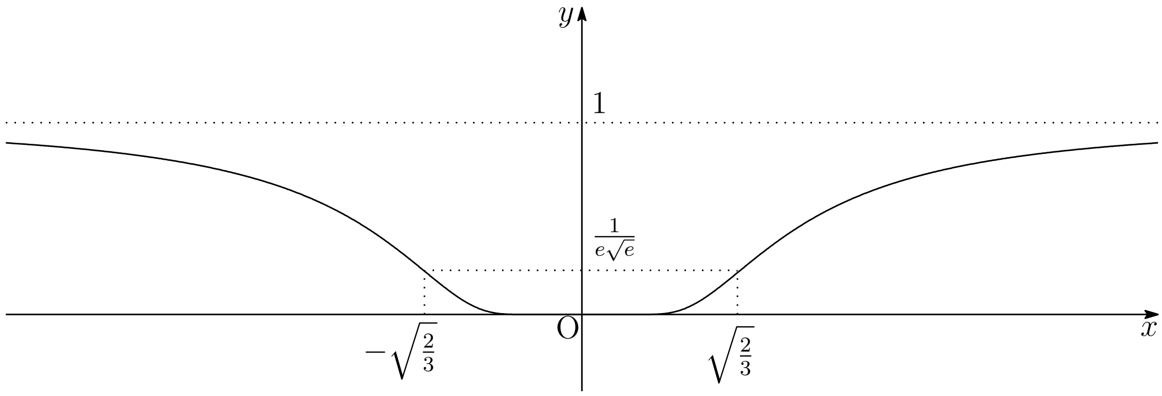
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f''(x) &= \lim_{x\to 0} 2x^{-6}(2-3x^2)e^{-x^{-2}} \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{-6u^2+4u^3}{e^u} \quad (u = x^{-2}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{-12u+12u^2}{e^u} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{-12+24u}{e^u} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{24}{e^u} \quad (\because \quad \text{ロピタルの定理}) \\
&= 0 = f''(0)
\end{aligned}
$$

よって，$f''(x)$ は $x = 0$ で連続である． □

(3) x, y', y'', y の増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	↗

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ より，直線 $y = 1$ は漸近線であり，変曲点は $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$，$x = 0$ のとき極小値 0 となる．よって，グラフの概形は以下のようになる．



98 $\dfrac{dx}{dt} = 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - t^2$ より，曲線の長さ ℓ は

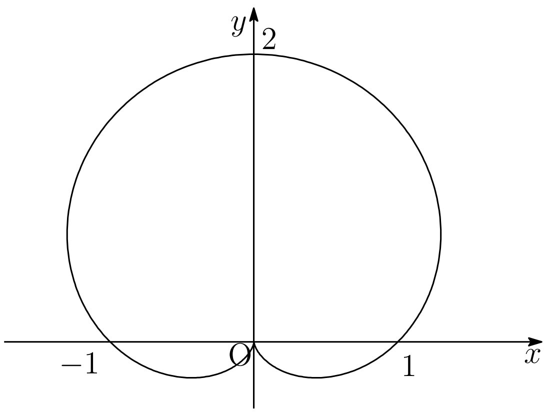
$$\begin{aligned}
\ell = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt &= \int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2}\,dt \\
&= \int_0^2 \sqrt{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= \int_0^2 |t^2+1|\,dt \\
&= \int_0^2 (t^2+1)\,dt \quad (\because\ t^2+1>0) \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^2 = \frac{14}{3} \quad \cdots \quad \text{答}
\end{aligned}$$

□

99

$$r = 1 + \sin\theta = 1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

より，この曲線はカージオイド曲線 $r = 1 + \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた図形である．よって，右図のようになる．



曲線で囲まれる部分の面積 S は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する曲線と y 軸で囲まれる部分の面積を 2 倍にしたものになる．よって

$$
\begin{aligned}
S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^2 \ d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\sin\theta+\sin^2\theta) \ d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2\theta) \ d\theta \quad (\because \ \ \sin\theta \text{ は奇関数}, \ 1+\sin^2\theta \text{ は偶関数}) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \ d\theta \quad \left(\because \ \text{半角の公式 } \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}\right) \\
&= 2\left[\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \quad \text{答}
\end{aligned}
$$

□

100 曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を S，回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t\cos t| \ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cos t \ dt \quad \left(\because \ \ \sin 2t\cos t > 0 \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t \ dt \quad (\because \ \ \sin 2t = 2\sin t\cos t)
\end{aligned}
$$

ここで，$u=\cos t$ とおくと $du = -\sin t dt$

t	$0 \to \frac{\pi}{2}$
u	$1 \to 0$

より，以下のように置換積分できる．

$$
S = -2\int_1^0 u^2 \ du = 2\int_0^1 u^2 \ du = 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \cdots \quad \text{答}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t|\cos t| \ dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\cos t \ dt \quad \left(\because \ \ \cos t > 0 \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^3 t \ dt \quad (\because \ \ \sin 2t = 2\sin t\cos t) \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^3 t \ dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t - \cos^5 t) \ dt = 4\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{8}{15}\pi \quad \cdots \quad \text{答}
\end{aligned}
$$

□

101 (1)

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\,dx &= \int_1^\infty (x)'\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\,dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^\infty - \int_1^\infty x\left(\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right)'\,dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^\infty - \int_1^\infty x\frac{-\dfrac{6}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^2}}\,dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{6}{x^2+3}\,dx \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^\infty + \left[\frac{6}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^\infty \\
&= \left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^\infty + 2\sqrt{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^\infty \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\right]_1^m + 2\sqrt{3}\lim_{m\to\infty}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^m \\
&= \lim_{m\to\infty} m\log\left(1+\frac{3}{m^2}\right) - \log 4 \\
&\quad + 2\sqrt{3}\left(\lim_{m\to\infty}\tan^{-1}\frac{m}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{3}{m^2}\right)}{\dfrac{1}{m}} - \log 4 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{3}{m^2}\right)}{\dfrac{1}{m}} &= \lim_{m\to\infty}\frac{\left(\log\left(1+\dfrac{3}{m^2}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{m}\right)'} = \lim_{m\to\infty}\frac{\dfrac{-\dfrac{6}{m^3}}{1+\dfrac{3}{m^2}}}{-\dfrac{1}{m^2}} \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{6m}{m^2+3} = \lim_{m\to\infty}\frac{6}{2m} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_1^\infty \log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\,dx = -\log 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \quad \cdots \quad \text{答}$$

□

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\log(\cos x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\sin x)\log(\cos x)\ dx$$

ここで，$t=\cos x$ とおくと $dt=-\sin x dx$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\sin\varepsilon$ であることに注意すると

x	$0\to\frac{\pi}{2}-\varepsilon$
t	$1\to\sin\varepsilon$

より，以下のように置換積分できる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\log(\cos x)\ dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_1^{\sin\varepsilon} \log t\ (-dt)\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\sin\varepsilon}^{1} \log t\ dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[t\log t - t\right]_{\sin\varepsilon}^{1}\\ &= -1-\lim_{\varepsilon\to+0}(\sin\varepsilon\log(\sin\varepsilon)-\sin\varepsilon)\\ &= -1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log(\sin\varepsilon)}{\dfrac{1}{\sin\varepsilon}} = -1-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\dfrac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}}{-\dfrac{\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}}\\ &= -1+\lim_{\varepsilon\to+0}\sin\varepsilon = -1 \quad \cdots \quad \text{答}\end{aligned}$$

□

102 (1) 両辺に $e^{\int a dx}=e^{ax+C'}=Ke^{ax}\ (K=e^{C'})$ をかけて

$$Ke^{ax}y'+aKe^{ax}y=Ke^{ax}\cos bx$$

ここで，$K>0$ だから，両辺を K で割って整理すると

$$(e^{ax}y)'=e^{ax}\cos bx$$

これより

$$\begin{aligned}e^{ax}y &= \int e^{ax}\cos bx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}(-b\sin bx)\ dx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\ dx\\ &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\ dx\right)\end{aligned}$$

ここで $I=\displaystyle\int e^{ax}\cos bx$ とおくと

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\\ \frac{a^2+b^2}{a^2}I &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\end{aligned}$$

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C$$

これより $e^{ax}y=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+Ce^{-ax}\quad (C\text{ は任意定数})\quad\cdots\quad\text{答}$$

□

(2) 初期値が $y(0)$ のとき，積分定数 C は $C=y(0)-\dfrac{a}{a^2+b^2}$ となる．

(i) $a>0$ かつ $b=0$ ならば

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\left(Ce^{-ax}+\frac{a}{a^2}\right)=\frac{1}{a}$$

となり収束する．

(ii) $a<0$ ならば $y(0)\neq\dfrac{a}{a^2+b^2}$ を満たす $y(0)$ に対して，$C\neq 0$ である．よって，$\lim_{x\to\infty}y(x)=\pm\infty$ (符号は C の符号に依存する) だから，初期値 $y(0)$ によっては収束しない．

(iii) $a>0$ かつ $b\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}Ce^{-ax}=0$ であり，かつ

$$\frac{1}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\theta)$$

を満たす定数 θ が存在する．ここで，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\theta)$ は存在しない（振動する) ので，$y(x)$ は $x\to\infty$ のとき収束しない．

(i)〜(iii) より，求める必要十分条件は 「$a>0$ かつ $b=0$」 $\cdots$ 答 □

103 (i)

$$f(0)=1+\int_0^0(t-0)f(t)\ dt=1+0=1\quad\cdots\quad\text{答}$$

また，

$$f(x)=1+\int_0^x(tf(t)-xf(t))dt=1+\int_0^x tf(t)\ dt-x\int_0^x f(t)\ dt$$

だから

$$f'(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)\ dt-xf(x)=-\int_0^x f(t)\ dt\quad\text{より}\quad f'(0)=0\quad\cdots\quad\text{答}$$

さらに

$$f''(x) = -f(x)$$

これより，$f(x)$ の満たす初期値問題は次のようになる．

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0 \quad \cdots \quad \text{答}$$

□

(ii) (i) で得られた 2 階線形微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{であるので} \quad \lambda = \pm i$$

これより一般解は

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ここで，$f(0) = C_1 = 1$ より $C_1 = 1$ となる．$f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ であるので $f'(0) = C_2 = 0$ となる．よって，$f(x) = \cos x$ となる．

$$\therefore \quad f(x) = \cos x \quad \cdots \quad \text{答}$$

□

104 (1) $y = x^2$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = 2x,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$ であり，これらを微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4+x}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6+2x}{x^2}y &= 2 - \frac{4+x}{x} \cdot 2x + \frac{6+2x}{x^2} \cdot x^2 \\ &= 2 - 2(4+x) + 6 + 2x = 0 = (\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，$y = x^2$ は与えられた微分方程式の解である． □

(2) $y = ux^2$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = u'x^2 + 2ux,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = u''x^2 + 2u'x + 2u'x + 2u = u''x^2 + 4u'x + 2u$ であり，これらを微分方程式の左辺に代入すると

$$(u''x^2 + 4u'x + 2u) - \frac{4+x}{x}(u'x^2 + 2ux) + \frac{6+2x}{x^2} \cdot ux^2 = 0$$

より，整理すると

$$\begin{aligned}u''x^2 + 4u'x + 2u - (4+x)(u'x + 2u) + (6+2x)u &= 0 \\ u''x^2 + 4u'x + 2u - 4u'x - 8u - u'x^2 - 2ux + 6u + 2ux &= 0 \\ u''x^2 - u'x^2 &= 0 \\ x^2(u'' - u') &= 0\end{aligned}$$

よって，求める微分方程式は $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{du}{dx} = 0 \quad \cdots \quad$ 答 □

(3) (2) で得られた微分方程式の特性方程式は，$\lambda^2 - \lambda = 0$ であるので $\lambda(\lambda - 1) = 0$ より，$\lambda = 0,\ 1$ となる．よって，一般解は

$$u = C_1 + C_2 e^x \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

ここで，$y = ux^2$ であるので最初に与えられた微分方程式の一般解は

$$y = x^2(C_1 + C_2 e^x) \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}) \quad \cdots \quad \text{答}$$

□