微分積分問題集［第2版］ 第5章
(C問題web詳解)

2023年10月10日

数理工学社

問題 C 解答

63 $F(u)=\displaystyle\int_0^u e^{-t}\,dt$ とおくと，$F'(u)=e^{-u}$ であり，$f(x,y)=F\left(\frac{y^2}{x}\right)$

よって，$\frac{\partial f}{\partial x}=F'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)_x=e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=-\frac{y^2}{x^2}\,e^{-\frac{y^2}{x}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=F'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)_y=e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\left(\frac{2y}{x}\right)=\frac{2y}{x}\,e^{-\frac{y^2}{x}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\left(-\frac{y^2}{x^2}\,e^{-\frac{y^2}{x}}\right)_y=-\frac{2y}{x^2}\,e^{-\frac{y^2}{x}}+\frac{2y^3}{x^3}\,e^{-\frac{y^2}{x}}$

64 定義を用いて計算すると，$f_x(0,0)=0$，$f_x(h,0)=0$，$f_x(0,k)=-k$，$f_y(0,0)=0$，$f_y(h,0)=h$，$f_y(0,k)=0$ だから，

$$f_{xx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,$$
$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1,$$
$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1,$$
$$f_{yy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

65 (1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x+(y-1)\,e^{-y}$

(2) ライプニッツの公式から $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial y^{10}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k\frac{\partial^k}{\partial y^k}y\cdot\frac{\partial^{10-k}}{\partial y^{10-k}}(e^x-e^{-y})=1\cdot y\cdot(-1)(-1)^{10}e^{-y}+10\cdot 1\cdot(-1)(-1)^9e^{-y}=-ye^{-y}+10e^{-y}$

66 (1) $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ だから，条件を用いて，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{f^2}\left(f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=0$

(2) $f(x,y)=\phi(x)\psi(y)$ より $f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\phi(x)\psi(y)\phi'(x)\psi'(y)-\phi(x)'\psi(y)\cdot\phi(x)\psi'(y)=0.$

(3) (1) より，$(*)$ を満たす f は $g(x,y)=\log(f(x,y))$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)=0$ を満たすので，$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ は y だけの関数となる．その原始関数を $c_1(y)$ とおくと，$\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=c_1'(y)$ となって，ある x の関数 $c_2(x)$ を用いて $g(x,y)=c_1(y)+c_2(x)$ と表せる．このとき，$f(x,y)=e^{g(x,y)}=e^{c_1(y)+c_2(x)}=e^{c_2(x)}e^{c_1(y)}$ となるから，$\phi(x)=e^{c_2(x)}$，$\psi(x)=e^{c_1(y)}$ とおけば f は変数分離型関数であることがわかる．

67 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^{\frac{1}{y}}\log x\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{1}{y^2}x^{\frac{1}{y}}\log x,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}-1\right)x^{\frac{1}{y}-2}=\dfrac{1-y}{y^2}x^{\frac{1}{y}-2},$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1}\right) = \frac{x^{\frac{1}{y}-1}\log x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y - x^{\frac{1}{y}-1}}{y^2} = -x^{\frac{1}{y}-1}\frac{(\log x + y)}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}x^{\frac{1}{y}}\right)(-\log x) = \frac{x^{\frac{1}{y}}\log x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y^2 - x^{\frac{1}{y}}\cdot 2y}{y^4}(-\log x)$$

$$= x^{\frac{1}{y}}\log x\frac{(\log x + 2y)}{y^4}$$

68 (1) $f_x = 4x(x^2+y^2-1) = 0,\ f_y = 4y(x^2+y^2+1) = 0$ より，停留点は点 $(0,0)$, 点 $(\pm 1, 0)$．点 $(0,0)$ のとき，$H = -16 < 0$ より極値をとらない．点 $(\pm 1, 0)$ のとき，$H = 64 > 0$ で $f_{xx} = 8 > 0$ であるから極小値 -1 をとる．

(2) $f_x = \frac{y}{\sqrt{x}} - 1 = 0,\ f_y = 2(\sqrt{x} - 3y + 4) = 0$ より停留点は点 $(4,2)$．このとき，$H = \frac{1}{2} > 0,\ f_{xx} = -\frac{1}{8} < 0$ より極大値 8 をとる．

(3) $f_x = 4x(x^2+2y^2) = 0,\ f_y = 4y(2x^2+y^2-2) = 0$ より，停留点は点 $(0,0)$, 点 $(0, \pm\sqrt{2})$．点 $(0,\pm\sqrt{2})$ のとき，$H = 256 > 0$ で $f_{xx} = 16 > 0$ より極小値 -4 をとる．点 $(0,0)$ のときは $H = 0$ でこれだけでは判定はできない．x 軸上に制限すると，$x > 0$ では $f(x,0) = x^4 > 0$ であり，y 軸上に制限すると $f(0,y) = y^4 - 4y^2 = y^2(y^2-4)$ より $-2 < y < 0$ または $0 < y < 2$ では $f(0,y) < 0$ であるから極値はとらない．

69 (1) $f_x = 6x - 4y = 0,\ f_y = -4x + 6y = 0$ より，停留点は点 $(0,0)$．このとき，$H = 20 > 0$，$f_{xx} = 6 > 0$ より極小値 2 をとる．

(2) $g(x,y) = x^2+y^2-1$ とおく．ラグランジュの未定乗数法より $f_x - \lambda g_x = 6x - 4y - \lambda\cdot 2x = 0,\ f_y - \lambda g_y = -4x + 6y - \lambda\cdot 2y = 0,\ g = x^2+y^2-1 = 0$．この連立方程式を解くと，停留点は点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順)，点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順)．故に点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，極小値 3，点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，極大値 7 をとる．

(3) (1),(2) から点 $(0,0)$ のとき，最小値 2, 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順) のとき，最大値 7 をとる．

70 $z_x = 1 - \frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = 0,\ z_y = 1 - \frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} = 0$ より停留点は点 $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (複号同順)．このとき，$z\left(\frac{4}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{6},\ z\left(-\frac{4}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{6}}$

一方，境界 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ では $y = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ より $z = x \pm \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$．よって，それぞれ極値を求めると $(x,y) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で極大値 $\sqrt{5}$，$(x,y) = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で極小値 $-\sqrt{5}$ をとる．以上より，点 $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，最小値 $-\sqrt{5}$,

点 $\left(\frac{4}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき，最大値 $\sqrt{6}$ をとる．

71 $f_x = 3x^2 - 3(1+y^2) = 0,\ f_y = -6xy = 0$ より，停留点は点 $(\pm 1, 0)$．$H(\pm 1, 0) = -36 < 0$ より極値をとらない．最大値は D 内でとらないことから D の境界 $x^2+y^2=1$ 上でとる．ラグランジュの未定乗数法より，$g(x,y) = x^2+y^2-1$ とおくと，$f_x - \lambda g_x = 3(x^2-y^2-1) - \lambda \cdot 2x = 0,\ f_y - \lambda g_y = -6xy - \lambda \cdot 2y = 0,\ g = x^2+y^2-1$ から，連立方程式を解いて停留点は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$．よって，点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，最大値 $2\sqrt{2}$ をとる．

72 (1) $f_x = 6(x-y) = 0,\ f_y = 6(y^2-x) = 0$ より，停留点は点 $(0,0)$，点 $(1,1)$．点 $(0,0)$ のときは，$H = -36 < 0$ より極値をとらない．点 $(1,1)$ のときは，$H = 36 > 0,\ f_{xx} = 6 > 0$ より極小値 -4 をとる．(2) $y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

73 $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x+y}} = 0,\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x+y}} = 0$ より停留点は点 $(1,1)$．下に凸なので点 $(1,1)$ で極小値 0 をとる．

74 (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(\alpha x + y + 1), \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + 2y + 2), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\alpha, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$
(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ より，停留点は α の値によらず点 $(0,-1)$．$H(x,y) = 8\alpha - 4$ であるから $\alpha < \frac{1}{2}$ のときは極値をとらない．$\alpha > \frac{1}{2}$ のとき，$H > 0$ で $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ より，$(0,-1)$ の時，極小値 -2 をとる．