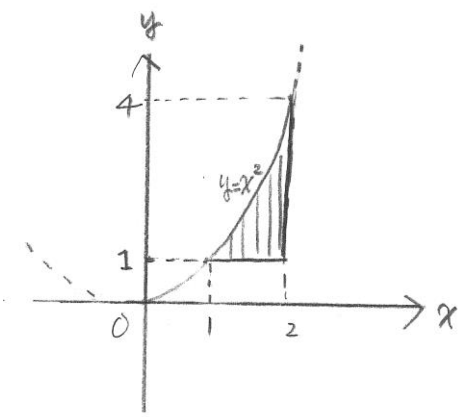
微分積分問題集[第 2 版]第 6 章 C 問題詳解

2023 年 10 月 11 日　数理工学社

6 章 C 問題 **詳細解答**

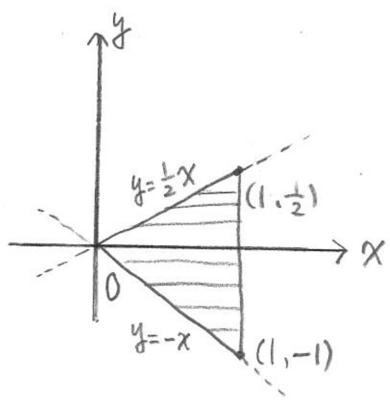
$\boxed{41}$ (1)　$D=\{(x,y)\mid\ 1\le x\le 2,\ 1\le y\le x^2\}$



$$\iint_D \frac{x^2}{y}\ dxdy=\int_1^2\{\int_1^{x^2}\frac{x^2}{y}dy\}dx=\int_1^2 x^2[\log y]_1^{x^2}\ dx=\int_1^2 2x^2\log x dx$$

$$=\frac{2}{3}[x^3\log x]_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 x^2dx=\frac{16}{3}\log 2-\frac{14}{9}$$

(2)　$D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1,\ -x\le y\le \frac{1}{2}x\ \}$



$$\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}\ dxdy = \int_0^1 \{\int_{-x}^{\frac{x}{2}} \sqrt{2x^2+y^2}dy\}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}[y\sqrt{y^2+2x^2} + 2x^2 \log|\ y+\sqrt{y^2+2x^2}\ |\ ]_{y=-x}^{y=\frac{x}{2}} dx$$

右辺の積分における［ ］の部分について

$$[y\sqrt{y^2+2x^2} + 2x^2 \log|\ y+\sqrt{y^2+2x^2}\ |\ ]_{y=-x}^{y=\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}+2x^2} + 2x^2\log|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+2x^2}\ | + x\sqrt{3x^2} - 2x^2\log|-x+\sqrt{x^2+2x^2}\ |$$

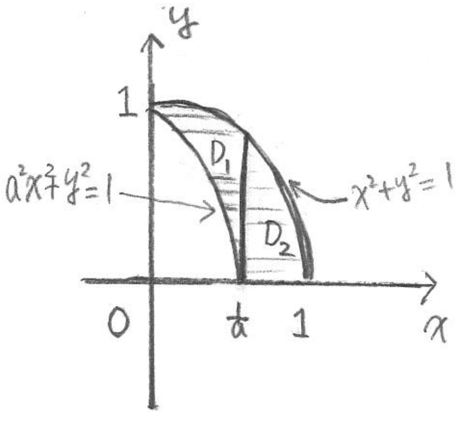
$$= \frac{3}{4}x^2 + 2x^2\log(2x) + \sqrt{3}x^2 - 2x^2\log((\sqrt{3}-1)x)$$

$$= (\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log\frac{2}{\sqrt{3}-1})x^2 = \{\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log(\sqrt{3}+1)\}x^2$$ だから

２重積分 $= \frac{1}{2}\{\frac{3}{4}+\sqrt{3}+2\log(\sqrt{3}+1)\}\int_0^1 x^2 dx$

$$= \{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\log(\sqrt{3}+1)\}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}\log(\sqrt{3}+1)$$

(3)積分領域を図のように２つの領域に分ける。



$$D_1 = \{(x,y)|\ \ 0 \le x \le \frac{1}{a},\ \sqrt{1-a^2x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \ \}$$

$$D_2 = \{(x,y)|\ \ \frac{1}{a} \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \ \}$$

$$\iint_{D_1} xy\ dxdy = \int_0^{\frac{1}{a}} \{ \int_{\sqrt{1-a^2x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy \} dx = \int_0^{\frac{1}{a}} x \cdot \frac{1}{2} [y^2]_{\sqrt{1-a^2x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

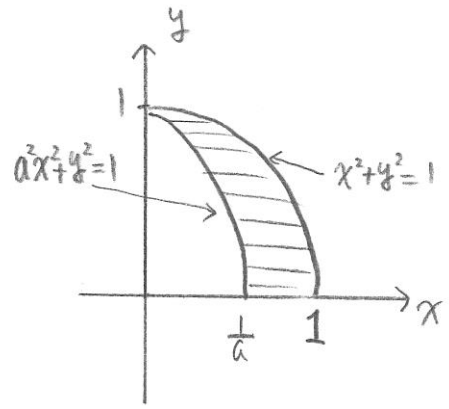
$$= \int_0^{\frac{1}{a}}\ x \cdot \frac{1}{2}(a^2-1)x^2 dx = \frac{1}{2}(a^2-1)\int_0^{\frac{1}{a}} x^3 dx = \frac{a^2-1}{8a^4}$$

$$\iint_{D_2} xy\ dxdy = \int_{\frac{1}{a}}^1 \{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy \} dx = \int_{\frac{1}{a}}^1 x \cdot \frac{1}{2}[y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^1\ x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2) dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4]_{\frac{1}{a}}^1 = \frac{a^4-2a^2+1}{8a^4}$$

従って、$\iint_D \sqrt{2x^2+y^2}\ dxdy = \frac{a^2-1}{8a^4} + \frac{a^4-2a^2+1}{8a^4} = \frac{a^2-1}{8a^2}$

[別解]

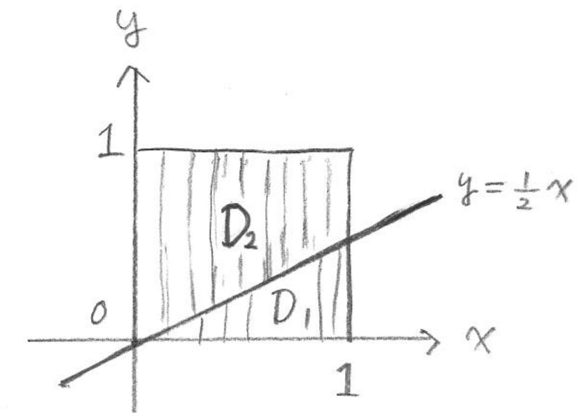


$D = \{(x,y) \mid\ 0 \le y \le 1,\ \frac{1}{a}\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\ \}$

$$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^1 \{ \int_{\frac{1}{a}\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ xy\ dx \} dy = \int_0^1\ y \cdot \frac{1}{2}[x^2]_{\frac{1}{a}\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ dy$$

$$= \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-1}{a^2}(1-y^2)\ dy = \frac{a^2-1}{2a^2}\int_0^1 (y-y^3) dy = \frac{a^2-1}{8a^2}$$

(4)積分領域を図のように直線 $2y-x=0$（ つまり $y=\frac{1}{2}x$ ）により 2 つに分ける。



$D_1 = \{(x, y) \mid\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{2}x\ \}$　において

$y \le \dfrac{1}{2}x$，$2y - x \le 0$，　ゆえに $|2y - x| = -(2y - x) = -2y + x$

$$\iint_{D_1} |2y - x|\ dxdy = \int_0^1 \{\int_0^{\frac{1}{2}x} (-2y + x)dy\}dx = \int_0^1 [-y^2 + xy]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}x}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{12}$$

$D_2 = \{(x, y) \mid\ 0 \le x \le 1,\ \dfrac{1}{2}x \le y \le 1\ \}$　において

$y \ge \dfrac{1}{2}x$，$2y - x \ge 0$，　ゆえに $|2y - x| = 2y - x$

$$\iint_{D_2} |2y - x|\ dxdy = \int_0^1 \{\int_{\frac{1}{2}x}^1 (2y - x)dy\}dx = \int_0^1 [y^2 - xy]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1}\ dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4}x^2 - x + 1)\ dx = \frac{7}{12}$$

ゆえに　$\displaystyle\iint_D |2y - x|\ dxdy = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$

(5)　$\displaystyle\iint_D \log(x + y)\ dxdy = \int_0^1 \{\int_0^1 \log(x + y)dy\}dx$　について

部分積分法を用いて、まず内側の積分を計算する。

$$\int_0^1 \log(x+y)dy = \int_0^1 1\times\log(x+y)dy = [(x+y)\log(x+y)]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 dy$$

$$= (x+1)\log(x+1) - x\log x - 1$$

ゆえに

$$\iint_D \log(x+y)\ dxdy = \int_0^1 \{(x+1)\log(x+1) - x\log x - 1\}dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)\log(x+1)dx - \int_0^1 x\log x dx - \int_0^1 dx$$

そこで右辺の３つの定積分の値を求める。

$$\int_0^1 (x+1)\log(x+1)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\{(x+1)^2\}'\log(x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\{[(x+1)^2\log(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1)dx\} = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

$\log 0$ は値をもたない($\lim_{x\to+0}\log x$ は $-\infty$ に発散)ことより広義積分を用いて、

$$\int_0^1 x\log x\ dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x\log x\ dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{2}(x^2)'\log x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\{[x^2\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\ dx\} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\{0 - \varepsilon^2\log\varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^{-2}} + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\}$$

$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}}$ は $\frac{-\infty}{\infty}$ の不定形となるので、ロピタルの定理により、

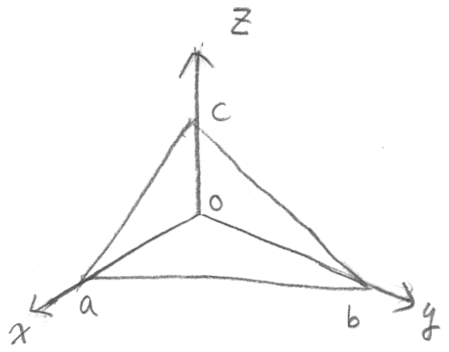
$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to+0}\frac{-1}{2}x^2 = 0$ 、 ゆえに $\int_0^1 x\log x\ dx = -\frac{1}{4}$

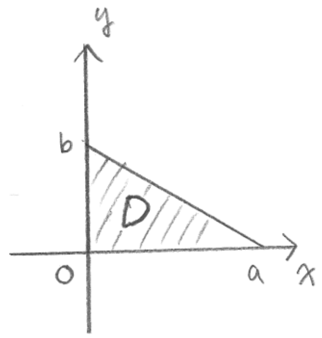
また $\int_0^1 dx = 1$ だから、 $\iint_D \log(x+y)\ dxdy = 2\log 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 2\log 2 - \frac{3}{2}$

$\boxed{43}$ 与えられた平面と x 軸との交点の座標は $(a,0,0)$ 、

y 軸との交点の座標は $(0,b,0)$ 、 z 軸との交点の座標は $(0,0,c)$ 、

従って立体は図の様な三角錐となり、底面は図の領域Dとなる。





与えられた平面とxy平面との交線上では$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{0}{c}=1$、従って

$y=b(1-\dfrac{b}{a}x)$が成り立つので、$D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b(1-\dfrac{x}{a})\ \}$

また与えられた平面の方程式は$z=c(1-\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})$と表されるので、

$$\text{体積}V=\iint_D c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dxdy=\int_0^a\{\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\ c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\ dy\}dx$$

$$=\int_0^a\ c[\ -\frac{b}{2}(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})^2\ ]_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})}\ dx=\int_0^a\ \frac{bc}{2}(1-\frac{x}{a}\ )^2dx$$

$$=\frac{bc}{2}[-\frac{a}{3}(1-\frac{x}{a}\ )^3\ ]_0^a=\frac{abc}{6}$$

$\boxed{44}$

$D=\{(x,y)\mid\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 1\}$ に対し、体積$V=\iint_D xydxdy$

また$D=\{(x,y)\mid\ 1\le x\le 3,\ 2-\sqrt{1-(x-2)^2}\le y\le 2+\sqrt{1-(x-2)^2}\ \}$ より、

$$V=\int_1^3\{\int_{2-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2+\sqrt{1-(x-2)^2}}xy\ dy\}dx=\int_1^3 x\cdot\frac{1}{2}\Big[y^2\Big]_{2-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2+\sqrt{1-(x-2)^2}}dx=4\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}dx$$

$x-2=\sin\theta$（$-\pi\le\theta\le\pi$）とおくと、$dx=\cos\theta\ d\theta$

$$x\sqrt{1-(x-2)^2}=(\sin\theta+2)\sqrt{1-\sin^2\theta}=(\sin\theta+2)\cos\theta$$

また $x=1$ のとき $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$　　$x=3$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$　だから

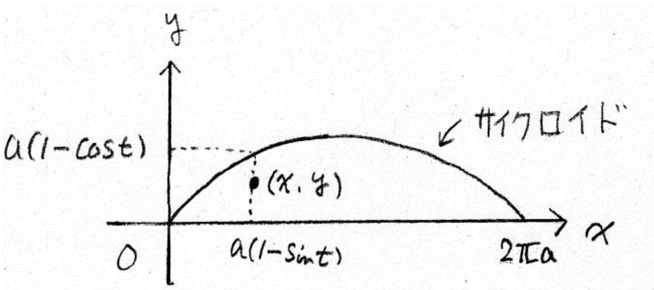
$$V=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+2)\cos\theta\cos\theta\,d\theta=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$\sin\theta\cos^2\theta$ は奇関数、$\cos^2\theta$ は偶関数だから、

$$V=0+16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=16\times\frac{\pi}{4}=4\pi$$

$\boxed{53}$ (1)与えられた図形は次の様に表される。

$D=\{(x,y)\mid\ x=a(t-\sin t),\ 0\le y\le a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi\}$



また図形の重心を $(\bar{x},\bar{y})$ とおくと、$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}$

変数 x,y は変数 t,y により $x=a(t-\sin t)$，$y=y$ と表されるので、

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)}=\begin{vmatrix}a(1-\cos t) & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=a(1-\cos t)$，　$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)}\right|=a(1-\cos t)$　となり、

$D'=\{(t,y)\mid\ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le y\le a(1-\cos t)\ \}$ とおくと

$$\iint_D dxdy=\iint_{D'}a(1-\cos t)\ dtdy=a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)}dy\}dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$(1-\cos t)^2=1-2\cos t+\cos^2 t=1-2\cos t+\frac{\cos 2t+1}{2}=\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t$$

を用いて

$$\iint_D dxdy=a^2\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2$$

さらに、

$$\iint_D x dxdy = \iint_{D'} a(t-\sin t)a(1-\cos t)\ dtdy = a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)} dy\}dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt$$

$$= a^3\{\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 dt - \int_0^{2\pi}\sin t\ (1-\cos t)^2 dt\}$$

$(1-\cos t)^2$ に関する上記の式変形を用いて

$$\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} t(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = \int_0^{2\pi} t(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)'\ dt$$

$$= \left[t(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)dt$$

$$= 6\pi^2 - \left[\frac{3}{4}t^2 + 2\cos t - \frac{1}{8}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = 6\pi^2 - 3\pi^2 = 3\pi^2$$

また $\int_0^{2\pi}\sin t\ (1-\cos t)^2 dt = \frac{1}{3}\left[(1-\cos t)^3\right]_0^{2\pi} = 0$　となるので、

$$\iint_D x dxdy = 3\pi^2 a^3$$

さらに、

$$\iint_D y dxdy = \iint_{D'} y a(1-\cos t)\ dtdy = a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\{\int_0^{a(1-\cos t)} y\ dy\}dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \frac{a^3}{2}\{\int_0^{\pi}(1-\cos t)^3 dt + \int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt\}$$

$$= \frac{a^3}{2}\{\int_0^{\pi}(1-\cos t)^3 dt + \int_0^{\pi}(1+\cos t)^3 dt\} = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}(2+6\cos^2 t)\ dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}(2+6\frac{\cos 2t+1}{2})dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}(5+3\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}\left[5t + \frac{3}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$

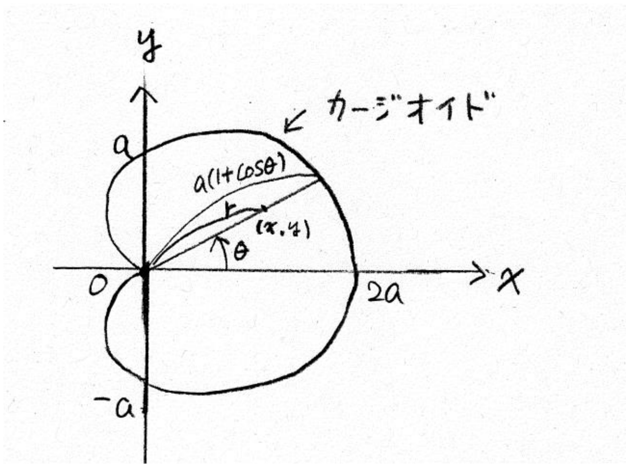
$$= \frac{5}{2}\pi a^3$$

以上より重心の座標は、$\bar{x}=\dfrac{3\pi^2a^3}{3\pi a^2}=\pi a \quad \bar{y}=\dfrac{\frac{5}{2}\pi a^3}{3\pi a^2}=\dfrac{5}{6}a$

注意　与えられた図形は直線 $x=\pi a$ に関し対称なので重心は直線 $x=\pi a$ 上にあることから、$\bar{x}=\pi a$ を導くこともできる。

(2) 与えられた図形は次の様に表される。

$D=\{(x,y)|\ \ x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a(1+\cos\theta)\ \ \}$



また図形の重心を $(\bar{x},\bar{y})$ とおくと、$\bar{x}=\dfrac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)}=\begin{vmatrix}-r\sin\theta & \cos\theta\\ r\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=-r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-r,\ \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)}\right|=r$

$D'=\{(\theta,r)|\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le a(1+\cos\theta)\ \}$ とおくと

$$\iint_D dxdy=\iint_{D'} rd\theta dr=\int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)}rdr\}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\ (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\ (1+2\cos\theta+\frac{\cos2\theta+1}{2})d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot 3\pi=\frac{3}{2}\pi a^2$$

さらに、

$$\iint_D x dxdy = \iint_{D'} r\cos\theta\, r\, d\theta dr = \int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta dr\}d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3 d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)d\theta$$

自然数 n に対し、

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta = \int_0^{\pi}\cos^n\theta d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\cos^n\theta d\theta = \int_0^{\pi}\cos^n\theta d\theta + \int_0^{\pi}(-\cos\theta)^n d\theta$$

特に n が奇数なら、与式 $=0$ 　　n が偶数なら、

与式 $= 2\int_0^{\pi}\cos^n\theta d\theta = 2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n\theta d\theta)$

$$= 2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n\theta d\theta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$$ 　　となることより、

$$\iint_D x dxdy = \frac{a^3}{3}(12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta) = \frac{a^3}{3}(12\times\frac{\pi}{4} + 4\times\frac{3\pi}{16}) = \frac{5}{4}\pi a^3$$

さらに、

$$\iint_D y dxdy = \iint_{D'} r\sin\theta \quad r \quad drd\theta = \int_0^{2\pi}\{\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\sin\theta \quad dr\}d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,(1+\cos\theta)^3 d\theta]$$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{-1}{4}\left[(1+\cos\theta)^4\right]_0^{2\pi} = 0$$

以上より重心の座標は、$\bar{x} = \dfrac{\frac{5}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \dfrac{5}{6}a$ 　　$\bar{y} = \dfrac{0}{\frac{3}{2}\pi a^2} = 0$

注意　与えられた図形は x 軸に関し対称なので重心は x 軸上にあることから、$\bar{y}=0$ を導くこともできる。

42. $x = X^2$, $y = Y^2$ とおくと，D は $X + Y \leqq 1$, $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$ と表される．また，ヤコビアン J は $J = 4XY$ となる．

従って，$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-X} XY\ 4XY dX dY \right\}$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-X} 4X^2Y^2 dX dY \right\} = \int_0^1 \left[\frac{4}{3} X^2 Y^3 \right]_{Y=0}^{Y=1-X} dX$$

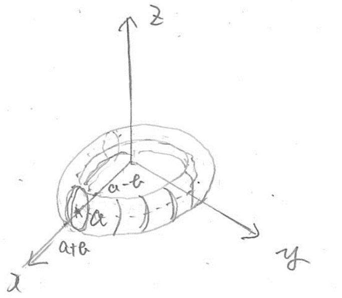
$$= \frac{4}{3} \int_0^1 X^2(1-X)^3 dX = \int_0^1 \frac{1}{3} X^2 \left\{ -(1-X)^4 \right\}' dX$$

$$= \left[-\frac{1}{3} X^2 (1-X)^4 \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 X(1-X)^4 dX = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{5} X \left\{ -(1-X)^5 \right\}' dX$$

$$= \frac{2}{15} \left[-X(1-X)^5 \right]_0^1 + \frac{2}{15} \int_0^1 (1-X)^5 dX = \frac{2}{15} \left[-\frac{1}{6}(1-X)^6 \right]_0^1 = \frac{2}{15}\ \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{45}$$

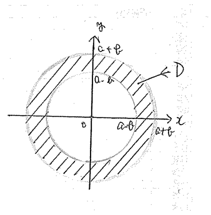
45 (1)



$(r-a)^2 + z^2 = b^2$

(2) (1) より z について解くと，$z = \pm\sqrt{b^2 - (r-a)^2}$ となるので

2



$$V=2\iint_D \sqrt{b^2-(r-a)^2}\,rdrd\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{a-b}^{a+b}\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,rdr\right\}d\theta$$

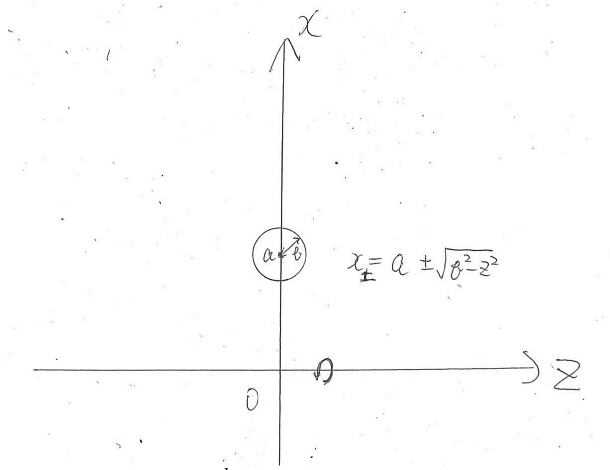
$$= 4\pi\int_{a-b}^{a+b}\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,rdr = 4\pi\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-s^2}(s+a)ds \quad (s=r-a)$$

$$= 4\pi\left\{\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-s^2}\,sds + a\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-s^2}ds\right\}$$

ここで第 1 項は奇関数の積分なので 0 となり,

$$= 8\pi a\int_0^b\sqrt{b^2-s^2}ds = 8\pi a\ \frac{1}{2}\left[s\sqrt{b^2-s^2}+b^2\sin^{-1}\frac{s}{b}\right]_0^b$$

$$= 4\pi a\ \frac{\pi b^2}{2} = 2\pi^2ab^2$$



（別解）$V=2\pi\int_0^b\left\{\left(a+\sqrt{b^2-z^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{b^2-z^2}\right)^2\right\}dz$

$= 8\pi a\int_0^b\sqrt{b^2-z^2}dz$ $= 8\pi a \times$ 半径 b の 4 分円の面積

$= 8\pi a\dfrac{\pi b^2}{4}$ $= 2\pi^2ab^2$

(3) $z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x \sin\theta + z_y \sin\theta$

$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x \sin\theta + z_y \cos\theta$ なので、$z_r^2 + \dfrac{1}{r^2} z_\theta^2 = z_x^2 + z_y^2$ となる.

従って，$z = \sqrt{b^2-(r-a)^2}$ のとき, $1+z_x^2+z_y^2 = 1+\left(\dfrac{-2(r-a)}{2\sqrt{b^2-(r-a)^2}}\right)^2$

$= \dfrac{b^2}{b^2-(r-a)^2}$，　$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}}$ となるので

$S = 2\displaystyle\iint_D \frac{b}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r dr d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_{a-b}^{a+b} \frac{b}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r dr\right\} d\theta$

$= 4\pi b \displaystyle\int_{a-b}^{a+b} \frac{r}{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} dr = 4\pi b \int_{-b}^{b} \frac{s+a}{\sqrt{b^2-s^2}} ds \quad (s = r - a)$

$= 4\pi b \left\{\displaystyle\int_{-b}^{b} \frac{s}{\sqrt{b^2-s^2}} ds + \int_{-b}^{b} \frac{a}{\sqrt{b^2-s^2}} ds\right\}$

(2) と同様に

$= 8\pi ab \displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{b^2-s^2}} ds = 8\pi ab \left[\sin^{-1}\frac{s}{b}\right]_0^b = 4\pi^2 ab$

（別解）$S = 2\displaystyle\int_0^b \left\{2\pi x_+ \sqrt{1+\left(\frac{dx_+}{dz}\right)^2} + 2\pi x_- \sqrt{1+\left(\frac{dx_-}{dz}\right)^2}\right\} dz$

$= 4\pi \displaystyle\int_0^b \left\{\left(a+\sqrt{b^2-z^2}\right)\frac{b}{\sqrt{b^2-z^2}} + \left(a-\sqrt{b^2-z^2}\right)\frac{b}{\sqrt{b^2-z^2}}\right\} dz$

$= 8\pi ab \displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{b^2-z^2}} dz = 8\pi ab \left[\sin^{-1}\frac{z}{b}\right]_0^b$

$= 4\pi^2 ab$

46. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると，方程式は $r^2 = \sin 2\theta$ となる.

$\sin 2\theta \geqq 0$ となるのは, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi.$

$z = xy$ とすると $z_x = y,\ z_y = x$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+r^2}$

従って，$D = \left\{(x,y) | x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\sin 2\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

とするとき

$S = 2\displaystyle\iint_D \sqrt{1+r^2} r dr d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r\sqrt{1+r^2}\right\} d\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1\right\} d\theta$

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi}{3}$　$2\theta = t$ とおいて置換積分を行うと，

$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} (1+\sin t)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{3}$

$y = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称なので

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{3}$　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では $y = \cos x$ のグラフと

$y = \sin x$ のグラフは $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称なので

$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\frac{t}{2})^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\frac{t}{2} dt - \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\frac{t}{2})\cos\frac{t}{2} dt - \frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{t}{2} = u$ とおいて置換積分して，

$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-u^2) du - \frac{\pi}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{3} = \frac{20-3\pi}{9}$

47.　$a > 0$ とする．この曲面は xy および yz, zx 平面に対して対称なので，
$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ で考える．

$z^2 = a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \geqq 0$ において，

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とおくと，

$z^2 = ar\sqrt{\cos 2\theta} - r^2 \geqq 0$ より $r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta}$ となる．

ここで，$\cos 2\theta \geqq 0$ なので $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ である．

$z = \sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}$ なので，

$z_x = \dfrac{\frac{ax}{\sqrt{x^2-y^2}} - 2x}{2\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}},\ z_y = \dfrac{-\frac{ay}{\sqrt{x^2-y^2}} - 2y}{2\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2}},$

$1 + z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{a^2(x^2+y^2)}{4\left(a\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2\right)(x^2-y^2)}$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\left(a\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2\right)(x^2-y^2)}}$

$=\frac{a}{2\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{1}{ar\sqrt{\cos 2\theta}-r^2}}$

$D=\left\{(x,y)|a\sqrt{x^2-y^2}\geqq x^2+y^2, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0\right\}$ とおくと

曲面積は $8\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

$=4a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\left(\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}\right)^{\frac{1}{2}}dr$

ここで，$\left(\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}\right)^{\frac{1}{2}}=s$ とおくと，

$r=\frac{a\sqrt{\cos 2\theta}s^2}{1+s^2}$，$\frac{dr}{ds}=\frac{2a\sqrt{\cos 2\theta}s}{(1+s^2)^2}$

で，r が 0 から $a\sqrt{\cos 2\theta}$を動くとき, s は 0 から $+\infty$ を動くので,

$\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\left(\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}\right)^{\frac{1}{2}}dr$

$=2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^{\infty}\frac{s^2}{(1+s^2)^2}ds$

$=2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)ds$ となるが,

$\int\frac{s}{(1+s^2)^2}ds$ は $s=\tan\theta$ とおくことで

$\int\frac{\sec^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}d\theta=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta=\int\cos^2\theta d\theta=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}s+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}s+\frac{1}{2}\tan\theta\sec^2\theta$

$=\frac{1}{2}\tan^{-1}s+\frac{1}{2}\frac{s}{1+s^2}$ となるので,

$2a\sqrt{\cos 2\theta}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)ds$

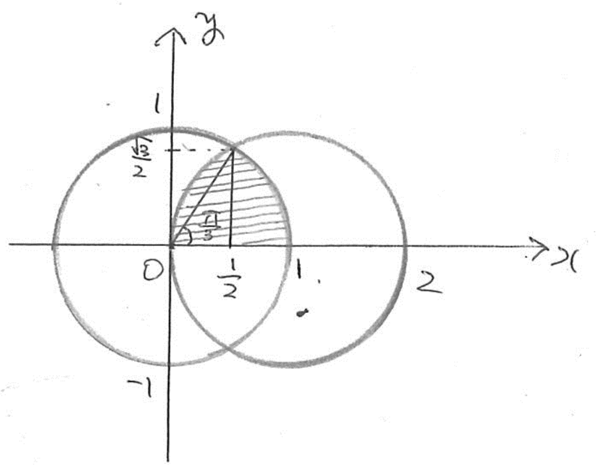
$=a\sqrt{\cos 2\theta}\left[\tan^{-1}s-\frac{s}{1+s^2}\right]_0^{\infty}$

$=\frac{\pi a}{2}\sqrt{\cos 2\theta}$

従って，$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{\pi a}{2}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$

$= 2\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi^2 a^2}{2}$

48.



$\iint_D xdxdy = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xdy\right\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xdy\right\}dx\right]$

$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$

$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-(x-1)^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$

第１項，第２項において $1-x=u$ とおくと，$dx=-du$ であり

積分範囲は１から $\frac{1}{2}$ に移るので，

$= 2\left\{-\int_1^{\frac{1}{2}}(-u)\sqrt{1-u^2}du - \int_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$

$= 2\left\{-\int_{\frac{1}{2}}^1 u\sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-u^2}du + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\sqrt{1-x^2}dx\right\}$

$= 2\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-u^2}du$

$= 2\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1-u^2}+\sin^{-1}u\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

49. $3x^2+3y^2=2xy+2x+2y+1$ を解くと，

$y=\dfrac{x+1\pm 2\sqrt{\frac{3}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{3}$ となる．

$\alpha = \dfrac{x+1-2\sqrt{\frac{3}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{3}, \beta = \dfrac{x+1+2\sqrt{\frac{3}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{3}$ とおく．

これらを用いると，

$\iint_D xdxdy = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\left\{\int_\alpha^\beta xdy\right\}dx = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}(\beta-\alpha)xdx$

$= \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\frac{4}{3}x\sqrt{\frac{3}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx$

ここで $\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})=u$ とおくと，$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du$ で，積分範囲は -1 から 1 に移るので

$= \int_{-1}^{1}\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}u^2du} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(\sqrt{3}u+1)\sqrt{1-u^2}du$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}u\sqrt{1-u^2}du+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}du$

第1項は奇関数の積分なので 0 であり，第2項は半円の積分なので，

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

50. $\begin{cases} x=u \\ \sqrt{3}x-y=v \end{cases}$ とおくと，$\begin{cases} x=u \\ y=\sqrt{3}u-v \end{cases}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -1$ であり，

$-4x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=-4u^2+2\sqrt{3}u(\sqrt{3}u-v)-(\sqrt{3}u-v)^2=-u^2-v^2$ となる．

従って，$\displaystyle\iint_D e^{-4x^2+2\sqrt{3}xy-y^2}dxdy = \iint_{D'} e^{-u^2-v^2}dudv \quad (D' = \{(u,v)|u \geqq 0, v \geqq 0\})$
$\displaystyle= \frac{\pi}{4}$（教科書　例題６．１６参照）
51. (1)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx = 4\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx$
$\displaystyle= 4\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (D = \{(x,y)|x \geqq 0,\ y \geqq 0\})$
$= \pi$ （教科書　例題６．１６参照）
(2)$\displaystyle f(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}dx$
　$\sqrt{a}x = t$ とおくと，$\displaystyle dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \infty \\ \hline t & 0 & \to & \infty \end{array}$ となるので
$\displaystyle= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$
(1) より $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$
$\displaystyle= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right\}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right\}dx = \pi$
なので $\displaystyle f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$
$\displaystyle f'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{3}{2}}$, $\displaystyle f''(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)a^{-\frac{5}{2}}$
$\cdots$
$\displaystyle f^{\{n\}}(a) = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{2n+1}{2}}$
一方，$\displaystyle f(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx$ を a で微分すると $\displaystyle f'(a) = -\int_0^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx$
さらに微分を繰り返して，
$\displaystyle f^{\{n\}}(a) = (-1)^n\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx$ となる．
従って，
$\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{2n+1}{2}}$
$\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
以上より

$\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4},\ \int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}$ となる．

52.　$\displaystyle I=\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1\left\{\int_\epsilon^1(xy)^{xy}dy\right\}dx$ とする．

$\{\}$ 内の積分において $xy=t$ とおくと，$dy=\dfrac{dt}{x}$

$$\begin{array}{c|ccc} y & \epsilon & \to & 1 \\ \hline t & \epsilon x & \to & x \end{array}$$ となるので

$$I=\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1\frac{1}{x}\left\{\int_{\epsilon x}^x t^tdt\right\}dx=\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1(\log x)'\left\{\int_{\epsilon x}^x t^tdt\right\}dx$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left\{\left[\log x\int_{\epsilon x}^x t^tdt\right]_{x=\epsilon}^{x=1}-\int_\epsilon^1\left(\int_{\epsilon x}^x t^tdt\right)'\log xdx\right\}$$

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left[-\log\epsilon\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^tdt-\int_\epsilon^1\{x^x-(\epsilon x)^{\epsilon x}\epsilon\}\log xdx\right]$$

また，$y=x^x$ とおくと $\log y=x\log x$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x\log x$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-1}}$$

ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

よって

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{\log y}=e^0=1$$

これより関数 x^x は $0\leqq x\leqq 1$ で有界となる．このことと

$\displaystyle\int_\epsilon^1\log xdx=-\epsilon\log\epsilon-1+\epsilon$ であることを用いて

$$\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\int_\epsilon^1(\epsilon x)^{\epsilon x}\log xdx=0$$

がわかる．

また，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\log\epsilon\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^tdt=\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\int_{\epsilon^2}^\epsilon t^tdt}{(\log\epsilon)^{-1}}$ でロピタルの定理を用いて

$$=\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon^\epsilon-(\epsilon^2)^{\epsilon^2}(2\epsilon)}{-(\log\epsilon)^{-2}\epsilon^{-1}}=-\lim_{\epsilon\to+0}(\log\epsilon)^2\epsilon\left\{\epsilon^\epsilon-(\epsilon^2)^{\epsilon^2}(2\epsilon)\right\}$$

となる．

ここで，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}(\log\epsilon)^2\epsilon=0$ が $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ と同様にわかるので，

$\lim_{\epsilon \to +0} \log \epsilon \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} t^t dt = 0$ である．
従って，
$I = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{1} (-x^x \log x) dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\epsilon}^{1} \left\{ -x^x (\log x + 1) dx + \int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right\}$
　対数微分法により $(x^x)' = x^x (\log x + 1)$ なので，
$= \lim_{\epsilon \to +0} \left\{ -[x^x]_{\epsilon}^{1} + \int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right\}$
$= \lim_{\epsilon \to +0} \left(-1 + \epsilon^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1} x^x dx \right)$
再び $\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon^{\epsilon} = 1$ より
$I = \int_{0}^{1} x^x dx = \int_{0}^{1} y^y dy$