数理工学社

確率統計問題集Ｃ問題解答

2024年10月11日

第1章

21

$$k = A\exp\left\{-\frac{E}{RT}\right\} \iff \ln k = -\frac{E}{R}\cdot\frac{1}{T} + \ln A$$

$y = \ln k$ は $x = \frac{1}{T}$ の 1 次関数になる．ここに最小二乗法を用いる．表計算ソフト Excel を用いて次の表をつくることができる．

項目	T[K]	k	$x = 1/T$	$y = \ln k$	x^2	y^2	xy
	592.0	0.522	1.6892E-3	-0.65009	2.85336E-6	0.42262	-1.0981E-3
	603.2	0.755	1.6578E-3	-0.28104	2.74838E-6	0.07898	-0.4659E-3
	627.0	1.70	1.5949E-3	0.53063	2.54369E-6	0.28157	0.8463E-3
	651.5	4.02	1.5349E-3	1.39128	2.35598E-6	1.93567	2.1355E-3
	656.0	5.03	1.5244E-3	1.61542	2.32377E-6	2.60958	2.4625E-3
平均			1.6002E-3	0.52124	2.56504E-6	1.06568	0.7761E-3

この表より，

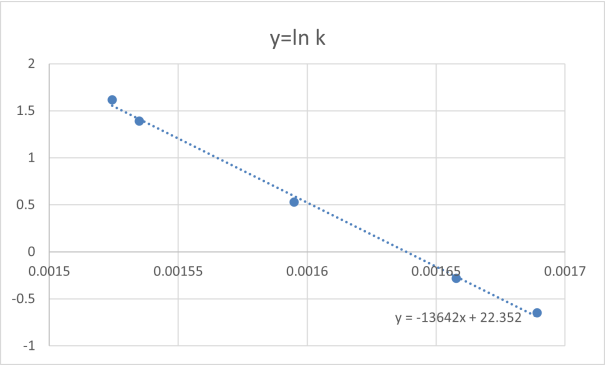
$$\overline{x} = 0.0016002, \quad \overline{y} = 0.52124, \quad \overline{x^2} = 2.56504\times10^{-6}$$
$$\overline{y^2} = 1.06582, \quad \overline{xy} = 0.7761\times10^{-3}$$

$$v_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 4.2553\times10^{-9}, \quad c_{x,y} = \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y} = -5.80526\times10^{-5}$$
$$a = \frac{c_{x,y}}{v_x} = -1.36424\times10^{4}, \quad b = \overline{y} - a\overline{x} = 22.3524$$

$a = -\frac{E}{R}$，$b = \ln A$ より，

$$\boldsymbol{E} = -Ra = -8.314a = \mathbf{113}[\mathrm{kJmol^{-1}}], \quad \boldsymbol{A} = e^b = \mathbf{5.10}\times\mathbf{10^9}[\mathrm{Lmol^{-1}s^{-1}}]$$

注 1.1　データから直接，Excel の関数で回帰係数を計算することができる (関数名は LINEST)．また，その x に対する y の回帰直線のグラフは以下のようになる．横軸が $x = \frac{1}{T}$ を表し，縦軸が $y = \ln k$ を表している．



22

$$C_V = \alpha T^3 + \gamma T \iff \frac{C_V}{T} = \alpha T^2 + \gamma$$

$y = \frac{C_V}{T}$ は $x = T^2$ の 1 次関数になる．ここに最小二乗法を用いる．表計算ソフト Excel を用いて次の表をつくることができる．

項目	T[K]	C_V	$x = T^2$	$y \times 10^3$	x^2	$y^2 \times 10^6$	xy
	2.00	0.00262	4.000	1.3100	16	1.716	0.00524
	4.00	0.0127	16.00	3.1750	256	10.008	0.0508
	6.00	0.0373	36.00	6.2167	1296	38.647	0.2238
	10.0	0.199	100.00	19.9000	10000	396.01	1.990
	14.0	0.559	196.00	39.9286	38416	1594.29	7.826
	20.0	1.671	400.00	83.5500	160000	6980.6	33.42
平均			125.33	25.680	34997.3	1503.6	7.2526

この表より，

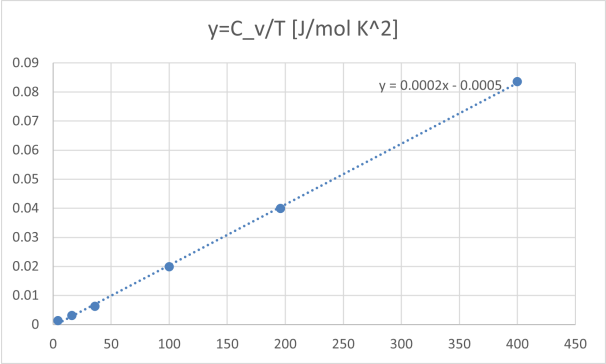
$$\overline{x} = 125.33, \qquad \overline{y} = 2.568 \times 10^{-2}, \qquad \overline{x^2} = 3.4997 \times 10^4$$
$$\overline{y^2} = 1.5036 \times 10^{-3}, \quad \overline{xy} = 7.2526$$

$$v_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 1.9289 \times 10^4, \qquad c_{x,y} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 4.0341$$
$$a = \frac{c_{x,y}}{v_x} = 2.0914 \times 10^{-4}, \qquad b = \overline{y} - a\overline{x} = -5.322 \times 10^{-4}$$

$a = \alpha$，$b = \gamma$ より，

$$\boldsymbol{\alpha = 2.09 \times 10^{-4}}[\mathrm{Jmol^{-1}K^{-4}}], \qquad \boldsymbol{\gamma = -5.32 \times 10^{-4}}[\mathrm{Jmol^{-1}K^{-2}}]$$

注 1.2　以下のグラフでは，横軸は $x = T^2$，縦軸は $y = \frac{C_V}{T}$ を表している．



第2章

34 (1) 求める確率は

$$p_0 = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{10}{56} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{28}}, \qquad p_1 = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{30}{56} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{28}},$$
$$p_2 = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{56}}, \qquad p_3 = \frac{{}_3\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_0}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{56}}.$$

(2) 求める金額の期待値は

$$0 \times \frac{5}{28} + 100 \times \frac{15}{28} + 200 \times \frac{15}{56} + 300 \times \frac{1}{56} = \frac{6300}{56} = \frac{225}{2} = \mathbf{112.5}\,[\text{円}]$$

(3) 求める確率は

$$q_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{\mathbf{125}}{\mathbf{512}}, \qquad q_1 = {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{\mathbf{225}}{\mathbf{512}},$$
$$q_2 = {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{5}{8}\right) \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{\mathbf{135}}{\mathbf{512}}, \qquad q_3 = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{512}}.$$

(4) 求める赤玉の出る回数の期待値は

$$0 \times \frac{125}{512} + 1 \times \frac{225}{512} + 2 \times \frac{135}{512} + 3 \times \frac{27}{512} = \frac{576}{512} = \frac{9}{8} = \mathbf{1.125}\,[\text{回}]$$

[別解] (4) 赤玉が出る回数は二項分布 $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$ に従うので，その期待値は公式（26 p の要項を参照）より

$$3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = \mathbf{1.125}\,[\text{回}]$$

35 (1) グーが 1 人でチョキが 3 人出す確率はグーをを出す人の決め方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあるので

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81} $$

である．その他，チョキが 1 人でパーが 3 人，パーが 1 人でグーが 3 人の場合もあるから求める確率は

$$ \frac{4}{81} \times 3 = \boldsymbol{\frac{4}{27}} \qquad \square $$

(2) 求める確率は余事象の確率の考えより

$$ 1 - \frac{{}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = 1 - \frac{10 \times 10}{210} = \frac{110}{210} = \boldsymbol{\frac{11}{21}} $$

(3) つぼから玉を 1 個取り出したとき，白い玉である事象を A とし，つぼに白い玉が 3 個入っている事象を B とするとき，求める確率は事象 A が起きたときの事象 B の起きる条件付き確率 $P_A(B)$ であるから，その確率は

$$ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{5} \times \frac{0}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{10}} $$

36 (1) B と E が独立であるから，B と $\overline{E}$ も独立であり，これと確率の乗法定理より

$$ \begin{aligned} P(A \cap B \cap E) &= P(A|B \cap E)P(B \cap E) = P(A|B \cap E)P(B)P(E) \\ &= 0.9 \times 0.2 \times 0.1 = 0.018 \\ P(A \cap B \cap \overline{E}) &= P(A|B \cap \overline{E})P(B \cap \overline{E}) = P(A|B \cap \overline{E})P(B)P(\overline{E}) \\ &= P(A|B \cap \overline{E})P(B)\{1 - P(E)\} = 0.7 \times 0.2 \times 0.9 = 0.126 \end{aligned} $$

$A \cap B \cap E$ と $A \cap B \cap \overline{E}$ は互いに排反でその和事象は $A \cap B$ だから

$$ P(A \cap B) = P(A \cap B \cap E) + P(A \cap B \cap \overline{E}) = 0.018 + 0.126 = 0.144 $$

これより，

$$ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.144}{0.36} = \boldsymbol{0.4} $$

(2)　4 個の事象 $A\cap B\cap E$ と $A\cap B\cap \overline{E}$ と $A\cap \overline{B}\cap E$ と $A\cap \overline{B}\cap \overline{E}$ は互いに排反でその和事象は A であるから

$$P(A)=P(A\cap B\cap E)+P(A\cap B\cap \overline{E})+P(A\cap \overline{B}\cap E)+P(A\cap \overline{B}\cap \overline{E})$$

また，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}P(A\cap \overline{B}\cap E)&=P(A|\overline{B}\cap E)P(\overline{B}\cap E)=P(A|\overline{B}\cap E)P(\overline{B})P(E)\\&=P(A|\overline{B}\cap E)\{1-P(B)\}P(E)=0.9\times 0.8\times 0.1=0.072\end{aligned}$$

これらのことより，

$$\begin{aligned}P(A\cap \overline{B}\cap \overline{E})&=P(A)-P(A\cap B\cap E)-P(A\cap B\cap \overline{E})-P(A\cap \overline{B}\cap E)\\&=0.36-0.018-0.126-0.072=0.144\end{aligned}$$

よって

$$P(A|\overline{B}\cap \overline{E})=\frac{P(A\cap \overline{B}\cap \overline{E})}{P(\overline{B}\cap \overline{E})}=\frac{0.144}{P(\overline{B})P(\overline{E})}=\frac{0.144}{0.8\times 0.9}=\mathbf{0.2}$$

(3) 確率の乗法定理より

$$\begin{aligned}P(R\cap E)&=P(R|E)P(E)=1\times 0.1=0.1\\P(R\cap \overline{E})&=P(R|\overline{E})P(\overline{E})=0.1\times 0.9=0.09\end{aligned}$$

2 つの事象 $A\cap B\cap R\cap E$ と $A\cap B\cap R\cap \overline{E}$ は互いに排反でその和事象が $A\cap B\cap R$ であることと，$A\cap B$ と $R\cap E$ および $A\cap B$ と $R\cap \overline{E}$ が互いに独立であること，また，(1) より $P(A\cap B)=0.144$ であることから，

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap R)&=P(A\cap B\cap R\cap E)+P(A\cap B\cap R\cap \overline{E})\\&=P(A\cap B)P(R\cap E)+P(A\cap B)P(R\cap \overline{E})\\&=P(A\cap B)\times 0.1+P(A\cap B)\times 0.09\\&=P(A\cap B)\times 0.19=0.144\times 0.19\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}P(A\cap\overline{B}\cap R) &= P(A\cap\overline{B}\cap R\cap E)+P(A\cap\overline{B}\cap R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap\overline{B})P(R\cap E)+P(A\cap\overline{B})P(R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap\overline{B})\times 0.1+P(A\cap\overline{B})\times 0.09\\ &= P(A\cap\overline{B})\times 0.19=\{P(A)-P(A\cap B)\}\times 0.19\\ &= (0.36-0.144)\times 0.19=0.216\times 0.19\end{aligned}$$

$A\cap B\cap R$ と $A\cap\overline{B}\cap R$ は互いに排反でその和事象は $A\cap R$ だから

$$P(A\cap R)=P(A\cap B\cap R)+P(A\cap\overline{B}\cap R)=(0.144+0.216)\times 0.19=0.36\times 0.19$$

これより，

$$P(B|A\cap R)=\frac{P(A\cap B\cap R)}{P(A\cap R)}=\frac{0.144\times 0.19}{0.36\times 0.19}=\mathbf{0.4}$$

[注意] (3) 上記の解答をよく見ると実は $P(R|E)=1,\ P(R|\overline{E})=0.1$ である必要はなくて $P(R)>0$ でさえあれば，同じ答えがでる．以下にその別解を記す．

[別解] (3) $P(R)\geqq P(R\cap E)=P(R|E)P(E)=1\times 0.1=0.1$ より $P(R)>0$.

$$P(B|A\cap R)=\frac{P(A\cap R\cap B)}{P(A\cap R)}=\frac{P(A\cap R\cap B)}{P(A\cap R\cap B)+P(A\cap R\cap\overline{B})}\cdots①$$

$A\cap B$ と $R\cap E$，$A\cap B$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ互いに独立だから

$$\begin{aligned}P(A\cap R\cap B) &= P(A\cap B\cap R\cap E)+P(A\cap B\cap R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap B)P(R\cap E)+P(A\cap B)P(R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap B)(P(R\cap E)+P(R\cap\overline{E}))=P(A\cap B)P(R)\cdots②\end{aligned}$$

同様に $A\cap\overline{B}$ と $R\cap E$，$A\cap\overline{B}$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ互いに独立だから

$$\begin{aligned}P(A\cap R\cap\overline{B}) &= P(A\cap\overline{B}\cap R\cap E)+P(A\cap\overline{B}\cap R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap\overline{B})P(R\cap E)+P(A\cap\overline{B})P(R\cap\overline{E})\\ &= P(A\cap\overline{B})(P(R\cap E)+P(R\cap\overline{E}))=P(A\cap\overline{B})P(R)\cdots③\end{aligned}$$

②，③を①に代入すると

$$P(B|A\cap R)=\frac{P(A\cap B)P(R)}{\{P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\}P(R)} \qquad \text{(1) の結果より} \downarrow$$
$$=\frac{P(A\cap B)P(R)}{P(A)P(R)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B|A)=\mathbf{0.4}$$

37 (1) 先に赤玉がなくなるのは，最初に赤玉を取り出す場合と最初に白玉を取り出して次に赤玉を取り出す場合の 2 通りの場合があり，それぞれ排反な事象であるから求める確率 $P(1,2)$ は

$$P(1,2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) (1) と同じように考えて解くこともできるが違う解き方をする．赤玉がなくなっても最後まで取り出すことにして，5 個の玉の取り出し方を取り出した順に表記することにすると，次のようになる．

赤赤白白白，　赤白赤白白，　赤白白赤白，　白赤赤白白，　白赤白赤白，
白白赤赤白，　赤白白白赤，　白赤白白赤，　白白赤白赤，　白白白赤赤

この玉の取り出し方の総数は ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ 通りある．この 10 通りの事象は同様に確からしい．このうち，赤玉が先になくなるのは最後が白玉になっている 6 通りである．よって求める確率 $P(2,3)$ は

$$P(2,3)=\frac{6}{10}=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

(3) (2) と同様に赤玉がなくなっても最後まで引くことにして，$n+m$ 個の玉の取り出し方を取り出した順に表記することにすると，その取り出し方の総数は $m+n$ 個の順序づけた箱に赤玉 n 個を配置し，残りの n 個の箱に白玉を配置する場合の数と等しく，

$${}_{m+n}\mathrm{C}_n=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

であり，これらの事象は同様に確からしいと考えられる．このうち，赤玉が先になくなるのは最後が白玉になっている場合なのでそのような取り出し方の総

数は，最後の箱を除く $m+n-1$ 個の順序づけた箱に赤玉 n 個を配置し，残りの $n-1$ 個の箱に白玉を配置する場合の数と等しく，

$$ {}_{m+n-1}\mathrm{C}_n = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} $$

である．よって求める確率 $P(m,n)$ は

$$ P(m,n) = \frac{{}_{m+n-1}\mathrm{C}_n}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n} = \frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}} = \frac{(m+n-1)!\,n!}{(m+n)!\,(n-1)!} = \boldsymbol{\frac{n}{m+n}} $$

である．

[注意] (3) の確率はつぎのように求めることもできる．最後に白玉を取り出す確率であるが，これは最初に白玉を取り出す確率に等しいと考えることもできる．よって求める確率は

$$ \frac{\text{白玉の数}}{\text{すべての玉の数}} = \boldsymbol{\frac{n}{m+n}} $$

38 以下において自然数 k に対して k 回目に出た正八面体のさいころの目の数を a_k とすると，x_n は

$$ x_n = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n $$

と表される．

(1) $\frac{8}{33} = 0.242424\cdots = 0.\dot{2}\dot{4}$ であるから，$x_2 = 0.a_1a_2 < \frac{8}{33}$ となるのは「$a_1 = 0,\ 1$」または「$a_1 = 2$ かつ $0 \leqq a_2 \leqq 4$」の場合なので求める確率 p_2 は

$$ p_2 = \frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} = \boldsymbol{\frac{21}{64}} $$

(2) $x_n < \frac{8}{33}$ となるのは次の 2 通りの場合が考えられる．

（ア）$x_{n-2} < \frac{8}{33}$ かつ $x_{n-2} \neq 0.\overbrace{2424\cdots24}^{24\text{ が }\frac{n-2}{2}\text{ 個}}$ のとき，このとき，a_{n-1} と a_n はどの数字が出てもよい．

（イ） $x_{n-2}=0.\overbrace{2424\cdots24}^{24\text{ が }\frac{n-2}{2}\text{ 個}}$ のとき，「$a_{n-1}=0,\,1$」または「$a_{n-1}=2$ かつ $0\leqq a_n\leqq 4$」でなければならない．

これらより，n が 4 以上の偶数のとき，次の漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}p_n&=\left(p_{n-2}-\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)\times 1+\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{n-2}{2}}\times\frac{21}{64}\\&=p_{n-2}-\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}\times\frac{21}{64}\\&=p_{n-2}-\frac{43}{8^n}\end{aligned}$$

以上より，求める漸化式は

$$\boldsymbol{p_n=p_{n-2}-\frac{43}{8^n}}\qquad\cdots①$$

(3)　(2) の漸化式を

$$p_n-\frac{\alpha}{8^n}=p_{n-2}-\frac{\alpha}{8^{n-2}}$$

と変形できたとする．このとき

$$\frac{63\alpha}{8^n}=\frac{43}{8^n}$$

でなければならないので，$\alpha=\dfrac{43}{63}$ となる．この漸化式より，

$$p_n-\frac{\alpha}{8^n}=p_2-\frac{\alpha}{8^2}=\frac{21}{64}-\frac{43}{63\cdot 64}=\frac{20}{63}$$

となる．これより

$$p_n=\frac{\boldsymbol{43+20\cdot 8^n}}{\boldsymbol{63\cdot 8^n}}$$

[別解] (3) 次のように解く方が自然かもしれない．

(2) の漸化式①は $p_n-p_{n-2}=-\dfrac{43}{8^n}$ と変形できるから，n が 4 以上の偶数のとき

$$
\begin{aligned}
p_n &= (p_n - p_{n-2}) + (p_{n-2} - p_{n-4}) + \cdots + (p_6 - p_4) + (p_4 - p_2) + p_2 \\
&= \underbrace{-\frac{43}{8^n} - \frac{43}{8^{n-2}} - \cdots - \frac{43}{8^6} - \frac{43}{8^4}}_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\text{個}} + \frac{21}{64} \\
&\overset{*}{=} -\frac{43}{8^4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{1 - \frac{1}{8^2}} + \frac{21}{64} = \boldsymbol{\frac{43 + 20 \cdot 8^n}{8^n \cdot 63}}
\end{aligned}
$$

←$*$：等比数列の和の公式

これは $n = 2$ のときにも成立する.

第3章

23 (1) $P(X=1)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$, $P(X=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$

(2) $X=n$ となるのは $n-1$ 回目までは 1 以外の目が出て，n 番目に初めて 6 が出る場合である．よって

$$P(X=n)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{\mathbf{5^{n-1}}}{\mathbf{6^n}}$$

(3) 求める期待値は無限級数の和

$$E[X]=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{5}{6^2}+\cdots+n\times\frac{5^{n-1}}{6^n}+\cdots$$

であるが $\dfrac{5}{6}=r$ とおき，この級数の第 n 部分和を S_n とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{6}(1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1})\\ rS_n&=\frac{1}{6}(\qquad r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n)\end{aligned}$$

となるので辺々引くと

$$\begin{aligned}(1-r)S_n&=\frac{1}{6}(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-nr^n)\\ &=\frac{1}{6}\left(\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n\right)=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{6(1-r)}\end{aligned}$$

となる．これより，

$$S_n=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{6(1-r)^2}\overset{1-r=\frac{1}{6}\ \downarrow}{=}6\{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}\}$$

となる．$0<r<1$ であり，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0\cdots$① であるから求める期待値は

$$E[X]=\lim_{n\to\infty}6\{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}\}=\mathbf{6}$$

[注意] (3) の①は次のように証明できる.

[証明] $0<r<1$ より $r=\dfrac{1}{1+h}$ とおくと $h>0$ である. 2 項定理を用いると $n \geqq 2$ のとき

$$0<nr^n=\frac{n}{(1+h)^n}=\frac{n}{1+{}_n\mathrm{C}_1 h+{}_n\mathrm{C}_2 h^2+\cdots+h^n}<\frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}$$

であり, $n\to\infty$ とすると $\dfrac{2}{(n-1)h^2}\to 0$ となるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty} nr^n=0$$

が成り立つ. □

24 (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i=\mathbf{1}$

(2) $E[X]=\mu$ とおくと $\boldsymbol{E[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V[X]}&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i=\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2\mu x_i+\mu^2)p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\mu^2\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i-2\mu\cdot\mu+\mu^2\cdot 1\\&=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i-\mu^2=\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\right)^2}\end{aligned}$$

(3) [証明] $I=\{i\,|\,|x_i-\mu|\geqq k\}$ とおくと任意の i について $(x_i-\mu)^2 p_i\geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i&\geqq\sum_{i\in I}(x_i-\mu)^2 p_i\\&\geqq\sum_{i\in I}k^2 p_i=k^2\sum_{i\in I}p_i=k^2 P(|X-\mu|\geqq k)\end{aligned}$$

したがって

$$\sigma^2 \geqq k^2 P(|X-\mu| \geqq k) \qquad \square$$

(4) (3) の不等式に $\mu = 50,\ \sigma^2 = 9$ を代入し，特に $k = 10$ の場合を考えると

$$9 \geqq 10^2 P(|X-50| \geqq 10) \quad \text{よって,} P(|X-50| \geqq 10) \leqq \frac{9}{100}$$

「$40 < X < 60$」の余事象は「$|X-50| \geqq 10$」であるから

$$P(40 < X < 60) = 1 - P(|X-50| \geqq 10) \geqq 1 - 0.09 = 0.91$$

まとめると

$$\boldsymbol{P(40 < X < 60) \geqq 0.91}$$

25 (1) 表の出る回数を T とおくと T は二項分布 $B(6, \frac{1}{2})$ に従う．点 P の座標を X とおくと

$$X = 4T - 2(6-T) = 6T - 12$$

が成り立つ．

(a) $X = 6T - 12 = 0$ より $T = 2$．よって求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6\times 5}{2\times 1}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \boldsymbol{\frac{15}{64}}$$

(b) T は二項分布 $B(6, \frac{1}{2})$ に従う．よって $E[T] = 6 \times \frac{1}{2} = 3$．したがって点 P の座標 X の期待値は

$$E[X] = 6E[T] - 12 = 6 \times 3 - 12 = \boldsymbol{6}$$

[注意] X の確率分布の表を書くことによって求めることもできる．すなわち

T	0	1	2	3	4	5	6
X	-12	-6	0	6	12	18	24
確率	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

これより

$$E[X] = (-12) \times \frac{1}{64} + (-6) \times \frac{6}{64} + 0 \times \frac{15}{64} + 6 \times \frac{20}{64} + 12 \times \frac{15}{64} + 18 \times \frac{6}{64} + 24 \times \frac{1}{64} = \frac{384}{64} = \mathbf{6}$$

(2) 表の出る回数を T とおくと T は二項分布 $B(5, \frac{1}{2})$ に従う．点 P の座標を X とおくと

$$X = T - (5 - T) = 2T - 5$$

が成り立つ．

(a) 二項分布の期待値の公式より $E[T] = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$．よって，点 P の座標 X の期待値は

$$E[X] = 2E[T] - 5 = 2 \times 2.5 - 5 = \mathbf{0}$$

また，$X = 2T - 5 = 0$ より $T = 2.5$．T は整数でないからこのようになることはありえない．よって点 P がその期待値の座標の上に在る確率は **0**.

(b) T は二項分布 $B(5, \frac{1}{2})$ に従うので T および，X のとる値とその確率の対応を表にすると，

T	0	1	2	3	4	5
X	-5	-3	-1	1	3	5
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

これより，原点から点 P までの距離 $|X|$ の期待値は

$$E[|X|] = 5 \times \frac{2}{32} + 3 \times \frac{10}{32} + 1 \times \frac{20}{32} = \frac{60}{32} = \mathbf{\frac{15}{8}}$$

(c) Y をこのルールでの点 P の座標とする．$m = 1, 2, 3, 4, 5$ について m 回目が表のとき $a_m = 1$，m 回目が裏のとき $a_m = -1$ と定め，$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ とおく．m 回目が表裏どちらも取り得る場合のとき $a_m = *$ と表すことにする．次の場合が考えられる．

(あ) $Y = 0$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a} = (-1, *, *, *, *), \quad (1, -1, -1, *, *), \quad (1, -1, 1, -1, -1),$$
$$(1, 1, -1, -1, -1)$$

このときの確率は　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{32}=\dfrac{22}{32}$

(い)　$Y=1$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a}=(1,-1,1,-1,1),\quad (1,-1,1,1,-1),\quad (1,1,1,-1,-1),$$
$$(1,1,-1,1,-1),\quad (1,1,-1,-1,1)$$

このときの確率は　$\dfrac{5}{32}$

(う)　$Y=3$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a}=(1,-1,1,1,1),\quad (1,1,-1,1,1),\quad (1,1,1,-1,1),\quad (1,1,1,1,-1)$$

このときの確率は　$\dfrac{4}{32}$

(え)　$Y=5$ となるのは次の場合である．

$$\mathbf{a}=(1,1,1,1,1)$$

このときの確率は　$\dfrac{1}{32}$

以上より，求める Y の期待値は

$$E[Y]=0\times\frac{22}{32}+1\times\frac{5}{32}+3\times\frac{4}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{22}{32}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

26　(1) $P=(p_{ij})$ と行列で表せば，

$$P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&\frac{6}{11}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{11}\\\frac{2}{3}&\frac{5}{12}&0\end{pmatrix}$$

(2)　n 回の移動後に初めて状態 3 に到達する確率を r_n で表す．n 回の移動後に初めて状態 3 になる場合，$n-1$ 回目までの移動では状態 1 または状態 2 のどちらかになり，n 回目の移動で状態 3 になる．そこで 0 以上の整数 k について k 回目までの移動では状態 1 または状態 2 のどちらかにあり，k 回目の移動で状態 1 になる確率を p_k，状態 2 になる確率を q_k とおく．すると，0 以上の整数 k について次の漸化式が成り立つ．

$$p_{k+1} = \frac{1}{4}q_k, \qquad q_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k \cdots ①$$

この 2 式より

$$p_{k+1} + \alpha q_{k+1} = \beta(p_k + \alpha q_k) \cdots ②$$

が成り立つような α, β を求める．①，② より p_{k+1}, q_{k+1} を消去しすると

$$\frac{1}{4}q_k + \left(\frac{\alpha}{3}p_k + \frac{\alpha}{3}q_k\right) = \beta p_k + \alpha\beta q_k$$

この式において p_k, q_k の係数を比較すると

$$\frac{\alpha}{3} = \beta, \qquad \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{4} = \alpha\beta$$

この連立方程式を解くと

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$$

を得る．

(i) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき，$p_{k+1} + \frac{3}{2}q_{k+1} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{3}{2}q_k\right)$ となるがこれと $p_0 = 1, q_0 = 0$ を用いると

$$p_{n-1} + \frac{3}{2}q_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_0 + \frac{3}{2}q_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots ③$$

(ii) $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ のとき，$p_{k+1} - \frac{1}{2}q_{k+1} = -\frac{1}{6}\left(p_k - \frac{1}{2}q_k\right)$ となるがこれと $p_0 = 1, q_0 = 0$ を用いると

$$p_{n-1} - \frac{1}{2}q_{n-1} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_0 - \frac{1}{2}q_0\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdots ④$$

$(③ + 3 \times ④) \div 4$，$(③ - ④) \div 2$ より

$$p_{n-1} = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}, \quad q_{n-1} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

を得る．よって，自然数 n について求める確率 r_n は

$$
\begin{aligned}
r_n &= \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{5}{12}q_{n-1} \\
&= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} + \frac{5}{24}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{24}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

[**注意**] 連立漸化式①より，一般項を求める方法として上記の方法の他に，係数の行列を対角化し，行列の n 乗を求めて解く方法と p_k または q_k の一方を消去して二項間漸化式に帰着させる方法がある．

第4章

27 (1) 平均 0，標準偏差 1 の正規分布の確率密度関数を $f(x)$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるから

$$E[Z] = E[|X|] + E[|Y|] = 2E[|X|] = 2\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx \quad \leftarrow |x|f(x) \text{ は偶関数}$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}}$$

次に X と Y は互いに独立だから，$|X|$ と $|Y|$ も互いに独立であり

$$V[Z] = V[|X|] + V[|Y|] = 2V[|X|] = 2\left\{E[X^2] - (E[|X|])^2\right\} \quad \leftarrow |X|^2 = X^2 \text{ に注意}$$

$$= 2 \cdot 2\int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx - 2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx - \frac{4}{\pi}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left\{\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right\} - \frac{4}{\pi}$$

$$\overset{*}{=} \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - 0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) - \frac{4}{\pi} = \boldsymbol{2 - \frac{4}{\pi}} \quad \leftarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x e^{\frac{x^2}{2}}} = 0 \text{ 等号}*\text{：ロピタルの定理より}$$

[別解] $V[Z]$ については次のような解答もある．$|X|$ と $|Y|$ も互いに独立であるから

$$V[Z] = V[|X|] + V[|Y|] = 2V[|X|] = 2\left\{E[|X|^2] - (E[|X|])^2\right\}$$

$$= 2\left\{E[X^2] - (E[|X|])^2\right\} \cdots ① \quad \leftarrow |X|^2 = X^2 \text{ に注意}$$

ここで前半より $E[|X|] = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ である．また，問題の仮定から $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1$ かつ $E[X] = 0$ であり，これより $E[X^2] = 1$．これらを①に代入すると

$$V[Z] = 2\left\{E[X^2] - (E[|X|])^2\right\} = 2(1 - \frac{2}{\pi}) = \mathbf{2 - \frac{4}{\pi}}$$

(2) X の累積分布関数を $F(x)$ とおく．W の累積分布関数を $G(w)$（すなわち，$P(W \leqq w) = G(w)$）とおき，W の確率密度関数を $g(w)$ とおく．X と Y は互いに独立だから，$w \geqq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} G(w) &= P(W \leqq w) = P(\max(|X|, |Y|) \leqq w) \\ &= P(-w \leqq X \leqq w,\ \text{かつ},\ -w \leqq Y \leqq w) \\ &\xrightarrow[\text{独立だから}]{X\ \text{と}\ Y\ \text{は}} = P(-w \leqq X \leqq w)P(-w \leqq Y \leqq w) \\ &= 2P(0 \leqq X \leqq w) \cdot 2P(0 \leqq Y \leqq w) \\ &= 4\{F(w) - F(0)\}^2 \end{aligned}$$

これより，↓等号∗については 31p の要項の「累積分布関数」の (3) を用いた．

$$g(w) \overset{*}{=} G'(w) = 8\{F(w) - F(0)\}\{F(w) - F(0)\}' = 8\{F(w) - F(0)\}f(w)$$

また，$w < 0$ のとき，$G(w) = 0$ であり，$g(w) = G'(w) = 0$．これらより，

$$\begin{aligned} E[W] &= \int_{-\infty}^{\infty} wg(w)\,dw = \int_0^{\infty} 8w\{F(w) - F(0)\}f(w)\,dw \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} we^{-\frac{w^2}{2}} \{F(w) - F(0)\}\,dw \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right)' \{F(w) - F(0)\}\,dw \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right) \{F(w) - F(0)\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{w^2}{2}}\right) f(w)\,dw \right\} \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 0 \times \frac{1}{2} - (-1) \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w^2}\,dw \right\} \quad \leftarrow F(\infty) = 1,\ F(0) = \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mathbf{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \end{aligned}$$

[別解] 平面の領域 D_1, D_2 を

$$D_1 = \{(x, y) | |x| \geqq |y|\}, \quad D_2 = \{(x, y) | |y| \geqq |x|\}$$

とおく．X と Y は互いに独立であるから，

$$E[W] = \iint_{\mathbb{R}^2} \max(|x|,|y|) f(x)f(y)\,dxdy$$
$$= \iint_{D_1} |x| f(x)f(y)\,dxdy + \iint_{D_2} |y| f(x)f(y)\,dxdy \cdots ①$$

ここで①の 2 個の重積分の値は対称性により，等しい．よって

$$E[W] = 2\iint_{D_1} |x| f(x)f(y)\,dxdy$$
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) \left\{ \int_{-|x|}^{|x|} f(y)\,dy \right\} dx \qquad \leftarrow \text{波線部分は } x \text{ の偶関数}$$
$$= 4\int_{0}^{\infty} x f(x) \left\{ \int_{-x}^{x} f(y)\,dy \right\} dx \qquad \leftarrow f(y) \text{ は } y \text{ の偶関数}$$
$$= 8\int_{0}^{\infty} x f(x) \left\{ \int_{0}^{x} f(y)\,dy \right\} dx$$
$$= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ \int_{0}^{x} f(y)\,dy \right\} dx$$
$$= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' \left\{ \int_{0}^{x} f(y)\,dy \right\} dx \qquad \frac{d}{dx}\int_0^x f(y)\,dy = f(x) \downarrow$$
$$= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \left\{ \int_{0}^{x} f(y)\,dy \right\} \right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) f(x)\,dx \right\}$$
$$= \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 0 \cdot \frac{1}{2} - (-1)\cdot 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\,dx \right\}$$
$$= \frac{8}{2\pi} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right\} \qquad \leftarrow \text{指数法則 } e^a \cdot e^b = e^{a+b} \text{ を利用}$$
$$= \frac{8}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}$$

28 (1) バスの時間を知らずに来る人が x 分から $x + dx$ 分の間に来る確率は $\dfrac{1}{60}dx$ であると考えることができる．このときの待ち時間は $(60 - x)$ 分である．よって，求める待ち時間の期待値は

$$\int_0^{60} (60 - x)\frac{1}{60}\,dx = \frac{1}{60}\left[60x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = \frac{1}{60}\left(60^2 - \frac{60^2}{2}\right) = 30$$

よって，求める待ち時間の期待値は **30** 分．

(2) 求める確率は

$$\int_0^{25} \frac{1}{60}\,dx = \left[\frac{x}{60}\right]_0^{25} = \frac{25}{60} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

(3) 求める期待値は

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^x (x-t)\frac{1}{60}\,dt + \int_x^y (y-t)\frac{1}{60}\,dt + \int_y^{60} (60-t)\frac{1}{60}\,dt \\ &= \frac{1}{60}\left\{\left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[yt - \frac{t^2}{2}\right]_x^y + \left[60t - \frac{t^2}{2}\right]_y^{60}\right\} \\ &= \frac{1}{60}\left\{\frac{x^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2} - xy + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{60^2}{2} - 60y + \frac{y^2}{2}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{60}\left(x^2 - xy + y^2 - 60y + 1800\right)} \end{aligned}$$

(4) $f(x,y)$ の領域 $D = \{(x,y) | 0 < x < y < 60\}$ における最小値を求めればよい．$f(x,y)$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 60y + 1800\right\} \\ &= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y^2 - 80y) + 1800\right\} \\ &= \frac{1}{60}\left\{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-40)^2 + 600\right\} \geqq \frac{600}{60} = 10 \end{aligned}$$

ここで，等号が成り立つのは $x - \dfrac{y}{2} = 0$ かつ $y - 40 = 0$ すなわち $(x,y) = (20,40)$ のときであり，$(20,40)$ は領域 D に属するので $f(x,y)$ に最小値 10 を与える．以上により，

$(x,y) = (\mathbf{20}, \mathbf{40})$ のとき，$f(x,y)$ は最小値 **10** をとる．

29 (1) 題意より $E[X] = E[Y] = 0,\ V[X] = V[Y] = \sigma^2$. これより S, T の期待値は

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X]\cos\lambda s + E[Y]\sin\lambda s = 0\cos\lambda s + 0\sin\lambda s = \mathbf{0} \\ E[T] &= E[X]\cos\lambda(s+t) + E[Y]\sin\lambda(s+t) \\ &= 0\cos\lambda(s+t) + 0\sin\lambda(s+t) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

また，S, T の分散は X, Y が互いに独立であるから，

$$\begin{aligned} V[S] &= V[X]\cos^2\lambda s + V[Y]\sin^2\lambda s = \sigma^2(\cos^2\lambda s + \sin^2\lambda s) = \boldsymbol{\sigma^2} \\ V[T] &= V[X]\cos^2\lambda(s+t) + V[Y]\sin^2\lambda(s+t) \\ &= \sigma^2(\cos^2\lambda(s+t) + \sin^2\lambda(s+t)) = \boldsymbol{\sigma^2} \end{aligned}$$

また，S, T の共分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[S,T] &= E[ST] - E[S]E[T] = E[ST] - 0\times 0 \\ &= E[X^2]\cos\lambda s\cos\lambda(s+t) + E[Y^2]\sin\lambda s\sin\lambda(s+t) \\ &\quad + E[XY]\{\cos\lambda s\sin\lambda(s+t) + \sin\lambda s\cos\lambda(s+t)\} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} E[X^2] &= V[X] + (E[X])^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2 \\ E[Y^2] &= V[Y] + (E[Y])^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2 \\ E[XY] &= E[X]E[Y] = 0\times 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[S,T] &= \sigma^2\{\cos\lambda s\cos\lambda(s+t) + \sin\lambda s\sin\lambda(s+t)\} + 0 \\ &= \sigma^2\cos\{\lambda(s+t) - \lambda s\} = \boldsymbol{\sigma^2\cos t} \end{aligned}$$

(2) 求める相関係数は

$$\rho[S,T] = \frac{\mathrm{Cov}[S,T]}{\sqrt{V[S]}\sqrt{V[T]}} = \frac{\sigma^2\cos\lambda t}{\sigma\cdot\sigma} = \boldsymbol{\cos t}$$

30 (1) X, Y は独立であるから，(X, Y) の同時確率密度関数は $f(x)f(y)$ であり，これは第 1 象限以外では 0 になる．領域 D_1 を

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leqq x < y\}$$

とおくと求める確率 $P(X < Y)$ は

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \iint_{D_1} f(x)f(y)\,dxdy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left\{ \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy \right\} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_x^\infty dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-2\lambda x}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2}(0 - 1) = \mathbf{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2) $Z = \min\{X, Y\}$ とおき，Z の累積分布関数を $G(z)$，Z の分布密度関数（すなわち，確率密度関数）を $g(z)$ とおく．$z > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} G(z) &= P(Z \leqq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(\min\{X, Y\} > z) \\ &= 1 - P(X > z \text{ かつ } Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) \\ &= 1 - \left(\int_z^\infty f(x)\,dx \right)^2 = 1 - \left(\int_z^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \right)^2 \\ &= 1 - \left(\left[-e^{-\lambda x} \right]_z^\infty \right)^2 = 1 - e^{-2\lambda z} \end{aligned}$$

よって，求める分布密度関数 $g(z)$ は $z > 0$ のとき，

$$g(z) = G'(z) = 2\lambda e^{-2\lambda z}$$

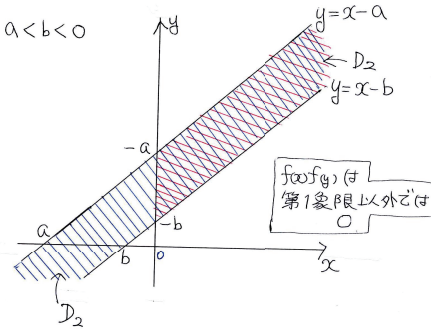
また，$z \leqq 0$ のとき，$G(z) = 0$ より，$g(z) = G'(z) = 0$．以上をまとめると，求める分布密度関数は

$$\boldsymbol{g(z) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda z} & (z > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (z \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

(3) 平面の領域 D_2 を

$$D_2 = \{(x, y) | a < x - y < b\}$$

とおくと D_2 は右図の斜線部の部分である．第 1 象限以外の部分では同時確率密度関数は 0 であることに注意すると，求める確率 $P(a < X - Y < b)$ は



$$\begin{aligned}
P(a < X - Y < b) &= \iint_{D_2} f(x)f(y)\,dxdy \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left\{ \int_{x-b}^{x-a} \lambda e^{-\lambda y}\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_{x-b}^{x-a} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\lambda(x-a)} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \lambda \left(e^{-\lambda(2x-b)} - e^{-\lambda(2x-a)} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-e^{-\lambda(2x-b)} + e^{-\lambda(2x-a)} \right]_0^\infty \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} \left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a} \right)}
\end{aligned}$$

31 (1) 求める $|X|$ の期待値は

$$E[|X|] = \iint_{\mathbb{R}^2} |x| f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left\{\int_{-y}^{y} |x|(y-x)\,dx\right\} dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left\{2\int_0^{y} xy\,dx\right\} dy \qquad \uparrow\ |x|x \text{ は } x \text{ の奇関数，} |x|y \text{ は } x \text{ の偶関数}$$

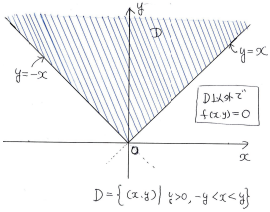
$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y}\left[x^2 y\right]_0^{y} dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty y^3 e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[y^3(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 3y^2 e^{-y}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[3y^2(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 6ye^{-y}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[6y(-e^{-y})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 6e^{-y}\,dy\right\} = \frac{6}{4}\left[-e^{-y}\right]_0^\infty = \mathbf{\frac{3}{2}}$$



上の積分計算の中で $\lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y} = 0$ であることなどを用いた．これは下のようにロピタルの定理を用いて示すことができる．

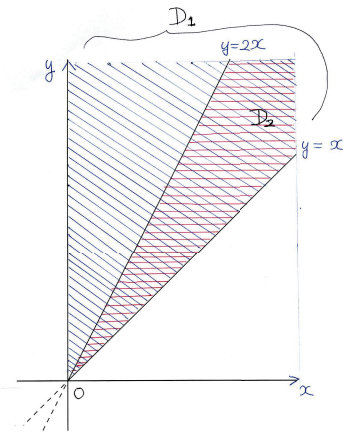
$$\lim_{y\to\infty} y^3 e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{3y^2}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{6y}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{6}{e^y} = 0$$

(2) 平面の領域 D_1, D_2 を

$$D_1 = \{(x,y) | y > 0 \text{ かつ } 0 \leqq x \leqq y\}$$
$$D_2 = \{(x,y) | y > 0 \text{ かつ } 0 \leqq x \leqq y \leqq 2x\}$$

とおくと確率 $P(X > 0)$ は

$$
\begin{aligned}
P(X>0) &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left\{\int_0^{y}(y-x)\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left[xy-\frac{x^2}{2}\right]_0^{y}dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} y^2e^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} 2ye^{-y}\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\infty} 2e^{-y}\,dy \\
&= \frac{2}{8}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$



と計算できる．また，確率 $P(X>0$ かつ $0<Y\leqq 2X)$ も同様にして

$$
\begin{aligned}
P(X>0 \text{ かつ } 0<Y\leqq 2X) &= \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left\{\int_{\frac{y}{2}}^{y}(y-x)\,dx\right\}dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-y}\left[xy-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}dy \\
&= \frac{1}{32}\int_0^{\infty} y^2e^{-y}\,dy = \frac{2}{32}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

となる．以上より求める条件付き確率は

$$
P(0<Y\leqq 2X|X>0) = \frac{P(X>0 \text{ かつ } 0<Y\leqq 2X)}{P(X>0)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}
$$

32 ［証明］ $Z = X + Y$ の確率密度関数を $f(z)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2} \right\} \exp\left\{ -\frac{(z-x-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-m_1)^2}{2{\sigma_1}^2} - \frac{(z-x-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2} \right\} dx \end{aligned}$$

ここで，最後の式の指数関数の指数の部分 (波線部分) を $g(x)$ とすると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\left(\frac{1}{2{\sigma_1}^2} + \frac{1}{2{\sigma_2}^2} \right) x^2 + \left(\frac{m_1}{{\sigma_1}^2} + \frac{(z-m_2)}{{\sigma_2}^2} \right) x - \left(\frac{{m_1}^2}{2{\sigma_1}^2} + \frac{(z-m_2)^2}{2{\sigma_2}^2} \right) \\ &= -\frac{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} x^2 + \frac{m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} x - \frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2 + (z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \\ &= -\frac{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \left(x^2 - 2\frac{m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} x \right) - \frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2 + (z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \\ &= -\frac{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \left(x - \frac{m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} \right)^2 \\ &\qquad + \frac{\left(m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2 \right)^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)} - \frac{{m_1}^2{\sigma_2}^2 + (z-m_2)^2{\sigma_1}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \end{aligned}$$

ここですぐ上の式の青色の波線部分を $h(z)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{\left(m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2 \right)^2 - \left({m_1}^2{\sigma_2}^2 + (z-m_2)^2{\sigma_1}^2 \right)({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)} \\ &= \frac{2m_1(z-m_2){\sigma_1}^2{\sigma_2}^2 - \left({m_1}^2 + (z-m_2)^2 \right){\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)} \\ &= -\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)} \end{aligned}$$

となる．これより

$$g(x) = -\frac{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2} \left(x - \frac{m_1{\sigma_2}^2 + (z-m_2){\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} \right)^2 - \frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)}$$

となる．一般に a を $a > 0$ を満たす実数，c を任意の実数とするとき，

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x-c)^2\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\cdots$① が成り立つから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}\exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}}\exp\left\{-\frac{\big(z-(m_1+m_2)\big)^2}{2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}\right\}$$

となり，Z は正規分布 $N(m_1+m_2,\ {\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)$ に従うことが示された． □

[**注意**] 定積分①は $t=\sqrt{a}(x-c)$ と置くことによって次のように得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x-c)^2\}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

33 (1) X の確率密度関数を $f(x)$ とおくと，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

である．$Y=X^2$ の累積分布関数を $G(y)$ とおき，Y の確率密度関数を $g(y)$ とおく．

・$y>0$ のとき，

$$G(y) = P(Y \leqq y) = P(X^2 \leqq y) = P(-\sqrt{y} \leqq X \leqq \sqrt{y})$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\sqrt{y}} f(x)\,dx \quad \leftarrow * : f(x) \text{ は偶関数だから}$$

よって，合成関数の微分の公式より

$$g(y) = G'(y) = 2f(\sqrt{y})\frac{d}{dy}\sqrt{y}$$
$$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

・$y<0$ のとき，$G(y)=0$．よって，$g(y)=G'(y)=0$

以上をまとめると

$$\boldsymbol{g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left(-\dfrac{y}{2}\right) & (y>0\text{ のとき})\\ 0 & (y<0\text{ のとき})\end{cases}}$$

(2) $Z=X^2+Y^2$ の確率密度関数を $h(z)$ とおく．X, Y は互いに独立だから，X^2, Y^2 も互いに独立である．X^2 と Y^2 の確率密度関数は (4) の $g(y)$ であるから，4 章 C 発展問題 32 の問題文 3 行目の公式を用いる．

・$z>0$ のとき，$x<0$ または $x>z$ では $g(x)g(z-x)=0$ だから

$$\begin{aligned}h(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)g(z-x)\,dx\\&=\int_0^z\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(z-x)}}\exp\left(-\frac{(z-x)}{2}\right)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,dx\end{aligned}$$

ここで最後の式の青色の波線部分の定積分は広義積分であり，その値は

$$\begin{aligned}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}\,dx&=\int_0^z\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}}\,dx\\&=\left[\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)\right]_0^z\\&=\sin^{-1}1-\sin^{-1}(-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned}$$

よって $z>0$ のとき $h(z)=\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{z}{2}\right)$.

・$z<0$ のとき，常に $g(x)g(z-x)=0$ であるから $h(z)=0$.

以上をまとめると

$$\boldsymbol{h(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & (z>0\text{ のとき})\\ 0 & (z<0\text{ のとき})\end{cases}}$$

[注意] 次のように (4) の結果を使わない解答の方が自然であるかもしれない．

[別解] X, Y はともに標準正規分布にしたがい，その確率密度関数を $f(x)$ とおく．また，$Z = X^2 + Y^2$ の累積分布関数を $H(z)$ とおき，Z の確率密度関数を $h(z)$ とおく．

・$z > 0$ のとき，X, Y は互いに独立だから，(X, Y) の同時確率密度関数は $f(x)f(y)$ となること，および，$Z \leqq z \iff X^2 + Y^2 \leqq z$ であることより，

$$\begin{aligned}
H(z) &= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} f(x)f(y)\,dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leqq z} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy \qquad \leftarrow e^a e^b = e^{a+b} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\,drd\theta \qquad \leftarrow \text{極座標に変数変換} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{z}} d\theta \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{z}{2}\right)
\end{aligned}$$

これより，

$$h(z) = H'(z) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

・$z < 0$ のとき，$H(z) = 0$．これより，$h(z) = H'(z) = 0$

以上をまとめると

$$\boldsymbol{h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \exp\left(-\dfrac{z}{2}\right) & (z > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (z < 0 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

34 (1) X は二項分布 $B\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E[X] = n \cdot \frac{1}{6} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{6}}, \qquad V[X] = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\boldsymbol{5n}}{\boldsymbol{36}}$$

(2) Y も二項分布 $B\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから $E[Y] = \dfrac{n}{6}$ が成り立ち，

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \frac{n^2}{36}$$

が導かれる．i, j を $i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i + j \leqq n$ を満たす自然数とする．このとき，$X = i, Y = j$ となる確率 $P(X = i, Y = j)$ は

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= {}_n\mathrm{C}_i \ {}_{n-i}\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} \\ &= \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} \end{aligned}$$

で表される．よって XY の期待値は

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i+j \leqq n} i\, j\ P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i+j \leqq n} i\, j\ \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} \\ &= \sum_{\substack{i \geqq 1,\ j \geqq 1 \\ i+j \leqq n}} \frac{n!}{(i-1)!\, (j-1)!\, (n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} \end{aligned}$$

ここで $i - 1 = k, j - 1 = l$ とおくと，$i \geqq 1, j \geqq 1, i + j \leqq n$ は $k \geqq 0,\ l \geqq 0,\ k + l \leqq n - 2$ となるから

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{\substack{k \geqq 0,\ l \geqq 0, \\ k+l \leqq n-2}} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{k!\, l!\, \{(n-2)-k-l\}!} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1} \left(\frac{4}{6}\right)^{(n-2)-k-l} \\ &= \frac{n(n-1)}{36} \sum_{\substack{k \geqq 0,\ l \geqq 0, \\ k+l \leqq n-2}} \frac{(n-2)!}{k!\, l!\, \{(n-2)-k-l\}!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{4}{6}\right)^{(n-2)-k-l} \\ &\overset{*}{=} \frac{n(n-1)}{36} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{36} \cdot 1 \end{aligned}$$

←等号＊については下記［注］の多項定理を用いた

となる．これより，

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = \boldsymbol{-\frac{n}{36}}$$

が成り立つ.

(3) $V[X] = V[Y] = \dfrac{5n}{36}$ であるから

$$\rho[X,Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} = \frac{-\dfrac{n}{36}}{\dfrac{5n}{36}} = \boldsymbol{-\frac{1}{5}}$$

[注] （**多項定理**）二項定理に対して n を自然数とするとき,

$$(a+b+c)^n = \sum_{i\geqq 0,\, j\geqq 0, i+j\leqq n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} a^i\, b^j\, c^{n-i-j}$$

が成り立つ．これを多項定理という．これは二項定理を使って次のように示すことができる.

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\, a^i (b+c)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\, a^i \left(\sum_{j=0}^{n-i} {}_{n-i}\mathrm{C}_j\, b^j c^{(n-i)-j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!}\, a^i\, b^j\, c^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}\, a^i\, b^j\, c^{n-i-j}
\end{aligned}$$

添え字 i, j の範囲は $i \geqq 0,\ j \geqq 0,\ i+j \leqq n$ とまとめることができる.

これを用いて $E[XY] = \dfrac{n(n-1)}{36}$ となることを次のように証明することもできる.

[**証明**] $p = \dfrac{1}{6},\ q = \dfrac{1}{6},\ r = \dfrac{4}{6}$ とおき，$f(x,y) = (px+qy+r)^n \cdots ①$ とおく．このとき，多項定理より

$$f(x,y)=\sum_{i\geqq 0,\, j\geqq 0,\, i+j\leqq n}\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}(px)^i\,(qy)^j\,r^{n-i-j}$$

が成り立つ．これを x と y で偏微分すると

$$f_{xy}(x,y)=\sum_{i\geqq 0,\, j\geqq 0,\, i+j\leqq n} i\,j\,\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p(px)^{i-1}\,q(qy)^{j-1}\,r^{n-i-j}$$

となるから，この式に $x=y=1$ を代入すると

$$f_{xy}(1,1)=\sum_{i\geqq 0,\, j\geqq 0,\, i+j\leqq n} i\,j\,\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p^i\,q^j\,r^{n-i-j}=E[XY]$$

が成り立つ．ところで①より

$$f_{xy}(x,y)=n(n-1)pq(px+qy+r)^{n-2}$$

であり，これに $x=y=1$ を代入すると $p+q+r=1$ であるから

$$E[XY]=f_{xy}(1,1)=n(n-1)pq=\frac{n(n-1)}{36}$$

が導かれる．

第5章

20 (1)［証明］観測度数が a, b, c, d のクラスの期待度数をそれぞれ，$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ とおくと

$$\hat{a} = \frac{(a+b)(a+c)}{n}, \quad \hat{b} = \frac{(a+b)(b+d)}{n},$$
$$\hat{c} = \frac{(c+d)(a+c)}{n}, \quad \hat{a} = \frac{(c+d)(b+d)}{n}$$

となるから，

$$a - \hat{a} = a - \frac{(a+b)(a+c)}{n} = \frac{a(a+b+c+d) - (a+b)(a+c)}{n} = \frac{ad-bc}{n}$$

同様にして $ad - bc = \delta$ とおくと，

$$b - \hat{b} = \frac{-\delta}{n}, \quad c - \hat{c} = \frac{-\delta}{n}, \quad d - \hat{d} = \frac{\delta}{n}$$

となる．よって χ^2 検定統計量の実現値は

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(a-\hat{a})^2}{\hat{a}} + \frac{(b-\hat{b})^2}{\hat{b}} + \frac{(c-\hat{c})^2}{\hat{c}} + \frac{(d-\hat{d})^2}{\hat{d}} \\
&= \frac{\delta^2}{n}\left(\frac{1}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{(a+b)(b+d)} + \frac{1}{(c+d)(a+c)} + \frac{1}{(c+d)(b+d)}\right) \\
&= \frac{\delta^2}{n}\left(\frac{a+b+c+d}{(a+b)(a+c)(b+d)} + \frac{a+b+c+d}{(c+d)(a+c)(b+d)}\right) \\
&= \frac{\delta^2}{n} \cdot n \cdot \frac{a+b+c+d}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \\
&= \frac{n\delta^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}
\end{aligned}$$

□

(2) 予防接種の効果があるかないかについて帰無仮説を H_0：「効果がない」，対立仮説を H_1：「効果がある」とおき，独立性の検定を行う．観測度数は $a = 4, b = 123, c = 9, d = 264$ であり，5 より小さな数があるのでイェーツの補正が施された検定統計量を用いる．H_0 のもとで

$$\chi^2 = \frac{n\left(|ad-bc| - \frac{n}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

は自由度 $(2-1)(2-1)=1$ の χ^2 分布にしたがう．効果があると χ^2 は大きくなるので右片側検定を用いる．有意水準 5%での棄却域は $\chi^2 \geqq \chi_1^2(0.05) = 3.841$ である．観測度数の表より χ^2 の実現値は $|ad-bc| - \frac{n}{2} = 51 - \frac{400}{2} = -149$ であるから，

$$\chi^2 = \frac{400 \cdot (-149)^2}{127 \cdot 273 \cdot 13 \cdot 387} = 0.0509$$

となり，棄却域に入らない．帰無仮説は棄却されない．よって有意水準 5%で**予防接種の効果があるとはいえない．** □

21 適合度の検定を行う．1 ページ当たりの誤植の数について帰無仮説を H_0：「ポアソン分布にしたがう」，対立仮説を H_1：「ポアソン分布にしたがわない」とおく．1 ページの誤植の数の平均値 λ を観測度数を用いて計算すると

$$\lambda = (0 \times 229 + 1 \times 167 + 2 \times 71 + 3 \times 21 + 4 \times 10 + 5 \times 2) \div 500 = 0.844$$

となるのでこれよりポアソン分布は $Po(\lambda) = Po(0.844)$ とする．H_0 のもとでページ数の観測度数，ポアソン分布の確率と期待度数を表にすると以下のようになる．（電卓または表計算ソフトを用いて計算する）

1 ページの誤植の数	0	1	2	3	4	5	計
ページ数の観測度数	229	167	71	21	10	2	500
ポアソン分布の確率	0.42999	0.36291	0.15315	0.04309	0.00909	0.00154	0.99976
ページ数の期待度数	214.99	181.45	76.574	21.543	4.546	0.767	499.88

ここで 1 ページ当たりの誤植の数が 4 と 5 のクラスは期待度数が 5 以下になるので合併する．

1 ページの誤植の数	0	1	2	3	4 と 5	計
ページ数の観測度数	229	167	71	21	12	500
ページ数の期待度数	214.99	181.45	76.574	21.543	5.3128	499.88
χ^2 の一部の計算	0.9125	1.1514	0.4057	0.01368	8.4171	10.900

この表より，χ^2 の実現値は $\chi^2 = 10.900$ である．H_0 のもとで検定統計量 χ^2

は自由度 $5-1=4$ の χ^2 分布にしたがう．有意水準 5% の右片側検定であるから棄却域は

$$\chi^2 \geqq \chi_4^2(0.05) = 9.488$$

である．χ^2 の実現値はこの棄却域にはいるので帰無仮説は棄却される．**1 ページ当たりの誤植の数はポアソン分布にしたがうとはいえない．** □

22 第 2 種の誤りとは帰無仮説 H_0 が正しくないのに H_0 を採択（受容）してしまう確率である．標本の大きさを n とする．正規母集団（母分散既知 $\sigma = 4$）の母平均 μ に関する右片側検定である．標本平均を $\overline{X}$ とおくと H_0 採択する条件は

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{X}-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \leqq z(0.05) = 1.645 \\
\iff &\overline{X} - 10 \leqq 1.645 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \\
\iff &\overline{X} - 11 \leqq 1.645 \times \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 \\
\iff &\frac{\overline{X}-11}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \leqq 1.645 - \frac{\sqrt{n}}{4}
\end{aligned}$$

である．対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu = 11$ が正しいと考えて上記の確率が 0.1 以下となるための条件は

$$1.645 - \frac{\sqrt{n}}{4} \leqq -z(0.1)$$

である．正規分布の逆分布表より $z(0.1) = 1.282$ であるから，上記の不等式より

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geqq 1.645 + 1.282 \iff n \geqq (4 \times 2.927)^2 = 137.08$$

以上から求める標本の数は **138 以上**あればよい．

付録 A
補　　章

23　証明する前に $B(p,q)$ は，定積分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p>0,\ q>0)$$

で定義されること，および，$B(p,q)=B(q,p)$ であることに注意する．以下，証明する．

［証明］　$f(x)$ は偶関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{2}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\,dx\cdots①$$

となる．ここで，

$$y=\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-1}$$

とおくと，$x^2=n(y^{-1}-1)=ny^{-1}(1-y)$ となり，

$$x=\sqrt{n}(1-y)^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \qquad dx=-\frac{\sqrt{n}}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy$$

が成り立つ．x が 1 から ∞ まで変化するとき，y は 1 から 0 まで変化する．以上より

$$\begin{aligned}①&=\frac{2}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_1^0 y^{\frac{n+1}{2}}(-1)\frac{\sqrt{n}}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\,dy\\&=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)=1\end{aligned}\qquad\square$$

24　［証明］

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}\,dx\cdots①$$

ここで，

$$t = \frac{n}{mx+n}$$

とおくと $mxt = n - nt$ となり

$$x = \frac{n(1-t)}{mt} = \frac{n}{m}(1-t)t^{-1}, \qquad dx = (-1)\frac{n}{m}t^{-2}\,dt$$

が成り立つ．x が 0 から ∞ まで変化するとき，y は 1 から 0 まで変化する．以上より

$$\begin{aligned}
① &= \frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\,\frac{n}{2}\right)}\int_1^0 \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{m}{2}-1}t^{-\frac{m}{2}+1}\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}}(-1)\left(\frac{n}{m}\right)t^{-2}\,dt \\
&= \frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\,\frac{n}{2}\right)}\cdot m^{-\frac{m}{2}}n^{\frac{m}{2}-\frac{m+n}{2}}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{\frac{m}{2}-1}\,dt \\
&= \frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\,\frac{n}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{n}{2},\,\frac{m}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

□

25 (1) ［証明］

$$\varphi(\theta) = E[e^{\theta X}] = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{\theta x_i}$$

であるから，これを θ で微分すると

$$\varphi'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i e^{\theta x_i}, \qquad \varphi''(\theta) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i e^{\theta x_i}$$

この式に $\theta = 0$ を代入すると $e^0 = 1$ であるから

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = E[X], \qquad \varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i = E[X^2]$$

となる．□

(2) $1-p=q$ とおく．整数 k $(0 \leqq k \leqq n)$ について

$$P(X=k) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$$

であるから，二項定理を用いると

$$\varphi(\theta)=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}e^{k\theta}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k (pe^{\theta})^k q^{n-k}=(pe^{\theta}+q)^n$$

となるから，　$\varphi(\theta)=\boldsymbol{\left(pe^{\theta}+(1-p)\right)^n}$　□

(3)　(2) の $\varphi(\theta)$ を微分すると

$$\varphi'(\theta)=n(pe^{\theta}+q)^{n-1}pe^{\theta}$$
$$\varphi''(\theta)=n(n-1)(pe^{\theta}+q)^{n-2}p^2e^{2\theta}+n(pe^{\theta}+q)^{n-1}pe^{\theta}$$

この式に $\theta=0$ を代入すると，($e^0=1,\ p+q=1$ に注意して)

$$\boldsymbol{E[X]}=\varphi'(0)=\boldsymbol{np},\qquad E[X^2]=\varphi''(0)=n(n-1)p^2+np$$

よって，

$$\boldsymbol{V[X]}=E[X^2]-(E[X])^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=\boldsymbol{np(1-p)}\qquad □$$

26　(この問題集の例題 A.4 を参照) (1)　昨年度の内閣支持率 (母比率) を p_1，調査人数 (標本の大きさ) を n_1，標本の支持率（標本比率）を $\hat{P}_1$ とおき，今年度のそれをそれぞれ，p_2, n_2, $\hat{P}_2$ とおく．$n_1=3000,\ n_2=5000$ であり，どちらも十分大きい．

$$\hat{p}_1=\frac{1050}{3000}=0.35,\quad \hat{p}_2=\frac{2050}{5000}=0.41,$$
$$\hat{p}=\frac{n_1\hat{p_1}+n_2\hat{p_2}}{n_1+n_2}=\frac{1050+2050}{3000+5000}=\frac{3100}{8000}=0.3875$$

$\hat{p}$ は昨年度と今年度の標本支持率の平均と考えてよい．いま，帰無仮説 H_0 : $p_2=p_1$ に対し，対立仮説を H_1 : $p_2-p_1>0$ として検定する．帰無仮説 H_0 : $p_2=p_1$ のもとで検定統計量

$$Z=\frac{(\hat{P}_2-\hat{P}_1)-(p_2-p_1)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}}=\frac{\hat{P}_2-\hat{P}_1}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)}}$$

は近似的に $N(0,1)$ にしたがう．T の実現値は

$$t = \frac{0.41 - 0.35}{\sqrt{0.3875 \times 0.6125 \times \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{3000}\right)}} = 5.33 > 1.65 = z(0.05)$$

となるから，H_0 は棄却され，**昨年度に比べて今年度の内閣支持率は上がったといえる．**

(2) 次に昨年度の支持率と今年度の支持率の差 $\delta = p_2 - p_1$ の 95%信頼限界は

$$(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) \pm z(0.025)\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= 0.06 \pm 1.96\sqrt{0.3875 \times 0.6125 \times \left(\frac{1}{3000} + \frac{1}{5000}\right)} = 0.06 \pm 0.022$$

よって，求める支持率の差の 95%信頼区間は　$\mathbf{0.038 \leqq \delta \leqq 0.082.}$　□

27　X, Y の確率密度関数がそれぞれ $f(x), g(y)$ とするとき，$\frac{X}{m}, \frac{Y}{n}$ の確率密度関数はそれぞれ，$mf(x), ng(y)$ となる．よって $Z = \frac{X}{m}\Big/\frac{Y}{n}$ の確率密度関数 $h(z)$ は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} mf(mzt)ng(nt)|t|\,dt$$

と表される．ここで $f(x), g(y)$ は χ^2 分布の確率密度関数であり，それぞれ $x \leqq 0$，$y \leqq 0$ で恒等的に 0 である関数である．m, n は正の整数であるから，$t \leqq 0$ で常に $g(nt) = 0$ である．よって上記の定積分は $t > 0$ で行えばよい．$z \leqq 0$ のとき，$t > 0$ で常に $f(mzt) = 0$ であるから $h(z) = 0$ である．

以下では $z > 0$ の場合を考える．$f(x), g(y)$ はそれぞれ，自由度 m, n の χ^2 分布の確率密度関数であるから

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^{\infty} mf(mzt)ng(nt)t\,dt \\ &= mn\int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(mzt)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{mzt}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(nt)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{nt}{2}}\,t\,dt \\ &= \frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \int_0^{\infty} t^{\frac{m+n}{2}-1}e^{\left(-\frac{mz+n}{2}\right)t}\,dt \cdots ① \end{aligned}$$

となる．ここで，$\frac{mz+n}{2}t = u$ とおくと，

$$t = \frac{2u}{mz+n}, \qquad dt = \frac{2}{mz+n}\,du$$

となる．t が 0 から ∞ まで変化するとき，u も 0 から ∞ まで変化するから

$$\begin{aligned}
① &= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{2u}{mz+n}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-u} \frac{2}{mz+n}\,du \\
&= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \int_0^\infty u^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-u}\,du \\
&= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{m+n}{2}\right) \\
&= \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}}
\end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\boldsymbol{h(z) = \begin{cases} \dfrac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \dfrac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}} & (z > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (z \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

□