第2章　略解

以下，証明問題など数理的な問題を中心に略解を与える．Excel 計算のみの問題や平易な問題の解答は省略する．

2.2　問題 2.2 の略解

2 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ であるから示された．

逆に $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) = 0$ を満たす c は，$c = \bar{x}$ である．何故なら，$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) = 0$ は $\sum_{i=1}^{n} x_i - nc = 0$ に等しく，これを c について解くと，$c = \bar{x}$ となるからである．

3 データの総和は $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i = n\bar{x} + m\bar{y}$. データ数は $n + m$ であるから，その平均は $(n\bar{x} + m\bar{y})/(n + m)$.

4 全ての i に対して，

$$x_{(1)} \leq x_i \leq x_{(n)}$$

が成り立つから，これらの総和を取れば，$nx_{(1)} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq nx_{(n)}$ が得られ，全ての辺を n で割れば求めるものが得られる．

5 総和は (n 人中の) 自宅通学生の総数，平均は (n 人中の) 自宅通学生の比率.

6 $y_1, \cdots, y_n$ を昇順に並べると $ax_{(1)} + b \leq ax_{(2)} + b \leq \cdots \leq ax_{(n)} + b$ となるから，n が奇数のときは，$y_{(\frac{n+1}{2})} = ax_{(\frac{n+1}{2})} + b = aMd + b$ となる．n が偶数のときも同様に考えればよい．

7 (1) は略す．(2) は微分法によって示す．やや高度であるため一般的な証明は他書に譲る．例えば,『不等式への招待』大関信雄・大関清太著（近代科学社）の第 2 部の 1 に様々な証明が紹介されている．(3) は $G \leq \bar{x}$ の両辺の対数を取ることによって得られる．

2.3　問題 2.3 の略解

3 問題 2.2 の 2 で示した等式 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - A)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - A)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - A)^2
\end{aligned}$$

が示される．後は両辺を n で割ればよい．

4 $(x_i - \bar{x})^2$ を展開して，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2.
\end{aligned}$$

5 $x_i - x_j = (x_i - \bar{x}) - (x_j - \bar{x})$ であるから，

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) - (x_j - \bar{x})]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \times \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) + n\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\
&= 2n^2 S^2
\end{aligned}$$

6 $x_i^2 = x_i$ が成り立つから，問題 2.3 の 4 の等式を用いて，

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}^2 = \bar{x} - \bar{x}^2 = \bar{x}(1 - \bar{x}).$$

データの平均は 0.75, 分散は 0.1875.

2.4 問題 2.4 の略解

3 定理 2.2 と 2.3 より，$y_i = ax_i + b$ の平均と分散はそれぞれ $\bar{y} = a\bar{x} + b$ と $S_y^2 = a^2 S_x^2$ であるから，基準化変量は

$$\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} = \frac{(ax_i + b) - (a\bar{x} + b)}{aS_x} = \frac{a(x_i - \bar{x})}{aS_x} = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$$

となる．これは x_i の基準化変量に等しい．

4 定理 2.4 より，基準化変量 z の平均と分散はそれぞれ $\bar{z}=0$ と $S_z^2=1$ である．偏差値は基準化変量を 1 次変換したものであるから，定理 2.2 より，偏差値の平均は $50+10\bar{z}=50$ と求められる．また，定理 2.3 より，分散は $10^2S_z^2=100$，標準偏差は $10S_z=10$ と求められる．

5 $\bar{x}=1/(m+1)$，$S^2=m/(m+1)^2$ であるから，例えば，1 というデータの基準化変量は，

$$\frac{1-\frac{1}{m+1}}{\frac{\sqrt{m}}{m+1}}=\sqrt{m}.$$

よって，m が大きくなるに従って基準化変量は幾らでも大となる (∞ に発散する)．同様にして，0 の基準化変量は $-1/\sqrt{m}$ となるから，m が大きくなるに従って 0 に収束する．

問題 2.5 は計算問題であるから省略する．

2.6　問題 2.6 の略解

1 (1) 後半のみ示す．求める必要十分条件は，(x,y) が，2 点 $(0.9,0.1)$ と $(0.1,0.9)$ を結ぶ線分上に存在することである．(2) 後半のみ示す．求める必要十分条件は，(x,y,z) が，3 点 $(0.8,0.1,0.1)$, $(0.1,0.8,0.1)$, $(0.1,0.1,0.8)$ を結んで得られる 3 角形の内部に存在することである．

3 分配 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ のローレンツ曲線を $(r_1,I_1),(r_2,I_2),\cdots,(r_n,I_n)$ とおく．記号の定義は 57 頁の通りである．分配 $\mathbf{x}'=(x'_1,\cdots,x'_n)$ のローレンツ曲線を $(r_1,I'_1),(r_2,I'_2),\cdots,(r_n,I'_n)$ とおく．r_i の値は共通である．また，$\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x'_i=S$ である．$\mathbf{x}$ のローレンツ曲線が $\mathbf{x}'$ のそれよりも下方にあるとは，

$$I_k\le I'_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つことである．これは

$$\frac{x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(k)}}{S} \leq \frac{x'_{(1)}+x'_{(2)}+\cdots+x'_{(k)}}{S} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

に等しく，分母を払えば,

$$x_{(1)}+x_{(2)}+\cdots+x_{(k)} \quad \leq x'_{(1)}+x'_{(2)}+\cdots+x'_{(k)} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

と同値である．従って $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}'$ と同値である．

2.7 問題 2.7 の略解

2 (1) 次式の通り．

$$\begin{aligned} G &= [x_0^T(1+r)^{1+2+\cdots+T}]^{1/T} \\ &= [x_0^T(1+r)^{T(T+1)/2}]^{1/T} \\ &= x_0(1+r)^{(T+1)/2} \end{aligned}$$

(2) 次式の通り．

$$\begin{aligned} G &= [x_0^T e^{r(1+2+\cdots+T)}]^{1/T} \\ &= [x_0^T e^{rT(T+1)/2}]^{1/T} \\ &= x_0 e^{r(T+1)/2} \end{aligned}$$

第3章　略解

3.2　問題3.2の略解

3 z の平均は $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ であるから，z の分散は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y})]^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})]^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2 \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= S_x^2 + 2S_{xy} + S_y^2
\end{aligned}$$

4 $x_i^* = (x_i - \bar{x})/S_x$，$y_i^* = (y_i - \bar{y})/S_y$ と置くと，これらはそれぞれ x_i と y_i の基準化変量であるから，$\bar{x}^* = 0$ かつ $\bar{y}^* = 0$ である (定理 2.4). 従って，x_i^* と y_i^* の共分散は，注 3.1 より

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^* y_i^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_y}\right)$$

となり，これは x と y の相関係数に等しい (3.2.5 式) .

5 基準化変量は 1 次変換の下で不変である．上で見た通り，相関係数は基準化変量の共分散であるから，1 次変換の下で不変である.

3.3　第 3.3 の略解

3 (1) $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2$ は $\hat{\beta}$ の 2 次関数である．何故なら，$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 = \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$ であるから，$A = \sum_{i=1}^n x_i^2$，$B = \sum_{i=1}^n x_i y_i$，$C = \sum_{i=1}^n y_i^2$ とおけば，

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 = A\hat{\beta}^2 - 2B\hat{\beta} + C$$

と表せるからである．上式は平方完成により，

$$\text{上式} = A(\hat{\beta} - B/A)^2 + C - B^2/A$$

と変形出来るから，$\hat{\beta} = B/A = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$ で最小となる．

(2) 証明は計算．A と B の定義を上と同様とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i \hat{\epsilon}_i &= \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta} x_i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= B - \frac{B}{A} \times A \\
&= B - B \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5 $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ が成り立つから，これを整理すれば，$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$ が得られる．即ち，$(\bar{x}, \bar{y})$ は常に回帰直線上にある．

3.4　第 3.4 節の略解

3 証明のアウトラインを述べる．回帰モデル $x_i = \alpha + \beta z_i + u_i$ を推定したときの残差を $\hat{u}_i$ と置くと，$\hat{u}_i = (x_i - \bar{x}) - \hat{\beta}(z_i - \bar{z})$ である (この表

し方は定理 3.4 の証明の中で導いている）．このとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = (1-r_{xz}^2)\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (1-r_{xz}^2)S_x^2$$

が成り立つ．同様に，回帰モデル $y_i = \gamma + \delta z_i + v_i$ を推定したときの残差を $\hat{v}_i$ と置くと，$\hat{v}_i = (y_i - \bar{y}) - \hat{\delta}(z_i - \bar{z})$ であり，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i^2 = (1-r_{yz}^2)S_y^2$$

が成り立つ．これらを用いて，残差同士の共分散を求める．残差の平均はゼロであるから，注 3.1 より，共分散は $(1/n)\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i\hat{v}_i$ と書ける．ここで，$\hat{\beta} = S_{xz}/S_z^2$，$\hat{\delta} = S_{yz}/S_z^2$ を利用すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i\hat{v}_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})-\hat{\beta}(z_i-\bar{z})][(y_i-\bar{y})-\hat{\delta}(z_i-\bar{z})] \\ &= S_{xy} - \frac{S_{xz}S_{yz}}{S_z^2}\end{aligned}$$

であるから，残差 $\hat{u}_i$ と $\hat{v}_i$ の相関係数は，

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i\hat{v}_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{v}_i^2}} = \frac{S_{xy}-\frac{S_{xz}S_{yz}}{S_z^2}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)S_x^2}\sqrt{(1-r_{yz}^2)S_y^2}}$$

となり，これを整理すれば求めるものが得られる．

第4章　略解

4.1　問題4.1の略解

1 A の勝ちを 1，B の勝ちを -1，あいこを 0 で表す.

(1) 標本空間を Ω で表す.

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{(i,j,k) \mid i,j,k=-1,0,1\} \\
&= \{(1,1,1),(1,1,0),(1,1,-1), \\
&\quad (1,0,1),(1,0,0),(1,0,-1), \\
&\quad (1,-1,1),(1,-1,0),(1,-1,-1), \\
&\quad (0,1,1),(0,1,0),(0,1,-1), \\
&\quad (0,0,1),(0,0,0),(0,0,-1), \\
&\quad (0,-1,1),(0,-1,0),(0,-1,-1), \\
&\quad (-1,1,1),(-1,1,0),(-1,1,-1), \\
&\quad (-1,0,1),(-1,0,0),(-1,0,-1), \\
&\quad (-1,-1,1),(-1,-1,0),(-1,1,-1)\}
\end{aligned}
$$

(2) A が 2 回勝つ事象は，１が２つ含まれる事象であるから，

$$\{(1,1,0),(1,1,-1),(1,0,1),(1,-1,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$$

(3) 引き分けが 2 回以上の事象は，0 が 2 つ以上含まれる事象であるから，

$$\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1),(0,0,0)\}$$

(4) B が続けて 2 回勝つ事象は，

$$\{(1,-1,-1),(0,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,-1,0)\}$$

(5) A と B が 1 回ずつ勝つ事象は，

$$\{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-1),(0,-1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

2 (1) 易しいので略す.

(2) $A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{20$ 歳以上 $\}$，$(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap B_1 = \{20$ 歳以上の男性 $\}$

(3) $A_1 \cap B_2 = \{20$ 歳未満の女性 $\}$，$A_2 \cap B_2 = \{20$ 歳以上 40 歳未満の男性 $\}$

(4) 易しいので略す.

3 (1) 求める事象は

$$\begin{aligned}&\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 6\}\\&= \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}\end{aligned}$$

(2) 求める事象は

$$\{(i,j) \mid |i-j| = 1\} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

(3) 求める事象は

$$\{(i,i) \mid i = 1,2,3,4,5,6\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

(4) 求める事象は

$$\begin{aligned}&\{(i,j) \mid |i-j| \geq 3\}\\ &= \{(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3)\}\end{aligned}$$

4.2 問題 4.2 の略解

1 確率の条件 (P3) から (P3*) を導く．

(P3) が成り立つとする．このとき，$A_1 = A$，$A_2 = B$ とし，$A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ と置くと，$A_1, A_2, \cdots$ は全て互いに排反である．したがって，(P3) より，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

が成り立つ．ここで，$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = A \cup B$ であるから，左辺は $P(A \cup B)$ に等しい．他方，(P2) より $P(\emptyset) = 0$ であるから，右辺は $P(A) + P(B)$ に等しい．よって (P3*) が示された．すなわち，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が示された．

(P3*) と (P3**) が同値であることを示す．まず，(P3*) から (P3**) を導く．$A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに排反であるとする．このとき，$A = A_1$，$B = A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と置けば，A と B は排反となるから，(P3*) より，

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B)\\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup \cdots \cup A_n)\end{aligned}$$

が得られる．同じやり方で，右辺の第 2 項が，$P(A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_2) + P(A_3 \cup \cdots \cup A_n)$ と書けることが示せる．このプロセスを続けることにより，(P3**) が得られる．

次に，(P3**) から (P3*) を導けることは明らかである．よって (P3*) と (P3**) が同値であることが示された．

2 (1)

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

(2) $P(B) = 11/36$ と $P(A \cap B) = 5/36$ より，$P(A|B) = \frac{5}{36}/\frac{11}{36} = 5/11$.
(3) 同様に $P(A|C) = 1/2$.

3 答のみ．(1) $1/2^5 = 1/32$, (2) ${}_5C_3/2^5 = 5/16$, (3) $2/2^5 = 1/16$

4 ヒントのみ．(1) $0.8^2 \times 0.2$, (2) $1 - 0.8^{10}$，(3) $(1 - 0.8^5)/(1 - 0.8^{10})$, (4) $0.8^2[0.2 + 0.8 \times 0.2 + 0.8^2 \times 0.2 + \cdots]$

5 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ の両辺を $P(B)$ で割ることにより，$P(A|B) = P(A)$ を得る．逆に，$P(A|B) = P(A)$ の両辺に $P(B)$ を掛けることにより，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を得る．

6 (4.2.23) が成り立つときに，A と B が独立であることを示す．

$$\begin{aligned} (4.2.23) \quad &\Rightarrow \quad P(A \cap B)P(B^c) = P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Rightarrow \quad P(A \cap B)[1 - P(B)] = P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Rightarrow \quad P(A \cap B) = [P(A \cap B) + P(A \cap B^c)]P(B) \\ &\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

であるから示された.

7 A と B は独立とする．すなわち，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つとする．このとき，

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\{1 - P(B)\} \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

であるから，A と B^c は独立である．

8 (1) 公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ において，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を使うと $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ が成り立ち，$P(B)$ について整理すれば,

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0.6 - 0.4}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

(2) 公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ を使うと，$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.6 - 0.4 = 0.2$.

(3)$0.2 = P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ より，$P(A \cap B) = 0.2 \times P(A) = 0.08$. したがって， 公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ を $P(B)$ について解いて,

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.08 = 0.28.$$

9 袋A，B，Cを選ぶという事象をそれぞれ A, B, C で表すと，袋の選び方は無作為であるから,

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

である．また，白球を取りだすという事象を W，赤球を取りだすという事象を R で表すと，

$$
\begin{aligned}
&P(W|A) = 3/10,\ P(R|A) = 7/10,\\
&P(W|B) = 5/10,\ P(R|B) = 5/10,\\
&P(W|C) = 7/10,\ P(R|C) = 3/10
\end{aligned}
$$

である．求める確率は $P(A|W)$ であるから，ベイズの定理より，

$$
\begin{aligned}
P(A|W) &= \frac{P(W|A)P(A)}{P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)}\\
&= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

10 (1) $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1$, $P(B|A^c) = 1/3$.

(2) $P(A|B)$ を求める．ベイズの定理より，

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}\\
&= \frac{1 \times \frac{1}{4}}{1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(3) 上問において，$P(A) = 1/100$, $P(B|A) = 1$, $P(B|A^c) = 1/100$ とすればよい．$P(A|B) = 100/199$.

11 ウイルスに感染しているという事象を A で表し，陽性と判定されるという事象を B で表すと，題意より，$P(A) = 0.0004$，$P(B|A) = 0.998$,

$P(B|A^c) = 0.002$ である．求める確率は $P(A|B)$ であるから，ベイズの定理より，

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{0.998 \times 0.0004}{0.998 \times 0.0004 + 0.002 \times 0.9996} \\ &= 0.166 \end{aligned}$$

4.3 問題 4.3 の略解

1 和の計算は第 1.3 節の公式を用いる．

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

同様に，

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.$$

また，定理 4.8 の公式 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$ より，

$$\mathrm{V}(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}.$$

2 (1) $\mathrm{E}(X) = 100 \times 0.5 + 500 \times 0.5 = 300$(万円)，$\mathrm{E}(Y) = 100 \times p + 200 \times p + 300 \times (1-4p) + 400 \times p + 500 \times p = 300$(万円)．したがって，期待値の意味では同等である．(2) $\mathrm{E}(X^2) = 100^2 \times 0.5 + 500^2 \times 0.5 = 130000$ であるから，$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$ より，

$$\mathrm{V}(X) = 130000 - 300^2 = 40000.$$

同様に，$\mathrm{V}(Y) = 100000p$．条件より，$0 \leq p \leq 1/4$ なので，$\mathrm{V}(Y) \leq \mathrm{V}(X)$ である．したがって，X の方が分散が大きく，ハイリスクである．
(3) 方法 C で投資したときの取得金額を Z で表す．p と q は $p+q \leq 1/2$ なる条件を満たさねばならない．このとき，上と同様に計算すれば，$\mathrm{E}(Z) = 300$ ，$\mathrm{V}(Z) = 80000p + 20000q$ となる．$p + q \leq 1/2$ という条件の下で $\mathrm{V}(Z)$ は $p = 1/2$ かつ $q = 0$ のとき最大であり，最大値は 40000 である．この場合も $\mathrm{V}(Z) \leq \mathrm{V}(X)$ が成り立つ．

3 Y の分布を求める．Y の値域は $\{0, 1, 4, 9\}$ であり，

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(X = 0) = 0.2, \\
P(Y = 1) &= P(X = -1) + P(X = 1) = 0.4, \\
P(Y = 4) &= P(X = -2) + P(X = 2) = 0.2, \\
P(Y = 9) &= P(X = -3) + P(X = 3) = 0.2
\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{E}(Y) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 4 \times 0.2 + 9 \times 0.2 = 3.$$

同様にして，$\mathrm{E}(Y^2) = 19.8$ だから，$\mathrm{V}(Y) = 19.8 - 3^2 = 10.8$.

4 易しいので略す．

5 $\mathrm{V}(X) = 13 - 3^2 = 4$ であるから，$\mathrm{D}(X) = 2$ である．$\mu = 3, \sigma = 2$ とおけば $-2 \leq X \leq 8$ は $\mu - 2.5\sigma \leq X \leq \mu + 2.5\sigma$ と書けるので，チェビシェフの不等式より，

$$P(\mu - 2.5\sigma \leq X \leq \mu + 2.5\sigma) \geq 1 - \frac{1}{(2.5)^2} = 0.84.$$

4.4 問題 4.4 の略解

1 X の分布は 2 項分布 $B(10, 0.3)$. Excel 計算は略す．

2 (1) のみ．m を固定し，$P(X \leq m) = \sum_{x=0}^{m} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ を p の関数とみて $g(p)$ と置く．各 m に対して，$g(p)' \leq 0$ が成立することを示せばよい．

まず，$m = n$ のときは，$P(X \leq n) = 1$ であるから，$g(p)$ は恒等的に 1 である．従ってこのときは $g'(p) = 0$ が成り立つ．

簡単な計算により，

$$\begin{aligned} g'(p) &= \sum_{x=0}^{m} {}_nC_x [p^x (1-p)^{n-x}]' \\ &= \sum_{x=0}^{m} [x - np]_n C_x p^{x-1} (1-p)^{n-x-1} \\ &= \sum_{x=0}^{m} [x - np] Q_x \quad \text{但し}, Q_x = {}_nC_x p^{x-1} (1-p)^{n-x-1} \end{aligned}$$

ここで，p や x の値に関わらず，$Q_x \geq 0$ であることに注意する．整数 ℓ を $\ell \leq np < \ell + 1$ なるものとする．このとき，

$$g'(p) = \sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x + \sum_{x=\ell+1}^{m} [x - np] Q_x$$

であるから，第 1 項 ≤ 0，第 2 項 ≥ 0 が成立する．従って，$m \leq \ell$ なるときは（第 2 項がないから）$g'(p) \leq 0$ である．次に，$m \leq \ell + 1$ のときを考える．$g'(p) \leq 0$ は，

$$\sum_{x=\ell+1}^{m} [x - np] Q_x \leq -\sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x$$

に等しいので（両辺とも非負であることに注意），上式を示せばよい．左辺の各項は非負であるから，$m = n$ のときを示せば十分である．即ち，

$$\sum_{x=\ell+1}^{n} [x - np] Q_x \leq -\sum_{x=0}^{\ell} [x - np] Q_x$$

を示せばよい．そしてこれは明らかである．何故なら，$m = n$ のときは（上で述べた通り）$g'(p) = 0$ であり，それは $\sum_{x=\ell+1}^{n}[x - np]Q_x = -\sum_{x=0}^{\ell}[x - np]Q_x$ を意味するからである．(証明終)

1 つ便利な等式があり，それを経由して示すことも出来る．

$$P(X \geq r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^{n-r}\mathrm{d}x \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

なる等式は確率計算の際にしばしば利用される（証明は関連図書 [10](p129)）．ここで右辺を見ると，p は積分範囲にしか現れず，しかも被積分関数は非負であるから，右辺は p の増加関数である．従って，$m = r - 1$ として，$P(X \leq m)$ は p の減少関数である．

3 $X \sim B(n, p)$ とする．$Y = y$ は $n - X = y$ に等しく，したがって $X = n - y$ に等しい．よって

$$P(Y = y) = P(X = n-y) = {}_nC_{n-y}p^{n-y}(1-p)^{n-(n-y)} \quad (y = 0, 1, \cdots, n).$$

ここで，$q = 1 - p$ とおき，${}_nC_{n-y} = {}_nC_y$ に注意すると，上式は

$$P(Y = y) = {}_nC_y q^y (1-q)^{n-y} \quad (y = 0, 1, \cdots, n)$$

と表せる．これは，$Y \sim B(n, q)$ であることを表している．

4 $np = 10$，$np(1-p) = 6$ を n, p について解けばよい．$p = 0.4$, $n = 25$ が得られる．従って，求める分布は $B(25, 0.4)$.

6 $1000 \times 0.002 = 2$ であるから，求める分布は $Po(2)$. Excel 計算は省略.

7 $P(B) = {}_5C_3p^3(1-p)^2$．他方，$A \cap B = \{1$ 回目は表，残る 4 回のうち 2 回表が出る $\}$ であるから，$P(A) = p \times {}_4C_2p^2(1-p)^2$. したがって，

$$P(A|B) = \frac{p \times {}_4C_2p^2(1-p)^2}{{}_5C_3p^3(1-p)^2} = \frac{{}_4C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}.$$

10 $P(X=a+b|X>b)=P(X=a)$ において，$b=1$ と置くと，$P(X=a+1|X>1)=P(X=a)$ $(a=1,2,\cdots)$ が得られる．条件付確率の定義より，$P(X=a+1)=P(X=a)P(X>1)$ が得られるから，数列 $P(X=1),P(X=2),\cdots$ は初項 $p=P(X=1)$，公比 $P(X>1)=1-p$ の幾何数列である．よって，$P(X=a)=p(1-p)^{a-1}$ $(a=1,2,\cdots)$ となる．

12 定理 4.11 と基本的に同様である．{ 最初の n_1 回は C_1 が生じ，次の n_2 回は C_2 が生じ，$\cdots$，最後の n_k 回は C_k が生じる } という事象の確率は $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ である．各 C_i が n_i 回生じる組み合わせは全部で $n!/(n_1!n_2!\cdots n_k!)$ 通りあり，これらは全て同じ確率 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ であるから，

$$P(\{C_i\text{が } n_i\text{回生じる } (i=1,2,\cdots,k)\})=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}.$$

4.5 問題 4.5 の略解

1 期待値の定義より，

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

同様に，

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}.$$

よって，$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=(\alpha-\beta)^2/12.$

2

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x(1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 0.\end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{E}(2X+5) = 2\mathrm{E}(X)+5 = 5$. また，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{V}(X) = 1/6 - 0^2 = 1/6$.

3 全積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ となるように a を定める．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = a\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = a[x^3/3]_0^1 = a/3$$

なので，$a = 3$.

$$P(X > 1/2) = 3\int_{1/2}^{1} x^2\mathrm{d}x = 3[x^3/3]_{1/2}^{1} = 7/8.$$

5 $Z = (X-50)/10$ とおくと，$Z \sim N(0,1)$.

$$P(70 \le X) = P\left(\frac{70-50}{10} \le \frac{X-50}{10}\right) = P(2 \le Z) = 1-\Phi(2) = 0.023.$$

同様にして，$P(40 \le X \le 60) = P(-1 \le Z \le 1) = 0.683$. $P(X \le 55) = P(Z \le 0.5) = 0.691$.

6 ビスの直径を X とすれば，$X \sim N(2.7998, (0.0005)^2)$ となるから，$Z = (X - 2.7998)/0.0005 \sim N(0,1)$ である．合格の確率は，

$$\begin{aligned} P(2.7993 \le X \le 2.8007) &= P\left(\frac{2.7993 - 2.7998}{0.0005} \le Z \le \frac{2.8007 - 2.7998}{0.0005}\right) \\ &= P(-1 \le Z \le 1.8) = \Phi(1.8) - \Phi(-1) \\ &= 0.964 - 0.159 = 0.805. \end{aligned}$$

したがって，不合格の確率は 0.195.

7 一般に $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ならば，$P(X \ge \mu + 1.64\sigma) = 0.05$ であるから，在庫量は $\mu + 1.64\sigma = 200 + 1.64 \times 25 = 241$ 以上あればよい．

9 (1) $X \sim N(64, 13^2)$ とおくと，$Z = (X - 64)/13 \sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(44 \le X \le 84) &= P\left(\frac{44 - 64}{13} \le Z \le \frac{84 - 64}{13}\right) = \Phi(1.54) - \Phi(-1.54) \\ &= 0.938 - 0.062 = 0.876 \end{aligned}$$

(2) 一般に，$P(1.64 \le Z) = 0.05$ であるから，$64 + 1.64 \times 13 = 85.3$ 点以上．(3) $P(X \le 40) = P(Z \le -1.85) = \Phi(-1.85) = 0.032$ であるから，下位 3.2%である．

10 20(人/時) $= \frac{1}{3}$(人/分) であるから，$X \sim Ex(1/3)$ である．したがって，$\mathrm{E}(X) = 3$(分/人)，$P(X \ge 5) = 1 - P(X < 5) = e^{-5/3} = e^{-5/3} = 0.189$.

11 求める確率は開店時間から 5 分以内に客が到着した確率であるから，$X \sim Ex(1/12)$ とし, $P(X \le 5) = 1 - e^{-5/12} = 0.341$ が答である．

12 $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ を用いると，

$$\begin{aligned} P(X > a+b | X > b) &= \frac{P(X > a+b, X > b)}{P(X > b)} \\ &= \frac{P(X > a+b)}{P(X > b)} \\ &= e^{-(a+b)} e^{-b} = e^{-a} \\ &= P(X > a) \end{aligned}$$

となり示される．定理 4.24 を示す．$X \sim E_x(\lambda)$ とする．

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y e^{-y} \mathrm{d}y.$$

ただし，$y = \lambda x$ と変数変換した．このとき，$\mathrm{d}x = (1/\lambda)\mathrm{d}y$. 部分積分によって，

$$\int_0^\infty y e^{-y} \mathrm{d}y = [-y e^{-y}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} \mathrm{d}y = 0 + [-e^{-y}]_0^\infty = 1$$

るから，$\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$ が分かった．以下は略す．

第5章　略解

5.1　問題5.1の略解

1 (1) X の周辺分布は，$P(X=-1)=0.3$, $P(X=0)=0.4$, $P(X=1)=0.3$. よって，$\mathrm{E}(X)=-1\times 0.3+0\times 0.4+1\times 0.3=0$, $\mathrm{V}(X)=0.6$.

(2) Y の周辺分布は，$P(X=-1)=0.4$, $P(X=0)=0.2$, $P(X=1)=0.4$. よって，$\mathrm{E}(Y)=-1\times 0.4+0\times 0.2+1\times 0.4=0$, $\mathrm{V}(X)=0.8$.

(3) $\mathrm{E}(XY)=(-1)\times(-1)\times 0.1+(-1)\times 0\times 0.1+\cdots+1\times 1\times 0.1=0$ であるから，$\mathrm{C}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=0$, $\rho_{XY}(X,Y)=0$

2 (1) X の周辺分布は，$P(X=0)=2/5$, $P(X=1)=1/5$, $P(X=2)=2/5$. Y の周辺分布は，$P(Y=1)=2/5$, $P(Y=2)=1/5$, $P(Y=3)=2/5$. (2) $\mathrm{E}(X)=0\times 2/5+1\times 1/5+2\times 2/5=1$,$\mathrm{E}(X^2)=9/5$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=4/5$. (3) $\mathrm{E}(Y)=1\times 2/5+2\times 1/5+3\times 2/5=2$ であるから，

$$\mathrm{E}(XY)=0\times 1\times 3/20+0\times 2\times 1/10+\cdots+1\times 3\times 3/20=2$$

と合わせて，

$$\mathrm{C}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=2-1\times 2=0$$

(4) 独立に非ず．例えば，$P(X=1,Y=2)\neq P(X=1)P(Y=2)$ から分かる．

3 略す.

4 (1) $P(Y=250|X=90)=1/7$, $P(Y=300|X=90)=2/7$, $P(Y=350|X=90)=4/7$. (2) $\mathrm{E}(Y|X=90)=\sum_{y=250,300,350} yP(Y=y|X=90)=2250/7=321.4$. (3) $P(Y=250|X=110)=P(Y=300|X=110)=P(Y=350|X=110)=1/3$. (4) $\mathrm{E}(Y|X=110)=900/3=300$.

5 (1) 起こりうる結果を C_i と「C_i 以外」に分けて考えれば，X_i は 2 項分布 $B(n,p_i)$ に従うから，$\mathrm{E}(X_i)=np_i$. (2) 前問と同様に $\mathrm{V}(X_i)=np_i(1-p_i)$. (3) 多項分布の積率母関数 (関連図書 [6] などを参照されたい) は

$$\phi(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\mathrm{E}\{e^{t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_kX_k}\}=(p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+\cdots+p_ke^{t_k})^n$$

であり，これより，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t_1\partial t_2}(0,0,\cdots,0)=n(n-1)p_1p_2$$

であるから，$\mathrm{E}(X_1X_2)=n(n-1)p_1p_2$. よって，$\mathrm{C}(X_1,X_2)=\mathrm{E}(X_1X_2)-\mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)=n(n-1)p_1p_2-(np_1)(np_2)=-np_1p_2$. 従って，$\mathrm{C}(X_i,X_j)=-np_1p_2$.

5.2 第 5.2 節の解答

1. (1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n}$

   (2) $f(1,1,1,0,0)=p^3(1-p)^2$.

2. 第 i 日目の X_i は互いに独立に同一のポアソン分布 $P_O(3)$ に従うとする．このとき，$P(X_i\le 4)=0.815$.

(1) $P(X_1 \leq 4, X_2 \leq 4, X_3 \leq 4, X_4 \leq 4, X_5 \leq 4) = \prod_{i=1}^{5} P(X_i \leq 4) = (0.815)^5 = 0.360.$

(2) $X \sim B(5, 0.815)$ と置くと，求める確率は，$P(X = 3) = 0.185.$

3. (1)

$$P(X_i \leq z) = \begin{cases} 1 & (1 < z) \\ z & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

であるから，

$$P(Z \leq z) = P(X_1 \leq z, X_2 \leq z, \cdots, X_n \leq z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq z) = \begin{cases} 1 & (1 < z) \\ z^n & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

となる.

(2)

$$f(z) = \begin{cases} nz^{n-1} & (0 \leq z \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外のz}). \end{cases}$$

4. (1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} & (0 \leq x_1, x_2, \cdots, x_n \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} {}_nC_{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}.$

(3) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} & (0 < x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

5.3　第 5.3 節の解答

1. $\mathrm{E}(T) = 0$ であるから，$\mathrm{C}(Z, T) = \mathrm{E}(ZT)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ZT) &= \mathrm{E}\{(X+Y)(X-Y)\} = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) \\ &= \mathrm{V}(X) - \mathrm{V}(Y) = 0.\end{aligned}$$

2. $\mathrm{E}(X) = (a+b)/2, \mathrm{E}(Y) = (c+d)/2$ であるから，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = (a+b)(c+d)/4$. $\mathrm{E}(X^2) = (b^2+ba+a^2)/3, \mathrm{E}(Y^2) = (d^2+dc+c^2)/3$ であるから，$\mathrm{E}(X^2Y^2) = \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2) = (b^2+ba+a^2)(d^2+dc+c^2)/9$. $\mathrm{V}(XY) = \mathrm{E}(X^2Y^2) - [\mathrm{E}(XY)]^2 = (b^2+ba+a^2)(d^2+dc+c^2)/9 - (a+b)^2(c+d)^2/16$.

3. $\mathrm{E}(X) = 6\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = 1/2$. $\mathrm{E}(1/Y) = 6\int_0^1 (1-y)\mathrm{d}y = 3$. ゆえに，$\mathrm{E}(X/Y) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(1/Y) = 3/2$. ($\mathrm{E}(X/Y) \neq \mathrm{E}(X)/\mathrm{E}(Y)$ であることに注意!)

5.4　第 5.4 節の解答

1. $X_i \sim N(60, 8^2)$, $Y_i \sim N(50, 6^2)$ とおく.

   (1) 定理 5．13 より，求める分布は，$T = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 \sim N(280, 264)$.

   (2) $P(T > 300) = P(Z > (300-280)/264) = 1 - \Phi(1.23) = 0.109$.

   (3) 略す.

2. $\bar{X} \sim N(3.2,\ (0.4)^2/16) = N(3.2,\ (0.1)^2)$. ゆえに，$Z = (\bar{X}-3.2)/0.1 \sim N(0,1)$.　これより，$P(\bar{X} \leq 3.35) = P[(\bar{X}-3.2)/0.1 \leq (3.35-3.2)/0.1) = P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.933$.

3. 同様に考えて，$\Phi(-1.58) = 0.06$.

4. $X_1, X_2, \cdots, X_{10000}$ は互いに独立に同一のベルヌーイ分布 $Ber(0.5)$ に従うとする．求める確率は $P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515)$ である．$\mathrm{E}(\bar{X}) = 0.5$, $\mathrm{V}(\bar{X}) = 0.000025$, $\mathrm{D}(\bar{X}) = 0.005$ である．(1)$P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515) = P(0.5-3\times0.005 \leq \bar{X} \leq 0.5+3\times0.005) \geq 1-(1/3)^2 = 8/9$. (2) 近似的に $\bar{X} \sim N(0.5, (0.005)^2)$ であるから，$Z = (\bar{X} - 0.5)/0.005 \sim N(0, 1)$. よって，$P(0.485 \leq \bar{X} \leq 0.515) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0.997$.

5. 不良品であることを 1，不良品でないことを 0 で表す．$X_1, X_2, \cdots, X_{600}$ は互いに独立に同一のベルヌーイ分布 $Ber(0.1)$ に従うとする．このとき，中心極限定理より，近似的に $\bar{X} \sim N(0.1, 0.1\times0.9/600) = N(0.1, 0.00015)$. よって，不良品数 $X = 600\bar{X}$ の分布は $N(60, 54)$ で表される．(1) 求める確率は，$P(50 \leq X) = P[(50-60)/\sqrt{54} \leq Z] = P(-1.36 \leq Z) = 0.913$. (2) $P(60 - 1.64\sqrt{54} \leq X \leq 60 + 1.64\sqrt{54}) = 0.9$ であるから，$c = 1.64\sqrt{54} = 12.09$. およそ 12 個.

6. $\bar{X} \sim N(5, 5/120)$ であるから，$c = 1.96\sqrt{5/120} = 0.40$.

7. 分布 F の平均を μ，分散を σ^2 で表せば，求める正規分布は $N(\mu, \sigma^2/100$ となる．(1)$\mu = 1/4$, $\sigma^2 = 1/16$ であるから，$N(1/4,\ 1/1600) = n(0.25, (0.025)^2)$. (2)$\mu = \theta/2$, $\sigma^2 = \theta^2/12$ であるから，$N(\theta/1, \theta^2/1200)$. (3)$\mu = 1/2$, $\sigma^2 = 1/20$ であるから，$N(1/2,\ 1/2000) = N(0.5, 0.0005)$.

8. (1) $\mathrm{E}(X_i^2) = \sigma^2+\mu^2$ であるから，$\mathrm{E}(Y_i) = \sigma^2+\mu^2$．よって，大数法則より，$\bar{Y} \to_p \sigma^2+\mu^2$ となる．$U = \bar{Y}$ であるから，求めるものが示された. (2)$f(x) = x^2$ と置く．これは連続．$\bar{X} \to_p \mu$ であるから，注 5.6 の (5) より，$\bar{X}^2 = f(\bar{X}) \to_p f(\mu) = \mu^2$. (3) $U \to_p \sigma^2+\mu^2$, $\bar{X}^2 \to_p \mu^2$ であるから，$U - \bar{X}^2 \to_p (\sigma^2+\mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$. (4) $s^2 = c_n S^2 \to_p 1\times\sigma^2 = \sigma^2$ である.

第6章　略解

6.2　第6.2節の略解

1. 易しい.

   (1) 定理 6.1 より，$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$, $\mathrm{V}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

   (2) 定理 6.2 より，$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$.

2. 上問と同様である.

   (1) 定理 6.1 より，$\mathrm{E}(\bar{X}) = 1/\lambda$, $\mathrm{V}(\bar{X}) = 1/(\lambda^2 n)$.

   (2) 定理 6.2 より，$\mathrm{E}(s^2) = 1/\lambda^2$.

3. (1) 定理 6.1 より，$\mathrm{E}(\bar{X}) = p$, $\mathrm{V}(\bar{X}) = p(1-p)/n$.

   (2) 定理 6.2 より，$\mathrm{E}(s^2) = p(1-p)$.

   (3) 注 6.1 を根拠に 0.3 と推定される.

   (4) 問題 2.3 の 6 で示した通り，$S^2 = \bar{X}(1-\bar{X})$ であり，また，$s^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ であるから，答が出る.

   (5) 注 6.1 を根拠に $s^2 = (20/19) \times 0.3 \times 0.7 = 0.22$ で推定される.

4. 易しいので略す.

5. 略す.

6.3　第 6.3 節の略解

1. (1) 定義より，$\chi^2(3)$.

   (2) (6.3.4) より，$\mathrm{E}(Y) = 3$, $\mathrm{V}(Y) = 6$.

   (3) $P(Y \leq 1) = 0.608$,$P(3-\sqrt{6} \leq Y \leq 3+\sqrt{6}) = 0.766$, $P(3-2\sqrt{6} \leq Y \leq 3+2\sqrt{6}) = 0.952$.

4 σ^2 の 90%信頼区間は $[19s^2/30.14,\ 19s^2/10.12] = [24.2, 74.2]$, μ の 90%信頼区間は $[169 \pm 1.73 \times 6.2/\sqrt{19}] = [166.5,\ 171.5]$

5 μ の 95%信頼区間は $[20 \pm 2.028 \times \sqrt{25/37}] = [18.3,\ 21.7]$, σ^2 の 95%信頼区間は $[36s^2/54.4,\ 36s^2/21.3] = [16.5,\ 42.2]$.

6.4　第 6.4 節の略解

1. 定理 6.5 より，

$$T \sim N\left(20-30, \frac{25}{40}+\frac{36}{30}\right) = N(-10, 1.825),$$

   従って，$\mathrm{E}(T) = -10$, $\mathrm{V}(T) = 1.825$.

2. (1) (6.4.4) 式より，$\mu_1 - \mu_2$ の 95%信頼区間は

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{X}-\bar{Y}) \pm 1.96\sqrt{100\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{25}\right)}\right] \\ = & \left[(60-66) \pm 1.96\sqrt{100\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{25}\right)}\right] \\ = & [-11.38, -0.69] \end{aligned}$$

   と求められる．信頼区間には 0 が含まれ，2 つの試験方式の間には差があるとは言えない．

(2) (6.4.4) 式より，プールされた分散は

$$s^2 = \frac{1}{53}\{29s_1^2 + 24s_2^2\} = 121.7.$$

例 6.12 と同様に議論して，$\mu_1 - \mu_2$ の 95%信頼区間は

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{0.025}(53)\sqrt{s^2\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25}\right)}\right] \\ = & \left[(60 - 66) \pm 2.006\sqrt{121.7\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25}\right)}\right] \\ = & [-11.99, -0.01] \end{aligned}$$

信頼区間には 0 が含まれず，2 つの試験方式の間には差があると言える．

(3) 例 6.14 と同様に議論して，$\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ の 95%信頼区間は，$\hat{\theta} = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ と置けば

$$\left[\hat{\theta}/2.22,\ \hat{\theta}/0.46\right] = [0.56/2.22,\ 0.56/0.46] = [0.25, 1.21].$$

3. (6.4.10) 式の Z は標準正規分布に従う．また，定理 6.7(2) より $Y = (m+n-2)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$ である．同定理 (3) より Z と Y は独立となるから，t 分布の定義より，

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/(m+n-2)}} \sim t(m+n-2)$$

が成り立つ．ここで，Z と Y の定義を代入すれば，

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/(m+n-2)}} = \frac{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(1/m+1/n)}}}{\sqrt{\frac{(m+n-2)s^2/\sigma^2}{m+n-2}}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s^2(1/m+1/n)}}$$

であることが分かる．

5 (1) $F = \frac{Y_1/10}{Y_2/10} = \frac{Y_1}{Y_2}$ と置くと，$F \sim F(10, 10)$ であり，$P(Y_1 \leq Y_2) = P(F \leq 1) = 0.5$.

(2) $F = \frac{Y_1/10}{Y_2/20} = \frac{2Y_1}{Y_2}$ と置くと，$F \sim F(10, 20)$ であり，$P(Y_1 \leq Y_2) = P(F \leq 2) = 0.91$.

第7章　略解

7.1　第7.1節の略解

1. $2 \times 2.58\sqrt{16/n} \leq 3$ を解いて，$n \geq 48$.

2. (1) 定理 7.1 より，$[\bar{X} \pm 2.023\sqrt{s^2/40}] = [55 \pm 2.023\sqrt{146.6/40}] = [51.1, 58.9]$. (2) 定理 7.2 より，$[39s^2/58.1,\ 39s^2/23.7] = [98.2, 241.4]$.

3. (1) $[\bar{X} \pm 2.160\sqrt{s_1^2/14}] = [44.2 \pm 2.160\sqrt{4.2/14}] = [43.0, 45.4]$. (2) $[13s_1^2/24.7,\ 13s_1^2/5.0] = [2.2, 10.9]$. (3) 定理 7.4 を用いる．プールされた分散は $s^2 = [13s_1^2 + 9s_2^2]/22 = 5.1$. $[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm 2.074\sqrt{s^2(1/14 + 1/10)}] = [-7.34, -3.46]$.

4. (1) 定理 7.5 より，$[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/200}] = [0.075, 0.165]$. (2) $2 \times 1.96\sqrt{1/4n} \leq 0.1$ を解いて，$n \geq 384$.

5. (1) と (2) は略．(3) 分布は，$N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{100} + \frac{p_2(1-p_2)}{150}\right)$. 信頼区間は，$[(\bar{X} - \bar{Y}) \pm 1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{150}}] = [0.430, 0.636]$.

6. 定理 7.6 より，$[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}/300}] = [24.4, 25.6]$

7. 定理 7.7 より，$[\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\bar{X}^2/200}] = [4 \pm 1.96 \times 4/\sqrt{200}] = [3.45, 4.55]$.

7.2　第 7.2 節の略解

1. p と $p(1-p)$ の推定値はそれぞれ $\bar{X} = 11/20 = 0.55$，$s^2 = (20/19) \times \bar{X}(1-\bar{X}) = 0.261$.

2. $\bar{X} = 4$ であるから，推定値は 4.

3. μ と σ^2 の推定値はそれぞれ $\bar{X} = 46.3$，$s^2 = 152.2$.

4. (1) と (2) は易しいので略す．(3) を示す．$Y_i = c_i X_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とおくと，これらは独立だから，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\mu}) &= \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(Y_i) \quad (\text{定理 } 5.10) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{V}(X_i) \quad (\text{定理 } 4.9(1)) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2
\end{aligned}
$$

となって示される．

次に (4) を示す．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\mu}) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} + \left(c_i - \frac{1}{n}\right)\right]^2 \\
&= \sigma^2 \left\{\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \left(c_i - \frac{1}{n}\right)^2 + 2\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(c_i - \frac{1}{n}\right)\right\} \\
&= \sigma^2 \left\{\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \left(c_i - \frac{1}{n}\right)^2\right\} \quad (\text{上式の最後の項はゼロ})
\end{aligned}
$$

よって，

$$\mathrm{V}(\hat{\mu}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geq \sigma^2/n = \mathrm{V}(\bar{X}).$$

5 同時密度関数は

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = (1+\theta)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta}.$$

これを θ の関数と見て，$L(\theta)$ とおく．対数尤度関数 $\ell(\theta) = \log L(\theta)$ は

$$\ell(\theta) = n\log(1+\theta) + \theta \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

となる．これを θ で微分すると

$$\ell'(\theta) = n/(1+\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

となるから，これを 0 と置いて，最尤推定量

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} - 1$$

を得る (増減表もチェックのこと).

6 (1) 指数分布の平均が $1/\lambda$ であることから明らか．(2) 同時密度関数は

$$\lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

である．よって対数尤度関数は，

$$n\log\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

となる．これを λ で微分すると，$n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i$ となるから，これを 0 と置いた方程式の解は $\lambda = n/\sum_{i=1}^{n} x_i$．従って，求める最尤推定量は

$1/\bar{X}$．(3)$\bar{X} = 6.11$ だから，λ は $1/\bar{X} = 0.16$ と推定される．これは 1 分当たりの平均注文到着数であるから，求める注文数は $60 \times 0.16 = 9.8$．約 10 件．

7 ここでは最尤推定量を考えてみよう．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立に一様分布 $U(0, \theta)$ に従うとき，θ の最尤推定量は $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大値である．従って，θ は 10.7 と推定される．

8 (1) 同時密度関数は，

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2} = (2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

である．従って，対数尤度関数は，

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

ここで，μ は第 3 項のみに現れ，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2$$

であるから，第 3 項は $\mu = \bar{x}$ のときに最小となる．従って，各 σ^2 に対し，

$$\ell(\mu, \sigma^2) \le \ell(\bar{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

が成り立つ．上式右辺を σ^2 の関数と見て，$\bar{\ell}(\sigma^2)$ と置き，微分すると，

$$\bar{\ell}'(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

であるから，$\bar{\ell}'(\sigma^2) = 0$ の解は $\sigma^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = S^2$ であることが分かる．即ち，各 (μ, σ^2) に対して

$$\ell(\mu, \sigma^2) \leq \ell(\bar{x}, S^2)$$

が成立する．よって，求める最尤推定量は $(\bar{X}, S^2)$ である．(2) S. (3) $S/\bar{X}$.

第8章　略解

8.1　問題8.1の略解

1 (1) 定理 8.1 を用いる．$T = (\bar{X} - 108.6)/\sqrt{4.6^2/40}$ と定義する．検定方式は，$|T| > z_{0.025} = 1.96$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 108.6$ を棄却するというものである．$T = (116.7 - 108.6)/\sqrt{4.6^2/40} = 11.137$. であるから H_0 は棄却され，平均身長は変化したという結論を得る．(2) 定理 8.2 を用いる．検定方式は $T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 H_0 を棄却するというものである．上問同様に棄却され，平均身長は増加したという結論を得る．(3) 第 1 種の誤りは,「平均身長が増加していないにも関わらず，増加したと結論する誤り」，第 2 種の誤りは,「平均身長が増加しているにも関わらず，増加していないと結論する誤り」.

2 定理 8.2 を用いる．$T = (\bar{X} - 58)/\sqrt{190/50}$ と定義する．検定方式は，$T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 58$ を棄却するというものである．$T = (65 - 58)/\sqrt{190/50} = 3.591$ であるから H_0 は棄却され，特設クラスの生徒は特に優れていると言える．

3 定理 8.2 を用いる．$T = (\bar{X} - 15)/\sqrt{25/16}$ と定義する．検定方式は，$T > z_{0.1} = 1.28$ ($z_{0.05} = 1.64$) のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 15$ を棄却するというものである．$T = (65 - 58)/\sqrt{190/50} = 3.591$ であるから，(1) でも (2) でも帰無仮説は棄却される．.

4 定理 8.2 を用いる．$T = (\bar{X} - 0)/\sqrt{9/10}$ と定義する．検定方式は，

$T > z_{0.05} = 1.64$ のとき帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$ を棄却するというものである．$T = (2.8 - 0)/\sqrt{9/10} = 2.951$ であるから H_0 は棄却される．

5 (1) 第 1 種の誤りは「被告人が無罪であるにも関わらず，有罪とする誤り」，第 2 種の誤りは「被告人が有罪であるにも関わらず，無罪とする誤り」．重大なのは第 1 種の誤り．(2) 第 1 種の誤りは「火災報知器が故障していないにも関わらず，故障しているとする誤り」，第 2 種の誤りは「火災報知器が故障しているにも関わらず，故障していないとする誤り」．重大なのは第 2 種の誤り．(3)(4) は略す.

8.2　問題 8.2 の略解

本節以降は，前節よりも記述を簡略にする．

1 (1) 定理 8.3 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 108.6)/\sqrt{s^2/40}$ であり，その実現値は $t = 9.859$. 臨界値は $t_{0.025}(39) = 2.023$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．(2) 定理 8.4 を用いる．臨界値は $t_{0.05}(39) = 1.684$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．

2 定理 8.4 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 58)/\sqrt{s^2/50}$ であり，その実現値は $t = 6.877$. 臨界値は $t_{0.05}(49) = 1.677$ であるから帰無仮説 H_0 は棄却される．

3 定理 8.4 を用いる．検定統計量は $t = (\bar{X} - 0)/\sqrt{s^2/10}$ であり，その実現値は $t = 3.055$ である．臨界値は $t_{0.05}(9) = 1.833$ であるから，H_0 は棄却される．

4 定理 8.4 の (8.2.8) を用いる．$t = (\bar{X} - 190)/\sqrt{s^2/30}$ と置くと，$t = -1.806$. 他方，臨界値は $-t_{0.05}(29) = -1.699$ であるから，H_0 は棄却される．

5 定理 8.4 の (8.2.8) の検定は，この問題に対しても自然な検定方式であると考えられる．例は略す.

8.3 問題 8.3 の略解

1. 定理 8.5 の検定を用いる．$Y = 39s^2/(4.6)^2 > \chi^2_{0.05}(39) = 54.57$ なるとき，H_0 を棄却する．$Y = 49.76$ であるから，H_0 は棄却されない.

2. 定理 8.5 の検定を用いる．$Y = 14s^2/(0.005)^2 > \chi^2_{0.1}(14) = 21.06$ なるとき，H_0 を棄却する．$Y = 20.16$ であるから，H_0 は棄却されない.

3. (1)$Y = 29s^2/18 > \chi^2_{0.05}(29) = 42.56$ なるとき，H_0 を棄却．$Y = 40.28$ であるから，H_0 は棄却されない． (2) 臨界値は $\chi^2_{0.1}(29) = 39.09$ となるから，H_0 は棄却される． (3) $Y = 89s^2/18 = 123.61$ であり，臨界値 $\chi_{0.05}(89) = 112.02$ を超えるから H_0 は棄却される.

8.4 問題 8.4 の略解

1. (1) 定理 8.7 の検定を用いる．プールされた分散は $s^2 = (13s_1^2+9s_2^2)/22 = 5.1$ と計算される．$t = (\bar{X}-\bar{Y})/\sqrt{s^2(1/14+1/10)}$ と置く．$t < -t_{0.95}(22) = -1.717$ のとき，H_0 を棄却する．$t = -5.775$ であるから，H_0 は棄却される．(2) 定理 8.9 の検定を用いる．$F = s_1^2/s_2^2$ と置く．$F < F_{0.95}(13, 9) = 0.368$ のとき，H_0 を棄却する．$F = 0.656$ であるから，H_0 は棄却されない.

2. (1) 定理 8.8 の検定を用いる．$t = (\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{s^2(1/10 + 1/10)}$ と置く．$|t| > t_{0.025}(18) = 2.101$ のとき，H_0 を棄却する．$t = -4.183$ であるから，H_0 は棄却される．(2) $F = s_1^2/s_2^2$ と置く．$F > F_{0.05}(9, 9) = 3.179$ のとき，H_0 を棄却する．$F = 2.333$ であるから，H_0 は棄却されない.

(3) $\hat{Z} = (\bar{X} - \bar{Y})/\sqrt{s_1^2/9 + s_2^2/9}$ と置く．$|\hat{Z}| > z_{0.05} = 1.96$ のとき，H_0 を棄却する．$\hat{Z} = -3.969$ であるから H_0 は棄却される．

8.5　問題 8.5 の略解

1. 8.5.1 節の両側検定を用いる．帰無仮説 $H_0 : p = 0.7$ を対立仮説 $H_1 : p \neq 0.7$ に対して，有意水準 0.05 で検定する．$\bar{X} = 360/600 = 0.6$ である．$Z = (0.6 - 0.7)/\sqrt{0.7 \times 0.3/600} = -5.345$ であり，$|Z| > z_{0.05} = 1.96$ であるから，H_0 は棄却される．

2. (1) $\bar{X} \sim N(p, p(1-p)/m)$, $\bar{Y} \sim N(q, q(1-q)/n)$. (2) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(p - q, \frac{p(1-p)}{m} + \frac{q(1-q)}{n}\right)$. (3) 上問より，

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (p - q)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{m} + \frac{q(1-q)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

である．大数法則より，$m \to \infty$ のとき，$\bar{X}$ は p に確率収束する．よって，注 5.6 の (5) より $\bar{X}(1-\bar{X})/m$ は $p(1-p)/m$ に確率収束する．同様に，$n \to \infty$ のとき，$\bar{Y}(1-\bar{Y})/n$ は $q(1-q)/n$ に確率収束する．よって，$p(1-p)/m + q(1-q)/n$ を $\bar{X}(1-\bar{X})/m + \bar{Y}(1-\bar{Y})/n$ で近似することが出来るから，

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (p - q)}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{m} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{n}}} \sim N(0, 1)$$

と考えてよい．$H_0 : p = q$ が正しいとき，上式の確率変数は Z に等しいから，$Z \sim N(0, 1)$ が成り立つ．(4)$\bar{X} = 80/120$，$\bar{Y} = 45/90$ とすれば，$Z = 2.449$. 臨界値 $z_{0.05} = 1.96$ と比較して，H_0 を棄却する．

3. 上問と同様であるから省略する．

4. (1) $\bar{x}^* = (35 \times 7 + 45 \times 58 + \cdots + 95 \times 6)/500 = 64.4$. $S_*^2 = \{(35 - 64.4)^2 \times 7 + (45 - 64.4)^2 \times 58 + \cdots + (95 - 64.4)^2\}/500 = 147.2$ (2) $X \sim N(a, b^2) = N(64.4, 147.2)$ とすると，$P(X < 40) = 0.024$, $P(40 \leq X < 50) = 0.096$, $P(50 \leq X < 60) = 0.241$, $P(60 \leq X < 70) = 0.319$, $P(70 \leq X < 80) = 0.222$, $P(80 \leq X < 90) = 0.081$, $P(90 \leq X < 100) = 0.016$ と求められる．これに 500 を掛けることにより，理論度数は順に，12.0, 48.0, 120.7, 159.7, 111.2, 40.7, 7.8 と求められる．従って，(8.5.11) に当てはめて，

$$U = \frac{(7 - 12.0)^2}{12.9} + \frac{(58 - 48.0)^2}{48.0} + \cdots + \frac{(6 - 7.8)^2}{7.8} = 6.204.$$

臨界値は $\chi^2_{0.05}(6) = 12.59$ であるから，正規分布に適合していると言える．

5. (8.5.15) に当てはめて，

$$U = \frac{(80 - 53.3)^2}{53.3} + \frac{(30 - 33.3)^2}{33.3} + \cdots + \frac{(60 - 46.7)^2}{46.7} = 40.05.$$

臨界値は $\chi^2_{0.05}(4) = 9.49$ であるから，独立という帰無仮説は棄却される．

6. 上問と同様に

$$U = \frac{(12 - 13.2)^2}{13.2} + \frac{(48 - 46.8)^2}{46.8} + \frac{(10 - 8.8)^2}{8.8} + \frac{(30 - 31.2)^2}{31.2} = 0.350.$$

臨界値は $\chi^2_{0.05}(1) = 3.841$ であるから，独立という帰無仮説は棄却されない．

7. 各組合せ (A_i, B_j) の観測度数を n_{ij} と置けば，尤度関数は

$$(p_1 q_1)^{n_{11}} (p_1 q_2)^{n_{12}} (p_2 q_1)^{n_{21}} (p_2 q_2)^{n_{22}}$$

となる．$p_2 = 1 - p_1$，$q_2 = 1 - q_1$ であるから，これは

$$\begin{aligned} & p_1^{n_{11}+n_{12}}(1-p_1)^{n_{21}+n_{22}} \times q_1^{n_{11}+n_{21}}(1-q_1)^{n_{12}+n_{22}} \\ = \quad & p_1^{n_{1\cdot}}(1-p_1)^{n_{2\cdot}} \times q_1^{n_{\cdot 1}}(1-q_1)^{n_{\cdot 2}} \\ = \quad & p_1^{n_{1\cdot}}(1-p_1)^{n-n_{1\cdot}} \times q_1^{n_{\cdot 1}}(1-q_1)^{n-n_{\cdot 1}} \end{aligned}$$

と表せる．よって，各因数をそれぞれ最大化すればよく，

$$p_1 = n_{1\cdot}/n,\ q_1 = n_{\cdot 1}/n$$

が求める最尤推定量となる．勿論，p_2 と q_2 の最尤推定量はそれぞれ $1 - p_1 = n_{2\cdot}/n$，$1 - q_1 = n_{\cdot 2}/n$ である．